УДК 517, 681.31

А.В. Довженко, П.І. Когут
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

КВАЗІ-НАПІВНЕПЕРЕРВНА ЗНИЗУ РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ВІДОБРАЖЕНЬ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Запропоновано спосіб квазі-напівнеперервної знизу регуляризації відображень у банахових просторах.

Вступ. Добре відомим фактом теорії варіаційного числення є можливість побудови для довільної дійснозначної функції $f:E\to\overline{\mathbb{R}}$ її напівнеперервної знизу регуляризації виходячи з правила

$$\overline{f}(x)=\liminf_{y\to x} f(y). \tag{1}$$

Проте у випадку, коли $f:E\to F$ є відображенням, де F є частково впорядкований нормований простір, властивість напівнеперервності можна означити в декількох, загалом, незалежних варіантах. Зокрема, це напівнеперервність знизу за конусом, квазі-напівнеперервність знизу, порядкова напівнеперервність та інші [1,4,8]. Кожна з таких характеристик, відіграє вагому роль у питаннях розв'язності відповідних задач векторної оптимізації. У зв'язку з цим є актуальною проблема резуляризації векторнозначних відображень. Оскільки операція $\liminf_{y\to x} f(y)$ в частково впорядкованих просторах є множиннозначною, то залучення правила (1) до їхньої резуляризації є неможливим.

Ця проблема була частково розв'язана в [6], де авторами запропонована схема напівнеперервної знизу регуляризації векторнозначних відображень, яка опирається на поняття границі послідовності множин за Пеневле-Куратовським, та є зручною для практичного застосування. Проте властивість напівнеперервності знизу є досить обмежливим припущенням у задачах нескалярної оптимізації [1,2,5]. Більш загальним класом відображень, залучення яких є коректним у задачах оптимізації, є квазі-напівнеперервні знизу відображення. Проблема їхньої регуляризації розглядалася в [7]. Проте, попри теоретичу простоту методу викладеного в [7], його практичне застосування є досить обмежливим. У зв'язку з цим метою даної роботи є дослідження проблеми квазі-напівнеперервної знизу регуляризації відображень $f:E\to F$, яка б була простою у застосуванні, та її порівняльний аналіз з напівнеперервним випадком.

Основні поняття та попередні результати. Нехай всюди далі E та F– дійснозначні векторні нормовані простори. Для довільної підмножини A в F через $\operatorname{int} A$ та $\operatorname{cl} A$ будемо позначати відповідно її внутрішність та замикання відносно топології індукованої нормою. Нехай у просторі F задано частковий порядок, який породжено замкненим загостреним конусом $\Lambda\subset F$, тобто

$y_1 \le_\Lambda y_2 \Leftrightarrow y_2 \in y_1 + \Lambda$, де вважається, що $\Lambda \cap -\Lambda = \{0\}$. Позначимо через $F^\bullet$ розширення простору F невласним елементом $+\infty$, який назвемо *найбільшим елементом* простору F за конусом Λ. Насправді $+\infty$ є класом еквівалентності, який включає до себе всі граничні точки послідовностей $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$, які задовольняють умови:

(i) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ не обмежені за нормою простору,

(ii) $\forall b \in F \exists n_0 : b \not\ge_\Lambda f_n, \forall n > n_0$.

Надалі будемо казати, що підмножина $A \subset F$ є напрямленою за конусом Λ, якщо для будь-яких $a, b \in A$ існує елемент $c \in A$ такий, що $a \le_\Lambda c, b \le_\Lambda c$.

Елемент $y^* \in Y$ називають Λ-*мінімальним* на множині $Y \subset F$, якщо не існує жодного $y \in Y$ такого, що $y \le_\Lambda y^*, y \ne y^*$, тобто $Y \cap (y^* - \Lambda) = \{y^*\}$. Елемент $\hat{y} \in Y \subset F$ називається Λ-найменшим елементом (або Λ-ідеальним мінімумом) множини Y, якщо $\hat{y} \le_\Lambda y$, для всіх $y \in Y$. Далі будемо позначати його як $\hat{y} = \Lambda - \mathrm{IMin}\, Y$. Як випливає з наведеного означення, якщо для деякої множини $Y \subset F$ існує Λ-ідеальний мінімум, то він єдиний.

Нехай для певної множини A в F існує елемент $a \in F$ такий, що: 1) $a \ge_\Lambda b, \forall b \in A$; 2) $a \le_\Lambda c$ для $c \in F$, тоді і тільки тоді, коли $b \le_\Lambda c, \forall b \in A$. Тоді цей елемент називають *найменшою верхньою гранню* множини A за конусом Λ і позначають як $\sup A$. Аналогічним чином визначається найбільша нижня грань $\inf A$ множини A. Простір F називають *векторною решіткою* (ВР), якщо для будь-якої пари $a, b \in F$ існують $\sup\{a, b\}$ та $\inf\{a, b\}$. Якщо ж будь-яка обмежена підмножина простору F має найменшу верхню та найбільшу нижню грані, то F називають K-простором, або повною нормованою векторною решіткою.

