УДК 681.31

*П. І. Когут, **І. В. Нечай

*Дніпропетровський національний університет
**Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту

# ДО ПИТАННЯ РЕГУЛЯРІЗАЦІЇ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

**Запропоновано спосіб регулярізації одного класу задач нескалярної оптимізації в банахових просторах, для випадку, коли векторнозначне відображення не є напівнеперервним знизу у певному сенсі, в наслідок чого, порушуються достатні умови розв'язності.**

**Допоміжні означення**. Нехай $X$ – рефлексивний простір, $Y$ – банахів простір з нульовим елементом $\theta$. Для довільної підмножини $Y_0 \subset Y$ будемо використовувати такі позначення: $IntY_0$ – її внутрішність, $\partial Y_0$ – її границю у просторі $Y$. Надалі вважатимемо, що $Y$ напівупорядковано опуклим замкненим конусом $\Lambda$, тобто $x \le y \Leftrightarrow y - x \in \Lambda$. Крім цього, будемо розглядати конуси $\Lambda$ тільки такі, що $\Lambda \cap (-\Lambda) = \theta$. Елемент $y^*$ множини $Y$ будемо називати $\Lambda$ – мінімальним у множині $Y_0$, якщо не існує $y \in Y_0$ такого, що $y \le y^*$, $y^* \ne y$. Сукупність усіх таких елементів будемо позначати $\Lambda - MinY_0$. Аналогічно визначається $\Lambda$ – максимальний елемент. Уведемо до $Y$ два невласних елемента $-\infty$ і $+\infty$ і будемо вважати, що вони задовольняють таким умовам: 1) $-\infty \le y \le +\infty$, $\forall y \in Y$; 2) $\pm\infty - (\pm\infty) = \theta$. Через $\overline{Y}$ позначимо $Y \cup \{\pm\infty\}$. Через $Y^\bullet$ будемо позначати напіврозширений простір: $Y^\bullet = Y \cup \{+\infty\}$.

**Означення 1.** Ефективним $\Lambda$-інфімумом множини $Y_0$ будемо називати множину $\Lambda$-мінімальних елементів замикання множини $Y_0$ у просторі $Y$, у разі коли ця множина не пуста, і множину $\{-\infty\}$ у протилежному випадку

$$\Lambda - Inf\, Y_0 = \begin{cases} \Lambda - Min(clY_0), & \Lambda - Min(clY_0) \ne \varnothing, \\ \{-\infty\}, & \Lambda - Min(clY_0) = \varnothing. \end{cases}$$

Основним об'єктом для досліджень будемо вважати відображення $f : X_\partial \to Y$, де $X_\partial$ – підмножина простору $X$. Можна з таким відображенням пов'язати відображення $\mathfrak{f} : X \to Y^\bullet$, означене на всьому просторі $X_\partial$, наступним чином:

$$\mathfrak{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X_\partial, \\ +\infty, & x \notin X_\partial. \end{cases}$$

© П. І. Когут, І. В. Нечай, 2008

Як буде видно з наступних означень, такі дві форми подання відображення можна вважати еквівалентними. Для відображень, що діють у напіврозширений простір: $f : X \to Y^{\bullet}$ є природнім наступне означення.

**Означення 2.** Нехай задано відображення $f : X_{\partial} \to Y^{\bullet}$. Ефективною множиною відображення $f$ будемо називати таку множину

$$Dom\ f = \{x \in X : \ f(x) \neq +\infty\}.$$

**Означення 3.** Ефективним $\Lambda$-інфімумом відображення $f : X \to Y^{\bullet}$ будемо називати підмножину яка є ефективним $\Lambda$ – інфімумом образу $f(X)$ в $Y$.

Нехай дано послідовність $\{y_n\} \subset Y$. Позначимо через $L\{y_n\}$ множину всіх її граничних точок. Для необмежених знизу (зверху) множин будемо вважати, що $-\infty \in L\{y_n\}$ $(+\infty \in L\{y_n\})$. Для довільного відображення $f : X \to Y^{\bullet}$ уведемо до розгляду множину $L(f(x_0)) = \bigcup\limits_{\{x_n\} \to x_0} L\{f(x_n)\}$.

