УДК 517.5

В. Г. Доронін, А. О. Лигун

Дніпропетровський національний університет

ПОВЕДІНКА ТОЧНИХ КОНСТАНТ У НЕРІВНОСТЯХ ТИПУ ДЖЕКСОНА

Проведено дослідження поведінки точних констант у нерівностях типу Джексона у просторі L_p.

Нехай $L_p(1 \le p \le \infty)$ – простір 2π-періодичних вимірних функцій f з скінченною нормою:

$$\|f\|_p = \left\{ \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right\}^{1/p}, \quad \|f\|_\infty = \sup \operatorname{vrai} |f(t)|.$$

Як завжди, нехай

$$E(f; \Im)_p := \inf \left\{ \|f - \varphi\|_p \mid \varphi \in \Im \right\}$$

– найкраще наближення функції $f \in L_p$ множиною $\Im \subset L_p$ у просторі L_p, зокрема, будемо писати:

$$E(f)_p := E(f; \mathbf{R}^1)_p ;$$

$$E(\Re; \Im)_p := \sup\{E(f; \Im)_p \mid f \in \Re\}$$

– найкраще наближення множини $\Re$ множиною $\Im$ в просторі L_p.

Позначимо:

$f_{\delta m}$ – функція В. Стєклова порядку m з кроком δ від функції f:

$$f_{\delta 0} := f, \quad f_{\delta m}(t) := \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta/2}^{t+\delta/2} f_{\delta(m-1)}(u)\, du ;$$

$f^{(-r)}$ – r-й 2π-періодичний інтеграл, який має нульове середньє значення на періоді, від функції $f \in L_1$, яка має нульове середньє значення на періоді $(f \perp 1)$;

L_p^r $(r = 1, 2, ...)$ – множина всіх r-х 2π-періодичних інтегралів, від функцій $f \in L_p$, таких що $f \perp 1$;

$$W_p^r := \left\{ \varphi \mid \varphi \in L_p^r, \ \|\varphi^{(r)}\|_p \le 1 \right\};$$

$$W_p^{r,*} := \left\{ \varphi \mid \varphi \in L_p^r, \ E(\varphi^{(r)})_p \le 1 \right\} \ \left(W_p^r \subset W_p^{r,*}\right).$$

Нехай $\aleph_{r,m}(\Im; \delta)_{p,q}$ – найменша константа $\aleph$ у нерівності типу Джексона

$$E(f; \Im)_p \le \aleph\, \omega_m(f^{(r)}; \delta)_q,$$

де

$$\omega_m(f;t)_q := \sup\left\{ \left\| \Delta_\eta^m f(\cdot) \right\|_q \;\middle|\; |\eta| \le t \right\}$$

— інтегральний модуль гладкості функції f порядку m, а $\Delta_\eta^m f(x)$ – різниця порядку m функції f у точці x з кроком η.

Зрозуміло, що

$$\aleph_{r,m}(\mathfrak{I};\delta)_{p,q} = \sup\left\{ \frac{E(f,\mathfrak{I})_p}{\omega_m\left(f^{(r)};\delta\right)_q} \;\middle|\; f \in L_q^r, f \ne \mathrm{const} \right\}. \tag{2}$$

Фундатором успішного розвитку теорії точних констант є М. П. Корнєйчук, який у просторі C неперервних 2π-періодичних функцій за наближення множиною $\mathbf{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів порядку $\le n-1$, довів [1], що для будь-якої $f \in C(f \ne \mathrm{const})$ виконується нерівність

$$E(f;\mathbf{T}_{2n-1})_\infty \le 1 \cdot \omega_1(f;\delta)_\infty, \quad \left(n = 1, 2, \ldots; \quad \delta \ge \frac{\pi}{n} \right), \tag{3}$$

в котрій константу 1 зменшити неможливо.