Нагадаємо також поняття нижньої границі послідовності множин $\{A_n\} \subset F$ у сенсі Пенлеве-Куратовського. Кажуть, що $A \subset F$ є нижньою границею послідовності множин $\{A_n\}$ у сенсі Пеневле-Куратовського відносно τ-топології, якщо $A \subset \tau - \liminf_n A_n$, де

$$\tau - \liminf_n A_n = \left\{ y \in F : y = \tau - \lim_n y_n, \exists n_0 : y_n \in A_n, \forall n \ge n_0 \right\}.$$

Квазі- та напівнеперервні знизу відображення. Метою даного пункту є порівняльний аналіз класів напівнеперервних знизу (нн. зн.) та квазі-напівнеперервних знизу (кв.-нн. зн) відображень $f : E \to F^\bullet$, що діють у парі нормованих просторів. Надалі вважатимемо, що базовою топологією простору E є топологія, індукована його нормою. Припускається, що F є топологічно двоїстим простором $F = V^*$ до повного нормованого (не обов'язково рефлексивного) сепарабельного простору V. Отже, за теоремою Банаха-Алаоглу, будь-яка обмежена послідовність в F є відносно компактною в

*-слабкій топології. Нагадаємо, що *-слабкою топологією на V^* називають локально опуклу топологію $\sigma(V^*, V)$ в якій лінійні функціонали $y \in V^*, y \mapsto \langle y, v \rangle_{V^*;V}$ неперервні. Тому надалі вважатимемо, що F є топологічним простором $\langle F, \sigma(F, V) \rangle$.

Як відомо, у векторнозначному випадку існує декілька можливих шляхів для узагальнення класичного поняття напівнеперервності знизу скалярнозначних відображень $f : E \to \mathbb{R}$. До найбільш відомих, можна віднести наступні:

Означення 1. [8] Відображення $f : E \to F^{\bullet}$ називається нн. зн. в точці $x_0 \in \underset{x \in E}{\mathrm{Dom}} f := \{x \in E \mid f(x) <_{\Lambda} +\infty\}$ якщо для будь-якого околу нуля ϑ у F існує окіл $\mathfrak{A} \in E$ точки x_0 такий, що $f(\mathfrak{A}) \subset f(x_0) + \vartheta + \Lambda \cup \{+\infty\}$.

Означення 2. [3] Відображення $f : E \to F^{\bullet}$ називається кв.-нн. зн. в точці $x_0 \in \underset{x \in E}{\mathrm{Dom}} f$, якщо для будь-якого елемента $b \in F$, такого, що $b \not\geq_{\Lambda} f(x_0)$, існує окіл $\mathfrak{A} \in E$ точки x_0 такий, що $b \not\geq_{\Lambda} f(x)$, для будь-якого $x \in \mathfrak{A}$.

Відображення $f : E \to F^{\bullet}$ називають (квазі-)нн. зн. на множині E, якщо воно є (квазі-) нн. зн. в кожній точці цієї множини. Оскільки *-слабка топологія є метризованою в F, то наведені вище означення можна подати у секвенційній формі.

Означення 3. [6]Відображення $f : E \to F^{\bullet}$ є нн. зн. в точці x_0 у тому і тільки тому разі, коли для будь-якої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$, що збігається до x_0, існує послідовність $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in F$, що $\sigma(F, V)$–збігається до $f(x_0)$ така, що $b_n \leq_{\Lambda} f(x_n)$.

Означення 4. Відображення $f : E \to F^{\bullet}$ є кв.-нн. зн. в x_0 тоді і тільки тоді, коли для будь-якої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$, що збігається до x_0, та для будь-якого елемента $b \in F$, такого, що $b \not\geq f(x_0)$, існує число $\hat{n} \in \mathbb{N}$ таке, що $b \not\geq_{\Lambda} f(x_n)$ при всіх $n \geq \hat{n}$.

Означення 5. Відображення $f : E \to F^{\bullet}$ є нн. зн. в x_0 тоді і тільки тоді, коли для будь-якої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$, що збігається до x_0, та для будь-якого околу нуля ϑ в $\langle F, \sigma(F, V) \rangle$ існує число $\hat{n} \in \mathbb{N}$ таке, що

$f(x_n) \subset f(x_0) + \vartheta + \Lambda \cup \{+\infty\}$ для всіх $n \geq \hat{n}$.

Як показано в [3], у випадку, коли E та F є банаховими просторами, а F напівупорядковано $\sigma(F, V)$–замкненим загостреним конусом Λ, то для довільного відображення $f : E \to F^{\bullet}$ з його напівнеперервності знизу випливає властивість його квазі-напівнеперервності знизу. Наступний приклад ілюструє, що замкнутість конуса є суттєвим обмеженням.

Приклад 1. Розглянемо відображення $f:[1,3]\to\mathbb{R}^2$ де

$$f(x)=\begin{cases}(x,2), & \text{якщо } x\in[1,2)\\ (x,1), & \text{якщо } x\in[2,3]\end{cases},$$

а простір $\mathbb{R}^2$ напіввпорядкований незамкненим загостреним конусом $\Lambda=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1>0, x_2>0\right\}\cup(0,0)$. Тоді, як легко бачити, відображення f буде нн. зн. в точці $x_0=2$, проте не буде кв.-нн. зн. в цій точці.