**Означення 4.** $\Lambda$ – нижньою границею відображення $f : X \to Y^{\bullet}$ у точці $x_0 \in X$ будемо називати наступну множину

$$\Lambda - \liminf_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} L(f(x_0)) \cap \Lambda - \mathop{Inf}\limits_{x \in X} f(x), & L(f(x_0)) \cap \Lambda - \mathop{Inf}\limits_{x \in X} f(x) \neq \varnothing, \\ \Lambda - Inf\ L(f(x_0)), & L(f(x_0)) \cap \Lambda - \mathop{Inf}\limits_{x \in X} f(x) = \varnothing. \end{cases}$$

Задачею векторної оптимізації будемо називати трійку об'єктів:

$$\langle X_{\partial}, f, \Lambda \rangle, \tag{1}$$

які пов'язані між собою умовою: на множині $X_{\partial}$, яка є підмножиною простору $X$ потрібно вказати ті елементи $x^*$, на яких реалізується ефективний $\Lambda$-інфімум відображення $f : X_{\partial} \to Y$. Тобто множиною розв'язків задачі (1) будемо називати таку множину:

$$Sol(X_{\partial}, f, \Lambda) = \left\{ x^* \in X_{\partial} : \ f(x^*) \in \Lambda - \mathop{Inf}\limits_{x \in X_{\partial}} f(x) \right\}.$$

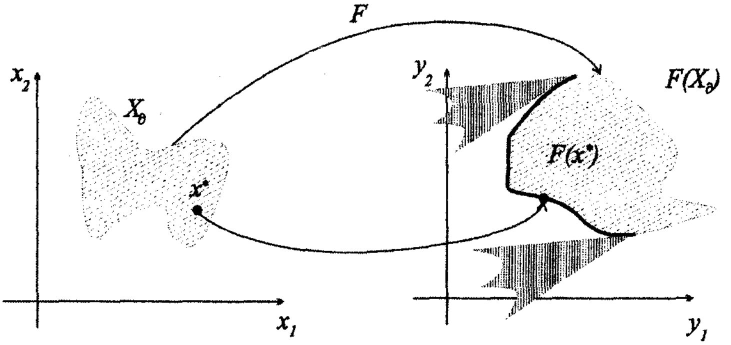


**Рис. 1.** Розв'язок задачі векторної оптимізації

**Означення регулярізованої задачі векторної оптимізації.** Для обгрунтованого введення означення регулярізованої задачі розглянемо спочатку прості приклади задач векторної оптимізації. Приклади 2 і 3 відносяться до того окремого випадку задачі (1), коли нескалярне відображення $f$ має вигляд $f: X_\partial \to R^2$, де $X_\partial$ є слабко замкненою і обмеженою підмножиною, а про конус $\Lambda$ відомо таке: $\Lambda \subseteq R_+^2$. Зауважимо, що задача вказаного типу, взагалі кажучи, розв'язку може не мати.

**Приклад 1.** Нехай $X_\partial = [1;2]$, $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$, $f_i : X_\partial \to R$, $\Lambda = R_+^2$,

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = \begin{cases} 2, & x \in (1;2], \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Зауважимо, що $f_1$ – неперервна, а $f_2$ не є напівнеперервною знизу. Запишемо формулу для $f$ і побудуємо множину $f(X_\partial)$.

$$f(x) = \begin{cases} (x;1), & x \in (1;2], \\ (1;2), & x = 1. \end{cases}$$

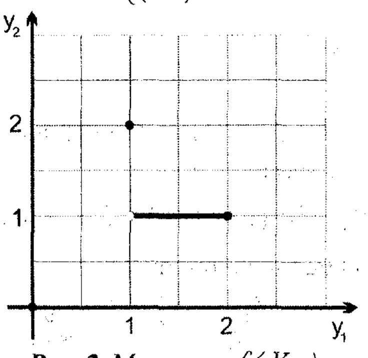


**Рис. 2.** Множина $f(X_\partial)$

Робимо висновок: $Sol(X_\partial, f, \Lambda) = \varnothing$.

Кожній задачі такого типу можна поставити у відповідність задачу $\langle X_\partial, \overline{f}, \Lambda \rangle$, в якій $\overline{f} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \end{bmatrix}$, де $\mathcal{F}_i$ – напівнеперервні знизу регулярізації скалярних функцій $f_i$.

Відображення $\overline{f}$ будемо називати покомпонентною регулярізацією відображення $f$. Головна мета розглянутих нижче прикладів – показати, що покомпонентна регулярізація відображення $f$ може привести до задачі властивості якої не є аналогічними тим, що має регулярізована задача у скалярному випадку. Наприклад, якщо припустити, що вихідна задача скалярної оптимізації мала розв'язок $x^*$, то ця точка буде також розв'язком і регулярізованої задачі. Проте, як показано у прикладі 2, при по компонентній регулярізації можна втратити розв'язок вихідної задачі.