Величина $\aleph(\delta) := \aleph_{r,m}(\mathfrak{I};\delta)_{p,q}$ при зростанні δ спадає до деякої точки (оптимальної точки мінімальної константи) $\delta_0 = \delta_0(\mathfrak{I}, r, m, p, q)$, а далі, потрапляючи на свій глобальний мінімум, стабілізується

$$\aleph(\delta) = \aleph(\delta_0) \quad (\delta \ge \delta_0).$$

Установлена точна нерівність М. П. Корнійчука (3) дозволяє локалізувати оптимальну точку мінімальної константи

$$\frac{\pi}{2n} \le \delta_0 \le \frac{\pi}{n}$$

і при цьому

$$\aleph_{0,1}(\mathbf{T}_{2n-1};\delta)_{\infty,\infty} = 1 \quad (\delta \ge \delta_0).$$

Отримати точні константи у нерівностях типу Джексона на даний момент вдалося не багатьом авторам [1; 5; 6; 8; 11; 13; 15].

Оптимальну точку, наскільки нам відомо, знайдено лише в двох випадках [6; 7].

Надати вичерпну відповідь на питання, чому дорівнює точна константа $\aleph(\delta)$ при $\delta < \delta_0$, навряд чи можливо. Тому має сенс отримання таких нерівностей, з яких буде визначатися порядок зростання $\aleph(\delta)$ при $\delta \to 0$.

Такий підхід у кількох випадках уже надав позитивний результат [11; 12; 14]. У даній роботі ми проводжуємо дослідження цього напрямку.

Доволі загальний результат містить наступна

Теорема 1. *Нехай* $r = 1, 2, \ldots$, $1 \le p, q \le \infty$, $0 < \alpha, \beta < \infty$, $\delta > 0$ *і* $\Im$ – *підпростір простору* L_p, *який містить константи. Тоді справджуються такі співвідношення:*

$$E\ (f; \Im)_p \le \omega_1\left(f^{(r)}; \delta/2\right)_q A_{r,*}(\Im) + \left(\frac{1}{\delta}\right)\omega_1\left(f^{(r)}; \delta\right)_q A_{r+1}(\Im) \quad \left(f \in L_q^r\right). \tag{4}$$

Крім того,

$$\max\left\{\left(\frac{1}{2}\right)A_{r,*}(\Im), \left(\frac{1}{\delta}\right)A_{r+1}(\Im)\right\} \le \aleph_{r,1}^{\alpha,\beta}(\Im; \delta)_{p,q} \le A_{r,*}(\Im) + \left(\frac{1}{\delta}\right)A_{r+1}(\Im), \tag{5}$$

де

$$A_{r,*}(\Im) := E\ \left(W_q^{r,*}; \Im\right)_p, \quad A_{r+m}(\Im) := E\ \left(W_q^{r+m}; \Im\right)_p. \tag{6}$$

За умови $q = \infty$ цей результат, майже в такому ж вигляді був отриманий [11], а потім деякі його модифікації [12; 14].

Зазначимо, що в умовах теореми 1 для фіксованого підпростору $\Im$ при $\delta \to 0$

$$\aleph_{r,1}(\Im; \delta)_{p,q} \sim \left(\frac{1}{\delta}\right) A_{r+1}(\Im). \tag{7}$$

Крім того, зауважимо, якщо послідовність N-вимірних підпросторів $\Im_N$ така, що при $k = 1, 2$

$$\frac{E\ \left(W_q^{r+k}; \Im_N\right)_p}{E\ \left(W_q^{r}; \Im_N\right)_p} \asymp \left(\frac{1}{N}\right)^k (N \to \infty) \tag{8}$$

(для багатьох підпросторів відомо, що це так, наприклад, для підпросторів $\mathbf{T}_{2n-1}$, тригонометричних поліномів та сплайнів $S_{2n,r+\nu}$), тоді, користуючись тим простим фактом, що

$$E\ \left(W_q^{r}; \Im\right)_p \le E\ \left(W_q^{r,*}; \Im\right)_p \le 2E\ \left(W_q^{r}; \Im\right)_p,$$

за умови

$$\delta = \delta_N \asymp \left(\frac{1}{N}\right)(N \to \infty), \tag{9}$$

внаслідок теореми 1 маємо

$$\aleph_{r,1}(\Im_N; \delta_N)_{p,q} \underset{N\to\infty}{\asymp} E\ \left(W_q^{r}; \Im_N\right)_p. \tag{10}$$