Для того, щоб отримати умови, які б гарантували справедливість оберненої імплікації «квазі-нн. зн.$\Rightarrow$ нн. зн.», наведемо деякі додаткові поняття.

Нехай $\left\{y_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ – довільна послідовність у F. Позначимо через $L\left\{y_k\right\}$ – множину всіх її $\sigma(F,V)$–кластерних точок, тобто $y\in L\left\{y_k\right\}$, якщо знайдеться підпослідовність $\left\{y_{k_i}\right\}_{i=1}^{\infty}\subset\left\{y_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ така, що $y_{k_i}\xrightarrow{*}y$ у F при $i\to\infty$. Нехай $f:E\to F^{\bullet}$ – довільне відображення, $x_0\in E$ довільний елемент його області визначення. Покладемо $L(f(x_0))=\bigcup\limits_{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\to x_0} L(f(x_n))$, де операція об'єднання розглядається на множині всіх послідовностей $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}\subset E$ таких, що $x_n\to x_0$ сильно в E. Характерною рисою квазі-нн. зн. відображень є наступний результат:

Лема 1. [2] Якщо відображення $f:E\to F^{\bullet}$ є кв.-нн. зн. в точці $x_0\in E$, то $f(x_0)$ є Λ-найменшим елементом множини $L(f(x_0))$, тобто

$$f(x_0)=\Lambda-\mathrm{IMin}\,L(f(x_0)).$$

Тепер установимо справедливість наступного результату.

Теорема 1. *Нехай F напівупорядковано $\sigma(F,V)$-замкненим загостреним конусом Λ. Якщо відображення $f:E\to F^{\bullet}$ є локально обмеженим, то з кв.-нн. зн. f в точці x_0 випливає його нн. зн. в цій точці.*

Доведення. Покажемо, що для будь-якого околу нуля ϑ в топологічному просторі $\left\langle F,\sigma(F,V)\right\rangle$ знайдеться окіл точки x_0: $\mathfrak{A}(x_0)\subset E$ такий, що

$$f(\mathfrak{A}(x_0))\subset f(x_0)+\vartheta+\Lambda\cup\{+\infty\}. \tag{2}$$

Припустимо обернене, а саме нехай існує окіл ϑ такий, що $\forall\mathfrak{A}(x_0)\subset E$ знайдеться елемент $\overline{x}\in\mathfrak{A}(x_0)$ на якому

$$f(\overline{x})\notin f(x_0)+\vartheta+\Lambda\cup\{+\infty\}. \tag{3}$$

Отже існує послідовність $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}\in E$ така, що $x_n\to x_0$ і при цьому $f(\overline{x}_n)\notin f(x_0)+\vartheta+\Lambda\cup\{+\infty\}\quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Оскільки відображення f є локально обмеженим, то існує підпослідовність $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ така, що $\left\{f(x_{n_k})\right\} \xrightarrow{*} f^* \in F$, $\left\|f^*\right\|_F < +\infty$.

З того, що f кв.-нн. зн. в точці x_0, за лемою 1, маємо: $f(x_0) = \Lambda - \mathrm{IMin}\, L(f(x_0))$. Отже, $f^* \in f(x_0) + \Lambda$. Проте, в цьому випадку для будь-якого околу нуля $\vartheta \in F$, справедливе включення
$f^* + \vartheta \subset f(x_0) + \vartheta + \Lambda \cup \{+\infty\}$.

Отже, з того, що послідовність $\left\{f(x_{n_k})\right\}_{k=1}^{\infty}$ $\sigma(F,V)$-збігається до f^* отримаємо: $\forall \vartheta \in \langle F, \sigma(F,V)\rangle$ знайдеться число $\overline{k} \in \mathbb{N}$,при якому
$f(x_{n_k}) \in f(x_0) + \vartheta + \Lambda \cup \{+\infty\} \quad \forall k > \overline{k}$,
що, у свою чергу, суперечить співвідношенню (2). Отже припущення (3) є хибним, тому відображення f є нн. зн. в точці x_0. Теорема доведена.

Наслідок 1. За умов теореми 1 поняття напівнеперервності знизу та квазі-напівнеперервності знизу співпадають.

Як показує наступний приклад, умова локальної обмеженості відображення f у теоремі 1 є суттєвою.

Приклад 2. Нехай $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, де $g(x) = \begin{cases} (0,0), & \text{якщо } x = 0 \\ \left(-1, \dfrac{1}{|x|}\right), & \text{в іншому випадку} \end{cases}$,

а простір $\mathbb{R}^2$ напівупорядкований конусом невід'ємних елементів Λ:
$\Lambda = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\right\}$.

Легко бачити, що в точці $(0,0)$ умова нн. зн. не виконується, в той час як відображення g залишається квазі-нн. зн. в усіх точках простору $\mathbb{R}$.

Покажемо також, що суттєвою в теоремі 1 є умова, яка накладається на простір F, а саме, що існує банахів сепарабельний простір V до якого F є топологічно двоїстим, що породжує *-слабку топологію в F.