**Приклад 2.** Нехай $X_\partial=[0;2]$, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\begin{cases}1, & x\in[0;1),\\ 2, & x\in[1;2],\end{cases}$

$$\Lambda=\left\{y\in R_+^2:\ y_2\le y_1\right\}.$$

Тоді відображення $f$ і $\overline{f}$ визначаються за формулами:

$$f(x)=\begin{cases}(x;1), & x\in[0;1),\\ (x;2), & x\in[1;2]\end{cases}\quad \text{і}\quad \overline{f}(x)=\begin{cases}(x;1), & x\in[0;1],\\ (x;2), & x\in(1;2].\end{cases}$$

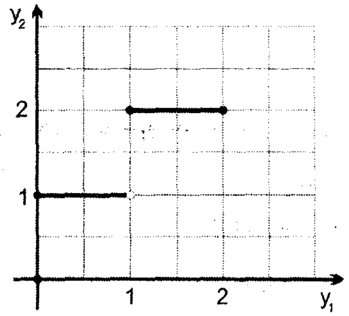


**Рис. 3.** Множина $f(X_\partial)$

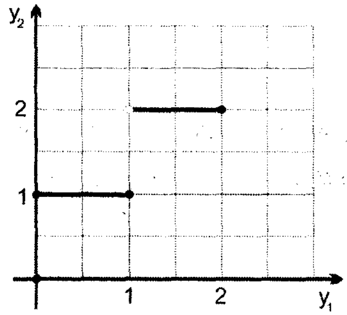


**Рис. 4.** Множина $\overline{f}(X_\partial)$

На рис. 3 показано множину $f(X_\partial)$, а на рис. 4 – множину $\overline{f}(X_\partial)$. Можна встановити наступне співвідношення:

$$\{0;1\}=Sol(X_\partial,f,\Lambda)\supset Sol\left(X_\partial,\overline{f},\Lambda\right)=\{0\}.$$

Зауважимо, що в 2 є справедливою рівність

$$\Lambda-\underset{x\in X_\partial}{Inf}\ f(x)=\Lambda-\underset{x\in X_\partial}{Inf}\ \overline{f}(x),$$

яка узгоджується зі скалярним випадком регулярізації оптимізаційної задачі. Проте, як показано у прикладі 3, ця рівність може не мати місця для задачі такого ж типу як задача із прикладу 2.

**Приклад 3.** Нехай $X_\partial=[1;3]$, $\Lambda=\left\{y\in R_+^2:\ y_2\le 2y_1\right\}$,

$$f_1(x)=\begin{cases}2, & x\in[1;2],\\ x-1, & x\in(2;3]\end{cases},\quad f_1(x)=\begin{cases}2, & x=1,\\ x, & x\in(1;2],\\ 3, & x\in(2;3].\end{cases}$$

Тоді відображення $f$ має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}(2;2), & x=1,\\ (2;x), & x\in(1;2],\\ (x-1;3), & x\in(2;3].\end{cases}$$

Побудуємо відображення $\overline{f}$. Спочатку розглянемо графіки функцій $f_1$ і $f_2$.

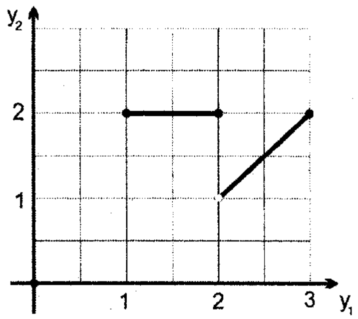


Рис. 5. Графік $f_1(x)$

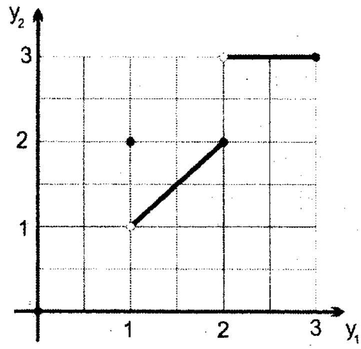


Рис. 6. Графік $f_2(x)$.

Регулярізуючи $f_1$ і $f_2$, одержимо:

$$\tilde{f}_1(x)=\begin{cases}2, & x\in[1;2),\\ x-1, & x\in[2;3]\end{cases},\quad \tilde{f}_2(x)=\begin{cases}x, & x\in[1;2],\\ 3, & x\in(2;3]\end{cases}$$

Складаємо відображення $\overline{f}$:

$$\overline{f}(x)=\begin{cases}(1;2), & x=2,\\ (2;x), & x\in[1;2),\\ (x-1;3), & x\in(2;3].\end{cases}$$

Розглянемо множини $f(X_\partial)$ і $\overline{f}(X_\partial)$, щоб переконатися в тому, що ефективні $\Lambda$-інфімуми вихідного і одержаного відображення не співпадають.

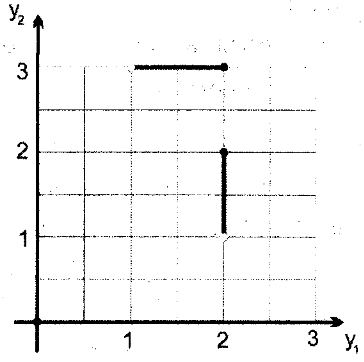


Рис. 7. Множина $f(X_\partial)$

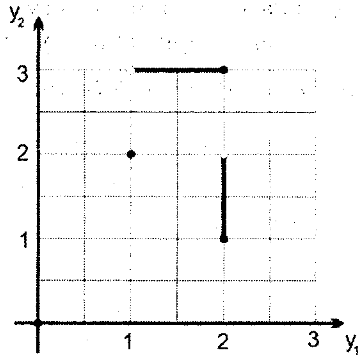


Рис. 8. Множина $\overline{f}(X_\partial)$

Ефективний інфімум відображення $f$ – це множина:

$$\Lambda - \operatorname*{Inf}_{x \in X_\partial} f(x) = \{(1;3),(2;1)\},$$

ефективний $\Lambda$-інфімум відображення $\overline{f}$ є вже іншою множиною:

$$\Lambda - \operatorname*{Inf}_{x \in X_\partial} \overline{f}(x) = \{(1;2),(2;1)\}.$$