Доведення. Для довільної функції $x \in L_q^r$ за теоремою двоїстості для найкращих наближень [8, с. 43; 3, с. 25], маємо

$$\begin{aligned} E\,(x;\mathfrak{I})_p &= \sup\left\{ \int_0^{2\pi} x(t)\,\varphi(t)\,dt \;\middle|\; \varphi \in L_{p'},\ \ \|\varphi\|_{p'} \le 1,\ \ \varphi \perp \mathfrak{I} \right\} = \\ &= \sup\left\{ \int_0^{2\pi} x^{(r)}(t)\,\varphi^{(-r)}(t)\,dt \;\middle|\; \varphi \in L_{p'},\ \ \|\varphi\|_{p'} \le 1,\ \ \varphi \perp \mathfrak{I} \right\} = \\ &= \sup\left\{ \int_0^{2\pi} x^{(r)}(t)\,\varphi''(t)\,dt \;\middle|\; \psi \in W_{p'}^{r+2},\ \ \psi^{(r+2)} \perp \mathfrak{I} \right\} = \\ &= \sup\left\{ \int_0^{2\pi} f(t)\,\psi''(t)\,dt \;\middle|\; \psi \in W_{p'}^{r+2},\ \ \psi^{(r+2)} \perp \mathfrak{I} \right\}, \end{aligned} \tag{11}$$

де позначено $f = x^{(r)}$, $\varphi = \psi^{(r+2)}$.

Будемо користуватися оцінками:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f \cdot \psi''\,dt &= \int_0^{2\pi} (f - f_\delta)\cdot \psi''\,dt + \int_0^{2\pi} f_\delta \cdot \psi''\,dt \le \\ &\le \|f - f_\delta\|_q\,\|\psi''\|_{q'} + \int_0^{2\pi} f_\delta' \cdot \psi'\,dt. \end{aligned} \tag{12}$$

Внаслідок того, що при будь-якому $\lambda \in \mathbf{R}^1$

$$\int_0^{2\pi} f_\delta' \cdot \psi'\,dt = \int_0^{2\pi} f_\delta'\,(\psi' - \lambda)\,dt \le \|f_\delta'\|_q\,\|\psi' - \lambda\|_{q'},$$

отримаємо

$$\int_0^{2\pi} f_\delta' \cdot \psi'\,dt \le \|f_\delta'\|_q\,E(\psi')_{q'}. \tag{13}$$

Відомі [2, с. 178; 4, с. 178] наступні оцінки для норм, які містять функції Стєклова:

$$\begin{cases} \|f - f_\delta\|_q \le \omega_1(f;\delta/2)_q, \\ \|f_\delta'\|_q \le \left(\dfrac{1}{\delta}\right)\omega_1(f;\delta)_q. \end{cases} \tag{14}$$

Із співвідношення (10), застосувавши до нього спочатку оцінки (12), (13) а потім (14), виводимо, що справджується нерівність

$$E\left(x;\Im\right)_p \le$$

$$\le \sup\left\{\omega_1\left(x^{(r)};\delta/2\right)_q \left\|\psi''\right\|_{q'} + \left(\frac{1}{\delta}\right)\omega_1\left(x^{(r)};\delta\right)_q E\left(\psi'\right)_{q'} \,\middle|\, \psi\in W_{p'}^{r+2},\ \psi^{(r+2)}\perp\Im\right\}. \tag{15}$$

Використовуючи відоме екстремальне співвідношення [2, с. 301], а потім теорему двоїстості для найкращих наближень [8, с. 43], запишемо наступний ланцюжок рівностей:

$$A_r := \sup\left\{\left\|\psi''\right\|_{q'} \;\middle|\; \psi\in W_{p'}^{r+2},\quad \psi^{(r+2)}\perp\Im\right\} =$$

$$= \sup\left\{ \sup\left\{ \int_0^{2\pi}\psi''(t)\,\theta(t)\,dt \;\middle|\; \left\|\theta(\cdot)\right\|_q \le 1\right\} \;\middle|\; \psi\in W_{p'}^{r+2},\quad \psi^{(r+2)}\perp\Im\right\} =$$

$$= \sup\left\{ \sup\left\{ \int_0^{2\pi}\psi''(t)\,\left[\theta(t)-\lambda\right]dt \;\middle|\; \left\|\theta(\cdot)\right\|_q \le 1\right\} \;\middle|\; \psi\in W_{p'}^{r+2},\quad \psi^{(r+2)}\perp\Im\right\} =$$