Приклад 3. Нехай банахів простір $F = L^1(-1,1)$ з сильною топологією напіввпорядковано конусом невід. ел. $\Lambda := \left\{ f(t) \in L^1(-1,1) \mid f(t) \overset{\text{м.с.}}{\ge} 0 \text{ в } (-1,1) \right\}$.

Розглянемо відображення $h : [-1,1] \to L^1(-1,1)$, означене як

$$h(x) = \begin{cases} 1 + |x|, & x \ne 1/n, n \in \mathbb{N} \\ u_n(t), & x = 1/n, n \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad \text{де} \quad u_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & t \in [-1, -1/n) \cup (1/n, 1], n \in \mathbb{N} \\ n, & t \in [-1/n, 1/n], n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Неважко переконатися, що відображення h обмежене за нормою простору $L^1(-1,1)$, а тому є локально обмеженим: $\|h(x)\| \le 3, x = \frac{1}{n}; \|h(x)\| \le 4, x \ne \frac{1}{n}$.

Покажемо, що відображення h є кв.-нн. зн. в точці $x_0 = 0$, тобто для будь-якої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in E = [-1,1]$, що збігається до $x_0 = 0$, та для будь-якого елемента $b(t) \in F$, такого, що $b \not\geq_\Lambda h(x_0) := 1, t \in (-1,1)$, існує число $\hat{n} \in \mathbb{N}$ таке, що $b \not\geq_\Lambda h(x_n)$ для будь-якого $n \ge \hat{n}$. У даному випадку маємо дві характерні послідовності, які збігаються до точки $x_0 = 0$:

(i) $\{x_n\}_n \ne \{\frac{1}{n}\}_n$, тоді $h(x_n) = 1 + |x_n| \xrightarrow{x_n \to 0} 1 = h(0)$ за нормою простору $L^1(-1,1)$;

(ii) $\{x_n\}_n = \{\frac{1}{n}\}_n$, тоді який би елемент $b \in L^1(-1,1)$ не обрати, знайдеться номер $\hat{n}$ такий, що
$$h(x_n)(t) = n > b(t) + 1, \text{ для } t \in [-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}], \forall n \ge \hat{n}. \quad (4)$$

Оскільки Лебегова міра множини $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ для довільного n строго більше нуля, то $b \not\geq_\Lambda h(x_n), \forall n \ge \hat{n}$. Отже, відображення h є кв.-нн. зн. в точці $x_0 = 0$. Проте h не є нн. зн. відображенням. Дійсно, візьмемо за окіл нуля наступну множину $\vartheta : \left\{\|v\|_{L^1(-1,1)} \le \frac{1}{8}\right\}$. Тоді для послідовності $x_n = \frac{1}{n}$, що збігається до $x_0 = 0$, маємо:

$h(x_n) = u_n(t) \notin 1 + \vartheta + \Lambda \cup \{+\infty\}, \forall n \ge 2,$ бо $u_n(t) = \frac{1}{2}$ на $(-1, -\frac{1}{n}) \cup (\frac{1}{n}, 1)$, у той час коли $h(0) = 1$.

Геометричний зміст кв.-нн. знизу. Для подальшого аналізу властивості квазі-напівнеперервності знизу наведемо ряд допоміжних понять. Зауважимо, що надалі ми будемо розглядати лише загострені і замкнуті відносно топології простору F конуси.

Означення 6. Нехай $f : E \to F^\bullet$ – задане відображення і послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$ є такою, що $x_n \to x_0$ в E. Будемо казати, що $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Λ_f – збігається до $x_0 \in E$ і позначати цей факт, як $x_n \xrightarrow{\Lambda_f} x_0$, $n \to +\infty$, якщо виконується одна з двох умов:

(i) послідовність $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена за нормою у просторі F;

(ii) послідовність $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ не обмежена за нормою простору F, проте існують такі $\hat{n} \in \mathbb{N}$ та елемент $b \in F$ такі, що $f(x_n) \le_\Lambda b, \forall n \ge \hat{n}$.

Зрозуміло, що будь-яка стаціонарна послідовність власних точок відображення f є Λ_f-збіжною.

Означення 7. Для довільних $f:E \to F^\bullet$ та $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ множину $A_{x_0}^f = \left\{ y \in F \mid \forall \{x_n\} \xrightarrow{\Lambda_f} x_0, \exists \{b_n\} \xrightarrow{*} y : b_n \le_\Lambda f(x_n) \right\}$ будемо називати *множиною нижнього рівня* відображення f у точці x_0.

Покажемо результат, який пов'язує властивість кв.-нн. знизу та специфіку множини нижнього рівня A_x^f.

Теорема 2. *Нехай* F *є повною нормованою векторною решіткою відносно* $\sigma(F,V)$*-замкненого конуса* Λ. *Тоді для заданих* $f:E \to F^\bullet$ *та* $x_0 \in \operatorname{Dom} f$, *маємо:*

$$f(x_0) \in A_{x_0}^f \Leftrightarrow f \text{ –кв.-нн. зн. в точці } x_0 .$$

У загальному випадку, коли F є довільним нормованим простором, має місце наступний результат, доведення якого легко відтворити за схемою роботи [6].