Множина розв'язків задачі $\langle X_\partial, \overline{f}, \Lambda \rangle$: $Sol(X_\partial, f, \Lambda) = \{1;2\}$.

Звернемо увагу на особливості одержаних задач після по компонентної регулярізації в розглянутих прикладах. Перед тим як сформулювати означення регулярізованої задачі, підкреслимо вади, що мають місце в цих прикладах. Той факт, що розв'язки вихідної задачі можуть бути відсутніми серед розв'язків регулярізованої задачі може, деякою мірою компенсувати те, що про регулярізовану задачу, навідміну від вихідної буде відомо, що вона є розв'язною. У такому випадку будемо вважати, що мету (регулярізація вихідної задачі) майже досягнено. А результат «регулярізації» коли ефективні $\Lambda$-інфімуми даного і «регулярізованого» відображення не співпадають будемо сприймати таким, що потребує подальшого дослідження. Зокрема, в цій ситуації досить цікавим є питання: чи можна вважати розв'язки такої «погано» регулярізованої задачі як узагальнені в деякому сенсі розв'язки вихідної? Як буде показано далі, для прикладу 3 на це питання можна дати позитивну відповідь (див. приклад 7). Проте, в загальному випадку, такого стверджувати не можна.

**Означення 5.** Нехай задано задачу $P: \langle X_\partial, f, \Lambda \rangle$. Будемо називати задачу $\mathfrak{P}: \langle X_\partial, \mathfrak{f}, \Lambda \rangle$ регулярізацією задачі $P$, якщо будуть виконуватися наступні умови:

1) $Sol\ \mathfrak{P} \neq \varnothing$,

2) $\mathfrak{f}(Sol\ \mathfrak{P}) \subseteq \Lambda - \operatorname*{Inf}_{x \in X_\partial} f(x)$,

3) $Sol\ P \subseteq Sol\ \mathfrak{P}$.

Якщо задача $\mathfrak{P}$ буде мати тільки дві перші з означених властивостей, будемо називати її напіврегулярізацією задачі $P$.

Так, у прикладі 2, умови 1) і 2) виконуються, а умова 3) – порушується. У прикладі 3 порушується тільки умова 2). Таким чином задача $\langle X_\partial, \overline{f}, \Lambda \rangle$ першого прикладу є напіврегулярізацією задачі $\langle X_\partial, f, \Lambda \rangle$, а в другому – ні. Надалі будемо вивчати таке питання: якщо маємо задачу (1), яким чином може бути одержана регулярізована (напіврегулярізована) задача $\mathfrak{P}: \langle X_\partial, \mathfrak{f}, \Lambda \rangle$ у сенсі означення 5. У скалярному випадку при вирішенні цього питання головну роль грає властивість напівнеперервності. До того ж при переході від задачі з даним відображенням до задачі з напівнеперервною регулярізацією цього відображення звуження множини розв'язків не можливо, оскільки напівнеперервність відображення в точці $x_0$ в задачі скалярної мінімізації є необхідною умовою належності цієї точки до множини розв'язків. Як показує приклад 2, напівнеперервність кожної з компонент відображення $f$ не гарантує аналогічного результату у векторному випадку: $f$ досягає $\Lambda$-інфімума в точці $x_0 = 1$, проте напівнеперервність обох функцій $f_i$ не має місця. З іншого боку, регулярізуючи функції $f_i$, ми втрачаємо розв'язок $x_0 = 1$. Аналогію зі скалярним випадком усе ж такі можна побачити, якщо властивість напівнеперервності має відображення, а не кожна його компонента окремо.

**Деякі відомі підходи до означення напівнеперервності векторнозначного відображення.** Напівнеперервність функціонала якості у питанні знаходження достатніх умов розв'язності однокритеріальної задачі оптимізації грає вирішальну роль. Аналогічна ситуація буде мати місце у випадку векторнозначного критерію, проте для таких відображень означити напівнеперервність можна кількома способами.

**Означення 6[6].** Відображення $f : X \to Y^{\square}$ називається *напівнеперервним знизу в точці* $x_0 \in DomF$, якщо для будь-якого околу $V$ точки $f(x_0)$ в $Y$ існує окіл $U$ точки $x_0$ в $X$ такий, що $f(U) \subset V + \Lambda \cup \{+\infty\}$. Відображення $f : X \to Y^{\square}$ називається *напівнеперервним знизу*, якщо воно є напівнеперервним знизу в кожній точці $X_\partial$.