$$= \sup\left\{ \sup\left\{ \int_0^{2\pi}\left[\theta(t)-\lambda\right]^{(-r)}\psi^{(r+2)}(t)dt \;\middle|\; \psi\in W_{p'}^{r+2},\quad \psi^{(r+2)}\perp\Im\right\} \;\middle|\; \left\|\theta(\cdot)\right\|_q \le 1\right\} =$$

$$= \sup\left\{E\ \left(\left[\theta(t)-\lambda\right]^{(-r)};\Im\right)_p \;\middle|\; \left\|\theta\right\|_q \le 1\right\} =$$

$$= \sup\left\{E\ \left(y;\Im\right)_p \;\middle|\; y\in\Re\right\}, \tag{16}$$

де константу λ вибрано так, що $\left[\theta(t)-\lambda\right]\perp 1$ і покладено

$$y = \left[\theta(t)-\lambda\right]^{(-r)},\quad \Re = \left\{y \mid y\in L_q^r;\ \left\|y^{(r)}+\lambda\right\|_q \le 1\right\}.$$

Якщо $y\in\Re$, тоді

$$E\left(y^{(r)}\right)_q \le \left\|y^{(r)}+\lambda\right\| \le 1.$$

Отже, $\Re\subset W_q^{r,*}$. З врахуванням цього із (16) випливає, що

$$A_r \le E\ \left(W_q^{r,*};\Im\right)_p = A_{r,*}(\Im). \tag{17}$$

Теорема двоїстості для найкращих наближень [8, с. 43], а потім знову ця теорема, дозволяє переконатися в тому, що

$$\sup\left\{E\left(\psi^{(1)}\right)_{q'} \;\middle|\; \psi\in W_{p'}^{r+2},\quad \psi^{(r+2)}\perp\Im\right\} =$$

$$= \sup\left\{ \sup\left\{ \int_0^{2\pi}\psi^{(1)}\cdot f\,dt \;\middle|\; \left\|f\right\|_q \le 1,\quad f\perp 1\right\} \;\middle|\; \psi\in W_{p'}^{r+2},\quad \psi^{(r+2)}\perp\Im\right\} =$$

$$= \sup\left\{ \sup\left\{ \int_0^{2\pi}\psi^{(r+2)}\cdot f^{(-(r+1))}\,dt \;\middle|\; \psi\in W_{p'}^{r+2},\quad \psi^{(r+2)}\perp\Im\right\} \;\middle|\; \left\|f\right\|_q \le 1,\quad f\perp 1\right\} =$$

$$= \sup\left\{ E\ \left(f^{(-(r+1))}; \wp\right)_p \ \mid\ \|f\|_q \le 1,\ \ f \perp 1 \right\} =$$

$$= \sup\left\{ E\ (\varphi; \Im)_p \ \mid\ \left\|\varphi^{(r+1)}\right\|_q \le 1,\ \ \varphi^{(r+1)} \perp 1 \right\} =$$

$$= \sup\left\{ E\ (\varphi; \Im)_p \ \mid\ \varphi \in W_q^{r+1} \right\} = E\ \left(W_q^{r+1}; \Im\right)_p = A_{r+1}(\Im). \tag{18}$$

Із оцінки (15), застосувавши до неї нерівність (17) та нерівність (18), отримуємо оцінку (4).

Внаслідок (2) із (4) випливає, що

$$\aleph_{r,1}(\Im; \delta)_{p,q} \le A_{r,*}(\Im) + \left(\frac{1}{\delta}\right) A_{r+1}(\Im) \tag{19}$$

і таким чином, у твердженні (5), регламентованному теоремою 1, оцінка зверху точної константи – доведена.

отже у твердженні (6) теореми 1 оцінка зверху точної константи — доведена.