Твердження 1. Нехай E банахів простір, $f:E \to F^\bullet$, а топологічний простір $\langle F, \sigma(F,V) \rangle$ напівупорядковано $\sigma(F,V)$ замкненим загостреним конусом Λ. Нехай $x_0 \in \operatorname{Dom} f$. Тоді

1. $A_{x_0}^f = A_{x_0}^f - \Lambda$;
2. f є кв.-нн. зн. в т. $x_0 \Leftrightarrow A_{x_0}^f = f(x_0) - \Lambda$;
3. якщо f кв.-нн. зн. в т. x_0, то $f(x_0) \in A_{x_0}^f$;
4. якщо F–повна банахова решітка, то $A_{x_0}^f$–напрямлена вгору множина.

Квазі-напівнеперервна знизу регуляризація відображень. У даному пункті пропонується процедура кв.-нн. знизу регуляризації довільних векторнозначних відображень зі значеннями у просторі $F = V^*$, який є банаховою решіткою відносно часткового порядку породженого конусом Λ. Наводиться також порівняння зі схемою кв.-нн. знизу регуляризації, яка запропонована у [7]. При чому зауважимо, що результати регуляризації за схемою [7] збігаються з результатами, запропонованими в даній роботі.

Означення 8. Для будь-якого відображення $f:E \to F^\bullet$ найбільше з кв.-нн. зн. відображень, які не перевищують f, називається його кв.-нн. зн. регуляризацією.

Для довільної точки $x_0 \in \operatorname{Dom} f$, маємо $A_x^f \ne \varnothing$ і при цьому A_x^f– обмежена зверху множина. Покладемо $I_f(x) := \sup A_x^f$. У разі, коли для довільного x існують лише не Λ_f-збіжні послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, образи яких

$\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ не обмежені за нормою, то $A_x^f = \varnothing$. Отже, в цьому випадку $I_f(x) := +\infty$. Таким чином, відображення $I_f(x): E \to F$ є означеним при всіх $x \in E$. Нижче будуть установлені умови, за яких є кв.-нн. зн. регуляризацією відображення f. Почнемо з наступного допоміжного результату:

Лема 2. [6] Нехай конус Λ має непусту внутрішність і відображення $f: E \to F^{\bullet}$ є локально обмеженим у x_0. Тоді $I_f(x) \in \mathrm{cl}\, A_{x_0}^f$ і при цьому для будь-якого $y \in \mathrm{cl}\, A_{x_0}^f$ такого, що $I_f(x_0) - y \in \mathrm{int}\,\Lambda$ (надалі таке відношення позначатимемо як $y \prec_\Lambda I_f(x_0)$), існує послідовність $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{cl}\, A_{x_0}^f$, яка задовольняє умови: $\beta_k \xrightarrow{*} I_f(x_0)$ та $y \prec_\Lambda \beta_k, \forall k$, де через cl позначено операцію замикання в $\sigma(F,V)$-топології.

Зауважимо, що для довільного $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f$ мають місце співвідношення

$$\mathrm{cl}\, E_f(x_0) = H_f(x_0),\ A_{x_0}^f \subset \mathrm{cl}\, E_f(x_0) = H_f(x_0) = \mathrm{cl}\, A_{x_0}^f,$$

де відповідні множини означені як

$$E_f(x_0) := \left\{ y \in A_{x_0}^f \mid y \prec_\Lambda I_f(x_0) \right\},\ H_f(x_0) := \left\{ y \in \mathrm{cl}\, A_{x_0}^f \mid y \le_\Lambda I_f(x_0) \right\}.$$

Лема 3. Нехай Λ – $\sigma(F,V)$–замкнутий конус з непустою внутрішністю. Нехай $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ –довільна послідовність, яка Λ_f-збігається x_0. Тоді $A_{x_0}^f$ є нижньою границею за Пеневле-Куратовським послідовності множин $\left\{A_{x_k}^f\right\}_{k=1}^{\infty}$ відносно $\sigma(F,V)$-топології.

Доведення. Для цього достатньо показати, що $y \in \liminf\limits_k A_{x_k}^f$ для довільного $y \in E_f(x_0)$. Оскільки $y \prec_\Lambda I_f(x_0)$, то за лемою 2, знайдуться $\{\beta_k\} \in \mathrm{cl}\, A_{x_0}^f$ такі, що $\beta_k \xrightarrow{*} I_f(x_0)$ та $y \prec_\Lambda \beta_k, \forall k$. Нехай $y_k \xrightarrow{*} y, y_k \prec_\Lambda y, \forall k$. Тоді

$$\exists \delta_0 > 0 : \forall k, y_k \le_\Lambda f(x)\, \forall x \in B(x_0, \delta_0), \tag{5}$$

інакше для будь-якого $\delta > 0$ існували б число k і точка $x_\delta \in B(x_0, \delta_0)$ такі, що $f(x_\delta) - y_k \notin \Lambda$.

У цьому випадку $f(x_\delta) - y_k \in y_k - y + F \setminus \Lambda \in -\Lambda + F \setminus \Lambda = F \setminus \Lambda$, що неможливо.