**Твердження 1[2].** *Нехай $X_\partial$ не пуста і компактна множина в $X$, $f : X_\partial \to Y$ – напівнеперервне знизу відображення. Тоді $Sol(X_\partial, f, \Lambda) \neq \varnothing$.*

Відразу можна помітити надмірну жорсткість достатніх умов, наведених у твердженні 1. З метою послаблення цих вимог наведемо, ще таке означення.

**Означення 7[6].** Відображення $f : X \to Y^{\square}$ називається *(слабко) $q$-напівнеперервним знизу в точці* $x_0 \in Dom\ f$, якщо для будь-якого $b \in Y$ такого, що $b \not\geq f(x_0)$ існує (слабкий) окіл $U$ точки $x_0$ в $X$ такий, що $b \not\geq f(x)$, $\forall x \notin U \cap Dom\ f$.

Відомо [6], що якщо відображення $F : X \to Y^{\square}$ є напівнеперервним знизу в точці $x_0 \in Dom\ f$, то воно є $q$-напівнеперервним знизу в цій точці, обернене твердження в загальному випадку хибне. Проте легко можна навести приклади відображень, які не є $q$-напівнеперервними знизу, проте $Sol(X_\partial, f, \Lambda) \neq \varnothing$.

**Приклад 4.** Нехай $f : [-3;-1] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $\Lambda = \mathbf{R}^2_+$,

$$f(x) = \begin{cases} (-x;2), & x \in [-3;-1) \\ (2;1), & x = -1 \end{cases}$$

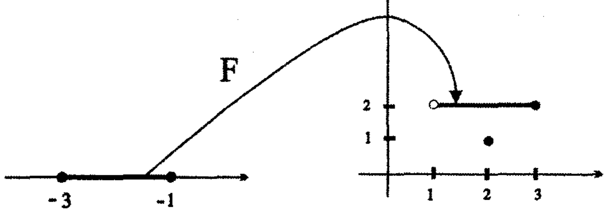


**Рис 9.** Відображення $f$

Це відображення не є $q$-напівнеперервним знизу в точці $x_0 = -1$. Дійсно, візьмемо $b = \left(1\frac{1}{2};3\right)$. Очевидно $b \not\geq f(x_0)$ і не існує околу $U(x_0)$ точки $x_0$ такого, що $b \not\geq f(x)$ для всіх $x \in U(x_0) \cap X_\partial$. Проте, очевидно, що $\mathrm{Sol}(X_\partial, f, \Lambda) = \{-1\}$.

Проводячи далі аналогію зі скалярним випадком, зауважимо, що напівнеперервність знизу скалярної функції в точці є необхідною умовою належності цієї точки до множини розв'язків задачі мінімізації, проте для векторнозначного відображення з прикладу 4, $q$-напівнеперервність знизу порушується саме в тій точці $x_0$, яка є розв'язком задачі векторної оптимізації. Саме з цієї причини в даній роботі будемо дотримуватися іншого поняття напівнеперервності знизу векторнозначного відображення (означення 9). Для цього введемо ряд допоміжних означень.

**Розширення класу напівнеперервних знизу відображень.** У наступному означенні запропоновано нове поняття напівнеперервності, більш слабке ніж $q$-напівнеперервність. Використовуючи його, далі сформулюємо достатні умови розв'язності задачі (1).

**Означення 8.** Відображення $f: X_\partial \to Y$ будемо називати $\Lambda_s$*-напівнеперервним* знизу в точці $x_0 \in X_\partial$, якщо $f(x_0) \in \Lambda - \liminf\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$.

Відображення $f: X_\partial \to Y$ будемо називати *слабко* $\Lambda_s$*-напівнеперервним* знизу в точці $x_0 \in X_\partial$, якщо $f(x_0) \in \Lambda - \liminf\limits_{x \xrightarrow{w} x_0} f(x)$.

З означеня 8 випливає, що будь-яке слабко $\Lambda_s$-напівнеперервне знизу відображення в точці $x_0 \in X_\partial$, є також $\Lambda_s$-напівнеперервним знизу в цій точці. Якщо відображення $f$ є $\Lambda_s$-напівнеперервним (слабко $\Lambda$-напівнеперервним) знизу в кожній точці $x \in X_\partial$, будемо називати $f$ $\Lambda_s$-напівнеперервним (слабко $\Lambda_s$-напівнеперервним) знизу відображенням.

**Означення 9.[2]** Елемент $y^* \in Y_0 \subset Y$ називається $\Lambda$-найменшим елементом ($\Lambda$-ідеальним мінімумом) множини $Y_0$, якщо $y^* \leq y$, $\forall y \in Y_0$. Будемо використовувати позначення: $y^* = \Lambda - I\,Min\; Y_0$.