Щоб отримати потрібні оцінки знизу, спочатку відмітимо, що

$$A_{r+1}(\Im) = \sup\left\{ \frac{E\ (x; \Im)_p}{\left\|x^{(r+1)}\right\|_q} \ \mid\ x \in L^{r+1},\ \ x \ne \text{const} \right\}. \tag{20}$$

Крім того, із відомої в теорії скінченних різниць нерівності

$$\left\| \Delta_\delta^m f(\cdot) \right\|_q \le \delta^m \left\|f^{(m)}\right\|_q \quad \left(f \in L_q^m\right)$$

випливає, що

$$\omega_m \left(f^{(r)}; \delta\right)_q \le \delta^m \left\|f^{(r+m)}\right\|_q \quad \left(f \in L_q^{r+m}\right). \tag{21}$$

Із співвідношення (20), на підставі нерівності (21), отримаємо що

$$A_{r+1}(\Im) \le \delta\ \sup\left\{ \frac{E\ (x; \Im)_p}{\omega_1\left(x^{(r)}; \delta\right)_q} \ \mid\ x \in L_q^{r+1},\ \ x \ne \text{const} \right\} \le$$

$$\le \delta\ \aleph_{r,1}(\Im; \delta)_{p,q}.$$

Отже, справедлива оцінка:

$$\left(\frac{1}{\delta}\right) A_{r+1}(\Im) \le \aleph_{r,1}(\Im; \delta)_{p,q}. \tag{22}$$

Подібно попередньому, беручи до уваги, по-перше, що

$$A_{r,*}(\Im) = \sup\left\{ \frac{E\ (x; \Im)_p}{E\left(x^{(r)}\right)_q} \ \mid\ x \in L_q^r,\ \ x \ne \text{const} \right\}, \tag{23}$$

а, по-друге, що для будь-яких $x \in L_q^r$, $m = 1, 2, \ldots$, $\delta > 0$

$$\omega_m\left(x^{(r)}; \delta\right)_q \leq 2^m E\left(x^{(r)}\right)_q, \tag{24}$$

із (27), (28) виводимо наступну нерівність

$$\left(\frac{1}{2}\right)^m A_{r,*}(\mathfrak{I}) \leq \aleph_{r,m}(\mathfrak{I}; \delta)_{p,q}. \tag{25}$$

Оцінка зверху (19) разом з оцінками знизу (22) та (25) при $m = 1$ дають твердження (5) теореми 1. Теорема 1 доведена.

Бібліографічні посилання

1. **Корнейчук Н.П.** Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 145, № 3. – С. 514 – 515.
2. **Корнейчук Н.П.** Экстремальные задачи теории приближения. – М., 1976. –320 с.
3. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения. – М., 1987. – 423 с.
4. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. – М., 1960. – 624 с.
5. **Черных Н. И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. мат. ин-та АН СССР. – 1967. – Т. 88. – С. 71 – 74.
6. **Черных Н.И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. – 1967. – Т. 2, № 5. – С. 513 – 522.
7. **Гаврилюк В.Т.** Приближение непрерывных периодических функций суммами Рогозинского и суммами Фурье. // Вопросы теор. прибл. функ. и ее прилож. – К., – 1976. – С. 46 – 60.
8. **Н.П. Корнейчук, А.А. Лигун , В.Г. Доронин** Аппроксимация с ограничениями. – К., 1982, – 250 с.
9. **Бабенко В.Ф.** Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций // Укр. мат. журн. – 1982. – Т. 34, № 4. – С. 409 – 416.
10. **Бабенко В.Ф.** Несимметричные экстремальные задачи теории приближения // ДАН СССР. – 1983. – Т.269, № 3. – С. 521 – 524.
11. **Лигун А.А.** Специальные вопросы теории приближений. – К., – 1990. – 74 с.
12. **Доронин В.Г.** О порядке роста точных констант в неравенствах типа Джексона для наилучших односторонних приближений // Межд. конф.: Калуга: Теория прибл., тезисы докл. – 1996. – С. 90 – 91.
13. **Ligun A.A**. Jackson's type inequalities // East J. Apprx. – 1996. – Vol. 2, № 2. – P. 235 – 244.
14. **Доронін В.Г.** Про порядок зростання точних констант у нерівностях типу Джексона для найкращих (α, β)-наближень // II Міжн. школа: Ряди Фур'є: Тези доп., – К., – 1997. – С. 47 – 48.
15. **Бабенко А.Г.** Прямые теоремы теории приближения в L_2 и родственные экстремальные задачи для положительно определенных функций // Дис. доктора физ.-мат. наук. – Екатеринбург, 2004, – 268 с.

Надійшла до редколегії 09.01.08