Покажемо тепер, що $y_k \in A_{x_k}^f$. Для кожного k побудуємо послідовності $\left\{x_k^n\right\}_n \to x_k$. Тоді знайдеться $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $x_k^n \in B(x_k, \frac{\delta_0}{2})\, \forall n \ge n_0$ і $\forall k \ge n_0$.

Нехай $\left\{z_k^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ –довільна послідовність, яка $\sigma(F,V)$-збігається до y_k і при цьому $z_k^n \leq_\Lambda y_k$. Нехай також $y_k^n = \begin{cases} z_k^n, & n \geq n_0 \\ f(x_k^n), & n < n_0. \end{cases}$

Вважаючи, що $x_k \in B(x_0, \frac{\delta_0}{2})\ \forall k \geq n_0$, маємо $x_k^n \in B(x_0, \delta_0)\ \forall k, n \geq n_0$. Звідки, у силу (5), отримуємо $y_k^n \leq_\Lambda f(x_k^n)\ \forall k, n \geq n_0$. Отже $y_k \in A_{x_k}^f\ \forall k \geq n_0$. Таким чином $y \in \liminf_k A_{x_k}^f$, з чого випливає, що

$$E_f(x_0) \subset \liminf_k A_{x_k}^f .$$

Оскільки $\liminf_k A_{x_k}^f$ є $\sigma(F,V)$-замкнутою множиною, то $E_f(x_0) \subset \liminf_k A_{x_k}^f$. У результаті $A_{x_0}^f \subset \liminf_k A_{x_k}^f$, що і потрібно було встановити. Лема доведена.

Зауважимо, що надалі ми будемо розглядати лише конуси з непустою внутрішністю.

Означення 9. Будемо казати, що відображення $f : E \to F^{\bullet}$ є секвенційно кв.-нн. зн. в точці $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ якщо

$$\forall \{x_n\} \xrightarrow{\Lambda_f} x_0\ \exists \{b_n\} \xrightarrow{*} f(x_0), b_n \leq_\Lambda f(x_n) .$$

Лема 4. Нехай $f : E \to F^{\bullet}$, $F = V^*$ – банахова решітка відносно $\sigma(F,V)$-замкнутого загостреного конуса Λ з непустою внутрішністю. Нехай $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ і відображення f локально обмежене в x_0. Тоді з кв.-нн. зн. в т. x_0 відображення f випливає, що для будь-якої послідовності $\{x_n\} \to x_0$ виконується умова:

$$\forall \vartheta \subset F\ \exists \hat{n} : f(x_n) \in f(x_0) + \vartheta + \Lambda, \forall n > \hat{n} ,$$

де ϑ –окіл нуля у просторі $\langle F, \sigma(F,V) \rangle$.

Доведення. Припустимо обернене. Нехай існує послідовність $\{x_n\}_n \to x_0$ така, що

$$\exists \vartheta_0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k > n : f(x_k) \notin f(x_0) + \vartheta_0 + \Lambda . \qquad (6)$$

Оскільки, за вихідними припущеннями, послідовність $f(x_n)$ є локально обмеженою, то виходячи з теореми Банаха-Алаоглу, можна вибрати *-слабко збіжну в F послідовність $\{f(x_k)\}_{k=n}^{\infty}$, яка задовольнятиме умову (6). Проте для її границі f^* одержимо $f^* \not\geq_\Lambda f(x_0)$, що суперечить лемі 1.

Твердження 2. За умов леми 4, означення 4 і 9 є тотожними.

Доведення. Озн.4 $\Rightarrow$ Озн.9. За означенням 4, для будь-якої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$, яка збігається до x_0, та для будь-якого елемента $b \in F$, такого, що $b \not\geq_\Lambda f(x_0)$, випливає існування такого числа $\hat{n} \in \mathbb{N}$, що $b \not\geq_\Lambda f(x_n)$, для будь-якого $n \geq \hat{n}$. Тоді, за лемою 4, $\forall x_n \xrightarrow{\Lambda_f} x_0$, маємо

$$\forall \vartheta \exists n_0 : f(x_n) \in f(x_0) + \vartheta + \Lambda, \forall n \geq n_0 .$$

Спираючись на теорему 2, можна показати, що послідовність $b_n = \inf\{f(x_n), f(x_0)\}$ задовольняє умовам $b_n \xrightarrow{*} f(x_0)$ і $b_n \leq_\Lambda f(x_n)$. Тим самим, за означенням 9, відображення $f : E \to F^\bullet$ є секвенційно кв.-нн. зн. в точці $x_0 \in \mathrm{Dom} f$. Для доведення оберненого твердження: Озн.9 $\Rightarrow$ Озн.4, досить скористатися теоремою 2.

Теорема 3. *За умов леми 4 відображення* $I_f : E \to F^\bullet$ *кв.-нн. зн. в кожній точці ефективної множини* $\mathrm{Dom} f$.