**Лема 1.** *Нехай відображення* $f: X_\partial \to Y$ *слабко* $q$*-напівнеперервне знизу в точці* $x_0 \in X_\partial$. *Тоді* $f(x_0)$ *є* $\Lambda$*-найменшим елементом множини* $L(f(x_0))$, *тобто*

$$f(x_0) = \Lambda - I\,Min\; L(f(x_0)).$$

**Доведення.** Нехай $y^* \in L(f(x_0))$, тоді існує послідовність $\{x_n\} \xrightarrow{w} x_0$ така, що $\{f(x_n)\} \xrightarrow{\tau} y^*$. Введемо до розгляду множину $B = \{b \in Y : b \not\geq f(x_0)\}$ і позначимо через $U_b(x_0)$ слабкий окіл точки $x_0$ такий, що $b \not\geq f(x)$, $\forall x \in U_b(x_0) \cap X_\partial$. Нехай $\tilde{U}(x_0) \square \bigcap_{b \in B} U_b(x_0)$, тоді існує $n^* \in \mathrm{N}$ таке, що

$$x_n \in \tilde{U}(x_0), \quad \forall n \geq n^*. \tag{2}$$

Доведемо, що $f(x_n) \notin B, \quad \forall n \geq n^*$. Для цього спочатку зробимо обернене припущення:

$$\text{існує } p \in \mathrm{N}, \ p \geq n^* \text{ таке, що } f(x_p) \in B, \tag{3}$$

тоді $f(x_p) \not\geq f(x), \quad \forall x \in U_{f(x_p)}(x_0) \cap X_\partial$. Оскільки справедливо включення $\left(\tilde{U}(x_0) \cap X_\partial\right) \subset \left(U_{f(x_p)}(x_0) \cap X_\partial\right)$, маємо

$$f(x_p) \not\geq f(x), \ \forall x \in \tilde{U}(x_0) \cap X_\partial. \tag{4}$$

Далі, враховуючи (3), одержимо: $f(x_p) \neq f(x_p)$. Таким чином, припущення (3) хибне, тому $f(x_n) \notin B, \quad \forall n \geq n^*$, тобто $f(x_n) \geq f(x_0), \quad \forall n \geq n^*$. Звідки, переходячи до слабкої границі, одержимо $f(x_0) \leq y^*$.

**Теорема 1.** *Нехай відображення $f : X_\partial \to Y$ слабко $q$-напівнеперервне знизу в точці $x_0 \in X_\partial$. Тоді $f$ є слабко $\Lambda_s$-напівнеперервним знизу в точці $x_0$.*

**Доведення.** Згідно з лемою 1, виконується рівність

$$f(x_0) = \Lambda - I\,Min\ L(f(x_0)), \text{ тоді}$$

$$\Lambda - Inf\ L\left(f\left(x_0\right)\right) = \left\{\Lambda - I\,Min\ L(f(x_0))\right\} = \left\{f\left(x_0\right)\right\}.$$

Тому, згідно з означенням 4, $\Lambda - \liminf\limits_{x \xrightarrow{w} x_0} f(x) = \left\{\Lambda - IMin\ L\left(f\left(x_0\right)\right)\right\} = \left\{f\left(x_0\right)\right\}$.

Отже, за означенням 8, f є слабко $\Lambda_s$-напівнеперервним знизу в точці $x_0$.

Обернене твердження, як показує приклад 4 не вірне.

**Достатні умови розв'язності задачі векторної оптимізації.**

**Теорема 2.** *Нехай відображення $f : X_\partial \to Y$ є слабко $\Lambda_s$-напівнеперервним знизу, а множина $X_\partial$ – слабко замкненою і обмеженою у просторі $X$. Тоді*

$$\Lambda - Sol\left(X_\partial, f, \Lambda\right) \neq \varnothing.$$

**Доведення.** За означеннями 6, 7, $\Lambda - \mathop{Inf}\limits_{x \in X_\partial} f(x) \neq \varnothing$ (можливо $\Lambda - \mathop{Inf}\limits_{x \in X_\partial} f(x) = \{-\infty\}$). Візьмемо довільний елемент $y^* \in \Lambda - \mathop{Inf}\limits_{x \in X_\partial} f(x)$, тоді існує послідовність $\{y_n\} \subset f(X_\partial)$ така, що $\{y_n\} \longrightarrow y^*$. Розглянемо послідовність