Доведення. Нехай $x_0 \in \mathrm{Dom} f$ і нехай $\{x_n\} \xrightarrow{\Lambda_f} x_0$ – довільна послідовність. Тоді за лемою 2 існує послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{cl}\, A_{x_0}^f$ така, що $\{y_k\} \xrightarrow{*} I_f(x_0)$. Проте, враховуючи лему 3 та той факт, що нижня границя за Пеневле-Куратовським є $\sigma(F, V)$-замненою множиною, маємо $y_k \in \liminf_k A_{x_n}^f$ при всіх $k \in \mathbb{N}$. Тоді для кожного фіксованого $k \in \mathbb{N}$ знайдуться послідовності $\left\{y_k^n \in A_{x_n}^f\right\}_n$ такі, що $y_k^n \xrightarrow{*} y_k$ при $n \to \infty$. Ясно, що $y_k^n \leq_\Lambda \sup A_{x_n}^f = I_f(x_n)$ при всіх $n \in \mathbb{N}$. Нехай $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ є відображенням таким, що $k(n) \to \infty$ при всіх $n \in \mathbb{N}$. Покладемо $b_n = y_{k(n)}^n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Тоді $b_n \xrightarrow{*} I_f(x_0)$ і при цьому $b_n \leq_\Lambda I_f(x_n) \forall n \in \mathbb{N}$. Тим самим показано, що за означенням 9 відображення I_f є секвенційно кв.-нн. зн. в точці x_0. Для завершення, досить скористатися твердженням 2.

Теорема 4. *За умов леми 4* $I_f : E \to F^\bullet$ *є кв.-нн. зн. регуляризацією відображення* f.

Доведення. Нехай $g : E \to F^\bullet$ довільне кв.-нн. зн. відображення, яке задовольняє умову $g(x) \leq_\Lambda f(x), \forall x \in E$. Виходячи з означень 6–7, маємо $A_x^g \subset A_x^f, \forall x \in E$, оскільки Λ_f-збіжність довільної послідовності $\{x_n\}_n \subset E$ гарантує її Λ_g-збіжність. Оскільки відображення $g : E \to F^\bullet$ кв.-нн. зн., то за твердженням 1 (див. пункт 3) $g(x) \in A_x^g$ при всіх $x \in \mathrm{Dom} f$. Отже $I_f(x) = \sup A_x^f \geq_\Lambda g(x)$, що і доводить теорему.

Отримані результати дають підстави започаткувати наступну концепцію:

Означення 10. Будемо казати, що елемент $\xi \in E$ є нижньою (за конусом Λ) q-границею відображення $f: E \to F^{\bullet}$ у точці $x_0 \in \mathrm{Dom} f$, якщо $\xi = I_f(x_0) := \sup A^f_{x_0}$. При цьому будемо залучати наступне позначення

$$\xi = \liminf_{x \to x_0}{}^q_\Lambda f(x).$$

Суттєвим є той факт, що на відміну від існуючих узагальнень поняття нижньої границі відображень зі значеннями в частково впорядкованих просторах [5], операція $\liminf_{x \to x_0}{}^q_\Lambda$ не є множиннозначною. Більше того, як прямий наслідок встановлених вище результатів, можемо зробити наступний висновок:

Теорема 5. *За умов леми 4 є еквівалентними наступні твердження:*

1. *відображення* $f: E \to F^{\bullet}$ *кв.-нн. зн. в точці* $x_0 \in E$;
2. $f(x_0) \leq_\Lambda \liminf_{x \to x_0}{}^q_\Lambda f(x)$.

Наведемо тепер процедуру регуляризації, яка запропонована в [7]. Нехай $f: E \to F^{\bullet}$, де F-банаховий простір, який є повною нормованою векторною решіткою, та який упорядковано замкненим загостреним конусом Λ з непустою внутрішністю. Тоді квазі-напівнеперервна знизу регуляризація f_* випуклого відображення f визначається, як

$$f_*(x) = \inf\left\{y \in F^{\bullet} \mid (x, y) \in \mathrm{cl}\,\mathrm{epi}(f)\right\}, \tag{7}$$

де $\mathrm{epi}(f) = \left\{(x, y) \in E \times F^{\bullet} \mid y \geq_\Lambda f(x)\right\}$.

Зауважимо що такий спосіб регуляризації, по суті, ґрунтується на наступному факті: якщо конус Λ має непусту внутрішність, то властивість квазі-напівнеперервності відображення суть еквівалентна замкненості його надграфіка, проте операція замикання в нескінченновимірних просторах є досить нетривіальною, до того ж його можна застосувати лише для випуклих відображень, а отже залучення цього підходу є досить обмежливим з практичної точки зору. Разом з тим виходячи з означення 8 та теореми 4 легко бачити, що квазі-напівнеперервна знизу регуляризація у сенсі означення 8 є еквівалентною до регуляризації за правилом (7).

Заключні зауваження. Оскільки метод кв.-нн. знизу регуляризації, що запропонований у даній роботі, опирається на метод нн. знизу регуляризації [6], наведемо приклад, який ілюструє їхню суттєву відмінність. Нехай відображення $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ означене як (рис. 1)

$$f(x)=\begin{cases}\left(-1,\frac{1}{|x|}\right), & x<0;\\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), & x=0;\\ (x,-1), & x>0.\end{cases}$$

Нехай частковий порядок в $\mathbb{R}^2$ задається конусом невід'ємних елементів $\Lambda=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1\geq 0, x_2\geq 0\right\}$.