$\{x_n\}=\left\{f^{-1}(y_n)\right\}$, яка за умовою є обмеженою. Враховуючи рефлексивність простору $X$, позначимо через $\{x_\mu\}$ таку підпослідовність послідовності $\{x_n\}$, що $\{x_\mu\}\xrightarrow{w}x^*$, де $x^*\in X$. Узявши до уваги той факт, що $\{x_n\}\subset X_\partial$ і те, що $X_\partial$ – слабко замкнена, робимо висновок: $x^*\in X_\partial$. Оскільки відображення $f:X_\partial\to Y$ є слабко $\Lambda_s$-напівнеперервним знизу, справедливо включення

$$f\left(x^*\right)\in\Lambda-\liminf_{x\xrightarrow{w}x^*} f(x), \tag{5}$$

яке робить неможливим припущення $\Lambda-\operatorname{Inf}\limits_{x\in X_\partial} f(x)=\{-\infty\}$. Крім цього, очевидно, що $y^*\in L\left(f(x^*)\right)$, таким чином $y^*\in\left(L\left(f(x^*)\right)\cap\Lambda-\operatorname{Inf}\limits_{x\in X_\partial} f(x)\right)\neq\varnothing$. Тоді, за означенням 4, маємо таку тотожність

$$\Lambda-\liminf_{x\xrightarrow{w}x^*} f(x)=L\left(f\left(x^*\right)\right)\cap\Lambda-\operatorname{Inf}_{x\in X_\partial} f(x). \tag{6}$$

З (5) і (6) випливає, що $f\left(x^*\right)\in\Lambda-\operatorname{Inf}\limits_{x\in X_\partial} f(x)$, тобто $x^*\in\Lambda-Sol\left(X_\partial;f,\Lambda\right)$.

**Один підхід до регулярізації задачі векторної оптимізації.** Будемо розглядати задачу $\langle X_\partial,f,\Lambda\rangle$, де $X_\partial$ – обмежена і слабко замкнена множина в $X$. Така задача, взагалі кажучи, розв'язку може не мати. Проте, якщо припустити, що відображення $f$ є $\Lambda$ – обмеженим знизу, то така задача завжди буде мати узагальнені розв'язки у сенсі означення 10. Надалі збіжність у просторі $X$ будемо розуміти як слабку.

**Означення 11.** Нехай задано відображення $f:X_\partial\to Y$. Будемо називати $\Lambda_s$-регулярізацією відображення $f$ відображення, означене за формулою

$$\mathfrak{f}_s(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)\in\Lambda-\liminf\limits_{u\to x} f(u) \\ p, & \begin{cases} L\left(f(x)\right)\cap\Lambda-\operatorname{Inf}\limits_{u\in X_\partial} f(u)=\varnothing,\exists p: \\ p<f(x),\quad p\in\Lambda-\operatorname{Inf} L\left(f(x)\right)\end{cases} \\ q, & \begin{cases} f(x)\notin\Lambda-\operatorname{Inf}\limits_{u\in X_\partial} f(u), \\ \exists q\in L\left(f(x)\right)\cap\Lambda-\operatorname{Inf}\limits_{u\in X_\partial} f(u),\end{cases}\end{cases}$$

а задачу $\left\langle X_\partial,\mathfrak{f}_s,\Lambda\right\rangle$ будемо називати $\Lambda_s$ – задачею для задачі $\langle X_\partial,f,\Lambda\rangle$.

**Твердження 2.** *Для будь-якого відображення виду $f : X_\partial \to Y$ його $\Lambda_s$-регулярізація $\mathcal{F}_s(x)$ є $\Lambda_s$-напівнеперервним знизу відображенням:*

$$\mathcal{F}_s(x) \in \Lambda - \liminf_{u \to x} \mathcal{F}_s(u).$$

**Доведення.** З означення 11 випливає по-перше:

$$\mathcal{F}_s(x) \in \Lambda - \liminf_{u \to x} f(u), \tag{7}$$

і по-друге: $\Lambda - Min\big(cl\ f(X_\partial)\big) = \Lambda - Min\big(cl\ \mathcal{F}_s(X_\partial)\big)$, тому

$$\Lambda - \underset{x \in X_\partial}{Inf}\ f(x) = \Lambda - \underset{x \in X_\partial}{Inf}\ \mathcal{F}_s(x).$$

Крім цього, легко бачити, що $L\big(\mathcal{F}_s(x)\big) \subseteq L\big(f(x)\big)$. І справедливі такі співвідношення:

$$L\big(f(x)\big) \setminus L\big(\mathcal{F}_s(x)\big) \not\subset \Lambda - \underset{x \in X_\partial}{Inf}\ f(x), \quad L\big(f(x)\big) \setminus L\big(\mathcal{F}_s(x)\big) \not\subset \Lambda - Inf\, L\big(f(x)\big).$$

Таким чином маємо:

$$L\big(\mathcal{F}_s(x)\big) \cap \Lambda - \underset{x \in X_\partial}{Inf}\ \mathcal{F}_s(x) = L\big(f(x)\big) \cap \Lambda - \underset{x \in X_\partial}{Inf}\ f(x), \tag{8}$$

$$\Lambda - Inf\, L\big(f(x)\big) = \Lambda - Inf\, L\big(\mathcal{F}_s(x)\big). \tag{9}$$

Тоді із (8) і (9) випливає, що $\Lambda - \liminf_{u \to x} \mathcal{F}_s(u) = \Lambda - \liminf_{u \to x} f(u)$. Ураховуючи (7), одержимо необхідний висновок.