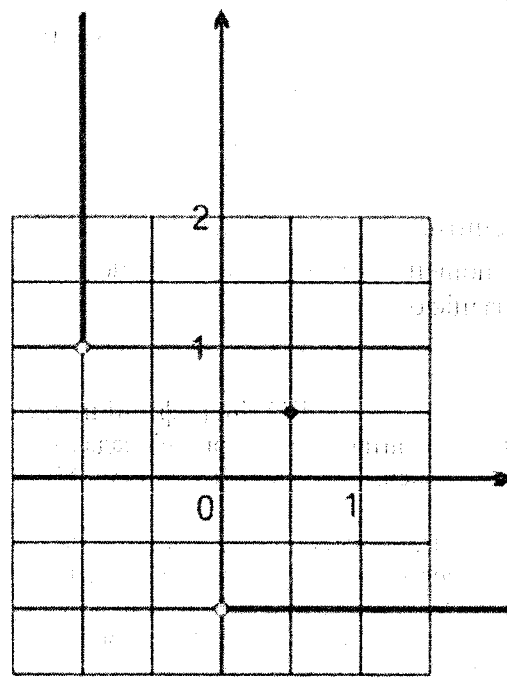

Рис.1

Легко бачити, що в точці $x=0$ відображення f не є ні напівнеперервним знизу, ані квазі-напівнеперервним знизу. Побудуємо його кв.-нн. знизу регуля-ризацію, виходячи з теореми 4. Для цього зауважимо, що жодна з послідовнос-тей $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, які збігаються до точки 0 зліва не є Λ_f-збіжною. Проте, послідов-ності, які збігаються до 0 справа, є Λ_f-збіжними. і при цьому кожна з них є такою, що $f(x_n)\to[0,-1]^T$ і $f(x_n)\geq_{\Lambda}[0,-1]^T$ при всіх $n\in\mathbb{N}$. Оскільки $f(0)=\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^T\geq_{\Lambda}[0,-1]^T$, то для будь-якого вектора $y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2\leq_{\Lambda}[0,-1]^T$ стаціонарна послідовність $\left\{b_n=(y_1,y_2)\right\}_n$ задовольняє умову $b_n\leq_{\Lambda}f(x_n)$, для всіх Λ_f-збіжних до 0 послідовностей $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Отже $A_{x=0}^{f}=[0,-1]^T-\Lambda$.

Таким чином, кв.-нн. знизу регуляризацією для f буде наступне відображення

$$I_f(x)=\begin{cases}\left(-1,\frac{1}{|x|}\right), & x<0;\\ \left(0,-1\right), & x=0;\\ (x,-1), & x>0.\end{cases}$$

Разом з тим, залучаючи метод запропонований в [6], отримаємо нн. зн. регуляризацію для f у вигляді

$$I_f^*(x)=\begin{cases}\left(-1,\frac{1}{|x|}\right), & x<0;\\ \left(-1,-1\right), & x=0;\\ (x,-1), & x>0.\end{cases}$$

Легко бачити, що $I_f(x)\geq_\Lambda I_f^*(x)\,\forall x\in\mathbb{R}$ (зокрема $I_f(0)\succ_\Lambda I_f^*(0)$), що є типовим співвідношенням між запропонованою квазі-нн. зн. регуляризацією, та нн. зн. регуляризацією з [6].

Бібліографічні посилання

1. **Когут П. І.** До питання регуляризації задач векторної оптимізації /П.І. Когут, І.В. Нечай// Вісник Дніпропетр. ун-ту, Математика, –2008, –Т.16, № 6, С. 149–154.
2. **Когут П. І.** Про скаляризацію одного класу задач векторної оптимізації в банахових просторах /П. І., Когут, І.В. Нечай// Проблемы управления и информатики, –2008, –№ 6, С. 45–63.
3. **Borwein J.** Conjugate convex operators /J.Borwein, J.Penot, M.Thera// J.Math. Anal. Appl., –1984, –Vol. 102, 399–414.
4. **Finet C.** Vector-value Variational Principles, Preprint #4 /C.Finet, L.Quarta, C.Troestler// January 19, Institute de Mathematique et d'Informatique, Universite de Mons-Hainaut, –2001.
5. **Kogut P.I.** On the existence of efficient solutions to vector optimization problems in Banach spaces /P.I.Kogut, R.Manzo, I.V.Nechay// Диференціальні рівняння та їх застосування, ДНУ,–2008, С.107–124.
6. **Mansour M. Ait** Lower semicontinuous regularization for vector-valued mappings /M. Ait Mansour, A. Metrane, M. Thera// Rapport de recherche, Universite de Limoges, –2004.
7. **Mansour M. Ait** On theSemicontinuity of Vector-Valued Mappings /M. Ait Mansour, C. Malivert, M. Thera// Rapport de recherche,Universite de Limoges, 2004.
8. **Penot J.P.** Semicontinuous mappings in general topology /J.P.Penot, M.Thera// Arch.Math., 38(1982), 158–166.

Надійшла до редколегії 14.01.09