**Наслідок.** Справедливо включення $\mathcal{F}_s\Big(Sol\big(X_\partial, \mathcal{F}_s, \Lambda\big)\Big) \subseteq \Lambda - \underset{u \in X_\partial}{Inf}\ f(u)$.

**Означення 10.** Будемо називати $x^* \in X_\partial$ узагальненим розв'язком задачі (1), якщо існує послідовність $\{x_n\} \subset X_\partial$ така, що

$$\{x_n\} \to x^* \text{ і } \{f(x_n)\} \to y^* \in \Lambda - \underset{x \in X_\partial}{Inf}\ f(x).$$

Через $Gen\ Sol(X_\partial, f, \Lambda)$ будемо позначати множину всіх узагальнених розв'язків задачі (1).

Факт, сформульований у наслідку з твердження 3, означає, що розв'язками задачі $\langle X_\partial, \mathcal{F}_s, \Lambda \rangle$ будуть узагальнені розв'язкі задачі $\langle X_\partial, f, \Lambda \rangle$.

**Теорема 3.** *Точка $\omega^*$ належить множині розв'язків задачі $\langle X_\partial, f, \Lambda \rangle$ тоді і тільки тоді коли $\omega^*$ належить множині розв'язків її $\Lambda_s$ – задачі $\langle X_\partial, \mathcal{F}_s, \Lambda \rangle$ і до того ж $f\big(\omega^*\big) = \mathcal{F}_s\big(\omega^*\big)$, або більш скорочено:*

$$\omega^* \in Sol(X_\partial, f, \Lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \omega^* \in Sol\left(X_\partial, \mathfrak{F}_s, \Lambda\right), \\ f\left(\omega^*\right) = \mathfrak{F}_s\left(\omega^*\right). \end{cases}$$

**Доведення.** Нехай $\omega^* \in Sol(X_\partial, f, \Lambda)$, тоді $f\left(\omega^*\right) \in \Lambda - \underset{u \in X_\partial}{Inf}\ f(u)$ і не існує $y \in cl\ f(X_\partial)$ такого, що $y < f\left(\omega^*\right)$. Згідно з означенням 11, маємо: $f\left(\omega^*\right) = \mathfrak{F}_s\left(\omega^*\right)$. Ураховуючи той факт, що $cl\ \mathfrak{F}_s(X_\partial) \subseteq cl\ f(X_\partial)$, одержимо $\omega^* \in Sol\left(X_\partial, \mathfrak{F}_s, \Lambda\right)$.

Нехай $\omega^* \in Sol\left(X_\partial, \mathfrak{F}_s, \Lambda\right)$ і $f\left(\omega^*\right) = \mathfrak{F}_s\left(\omega^*\right)$. Згідно з наслідком з твердження 3, $\mathfrak{F}_s\left(\omega^*\right) \in \Lambda - \underset{u \in X_\partial}{Inf}\ f(u)$, що в нашому випадку еквівалентно $f\left(\omega^*\right) \in \Lambda - \underset{u \in X_\partial}{Inf}\ f(u)$. Тобто $\omega^* \in Sol(X_\partial, f, \Lambda)$.

**Наслідок.** Справедливо включення: $Sol(X_\partial, f, \Lambda) \subseteq Sol\left(X_\partial, \mathfrak{F}_s, \Lambda\right)$.

Отже, згідно з означенням 5, у випадку коли $X_\partial$ непуста слабко замкнена підмножина простору $X$, задача $\left\langle X_\partial, \mathfrak{F}_s, \Lambda\right\rangle$ є регуляризацію задачі $\langle X_\partial, f, \Lambda\rangle$.

## Бібліографічні посилання


1. **Borwein J. M., Penot J. P., Thera M.** Conjugate Convex Operators.// Math. Anal. and Applic.-1984. 102, P. 399-414.
2. **Ehrgott M.** Multicriteria optimization. Springer. Berlin. 2005.302 c.
3. **Когут П. І.** Про топологічну збіжність над графіків у частково впорядкованих векторних просторах. // Математичні студії.-1999-Т12, №2. С.161-170.
4. **Красносельский М. А.** Положительные решения операторных уравнений.-М.,1962. 396 с.
5. **Mansour M., Metrane A., Thera M.** Lower Semicontinuous Regularization for Vector-valued Mappings. Universite de Limoges, Rapport de recherché n 2004-06. Depose le juin 2004.
6. **Penot J. P., Thera M.** Semi-continuous Mappings in General Topology. Arch.Math., 1982. Vol.38, P. 158-166.



*Надійшла до редакції 15.01.08.*