ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 530.145
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-4-419-435

Поступила в редакцию 22.06.2020
Received 22.06.2020

Я. А. Войнова[1], Н. Г. Крылова[2,3], Е. М. Овсиюк[4]

[1]Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
[3]Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь
[4]Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь

ПАУЛИЕВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ВЕКТОРНОЙ ЧАСТИЦЫ С АНОМАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ ВО ВНЕШНЕМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Аннотация. Исследуется частица со спином 1 и аномальным магнитным моментом во внешнем кулоновском поле. Исходной является релятивистская тензорная система уравнений типа Прока в декартовой системе координат. В этих уравнениях присутствует параметр Γ, связанный с дополнительной характеристикой частицы. В случае внешнего магнитного поля он интерпретируется как аномальный магнитный момент. Дополнительные члены взаимодействия появляются также и при наличии электрического поля, причем в этом случае есть члены первого и второго порядков по параметру Γ. Детально рассматривается случай внешнего кулоновского поля. Проведена процедура нерелятивистского приближения, получено уравнение паулиевского типа. В нерелятивистском уравнении проведено разделение переменных с использованием аппарата шаровых векторов. Получено одно отдельное радиальное уравнение второго порядка, в котором дополнительные члены взаимодействия отсутствуют. Кроме того, выведена система двух связанных уравнений второго порядка, в них присутствуют линейные и квадратичные по параметру Γ дополнительные члены взаимодействия. Ранее был развит другой подход к анализу векторной частицы с аномальным магнитным моментом, основанный на использовании тетрадного формализма и разделении переменных в уравнении Даффина – Кеммера с применением функций Вигнера, после чего процедура нерелятивистского приближения была выполнена непосредственно в радиальной системе уравнений. Были построены в явном виде формальные решения Фробениуса возникающего уравнения 4-го порядка, однако физически интерпретируемых спектров получить не удалось. Показано, что полученные разными методами нерелятивистские радиальные уравнения совпадают с точностью до простого линейного преобразования над двумя функциями. В настоящей работе получено более простое уравнение 4-го порядка, при этом построение решений Фробениуса технически проще, но найти физически интерпретируемые спектры также не удается.

Ключевые слова: частица со спином 1, аномальный магнитный момент, кулоновское поле, решения Фробениуса, квантование энергии

Для цитирования. Войнова, Я. А. Паулиевское приближение для векторной частицы с аномальным магнитным моментом во внешнем кулоновском поле / Я. А. Войнова, Н. Г. Крылова, Е. М. Овсиюк // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 4. – С. 419–435. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-4-419-435

Yanina A. Voynova[1], Nina G. Krylova[2,3], Elena M. Ovsiyuk[4]

[1]B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Belarus
[3]Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus
[4]Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus

PAULI APPROXIMATION FOR A VECTOR PARTICLE WITH ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT IN AN EXTERNAL COULOMB FIELD

Abstract. Herein, a spin 1 particle with anomalous magnetic moment in an external Coulomb field is studied. We start with the relativistic tensor system of the Proca type in Cartesian coordinates. In these equations the Γ parameter is present related to an additional characteristic of the particle. In the case of an external magnetic field, it is interpreted as an anomalous magnetic moment. In the presence of an external electric field, additional interaction terms are presented as well; moreover, the terms of the first and second orders in parameter Γ appear. The case of an external Coulomb field is considered in detail. In the nonrelativistic approximation a Pauli type equation is obtained. In the nonrelativistic equation the separation of the variables with the use of spherical vectors is realized. One separate 2-nd order differential equation is found, in which additional interaction terms are missing. Besides, we derive systems of two coupled 2-nd order equations wherein linear and quadratic in parameter Γ interaction terms are presented. Previously, another approach was developed for analyzing the vector particle with anomalous magnetic moment. It was based on the use of tetrad formalism and separation of the variables in the Duffin – Kemmer equation with the help of the Wigner function. The nonrelativistic approximation was performed directly in the system of radial equations. Besides, previously formal Frobenius type solutions for an arising 4-th order differential equation were constructed; however, physically interpretable energy spectra were not found. We have proved that the radial equations derived by different methods are the same up to a simple liner transformation over two radial functions. In this paper, we have obtained a simpler 4-th order equation, the construction of Frobenius solutions becomes technically easier, but physical energy spectra are not found either.

Keywords: spin 1 particle, anomalous magnetic moment, Coulomb field, Frobenius solutions, energy quantization

For citation. Voynova Ya. A., Krylova, N. G., Ovsiyuk E. M. Pauli approximation for a vector particle with anomalous magnetic moment in an external Coulomb field. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 4, pp. 419–435 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-4-419-435

Введение. Известно, что в рамках теории релятивистских волновых уравнений можно предложить так называемые неминимальные уравнения, которые описывают частицы с дополнительными электромагнитными характеристиками. В частности, интенсивно исследовались [1–13] уравнения для частиц со спином 1, обладающих помимо электрического заряда аномальным магнитным моментом. До настоящего времени такое обобщенное уравнение главным образом решалось в присутствии внешних однородных магнитного и электрического полей [14–18]. Уравнение для векторной частицы в случае внешнего кулоновского поля оказывается очень сложным даже в случае обычной частицы без аномального момента, и эта задача все еще не решена полностью [19, 20]. Однако в нерелятивистском пределе уравнение для обычной векторной частицы в кулоновском поле решается точно [19]. В настоящей работе мы исследуем аналогичную нерелятивистскую задачу для частицы с аномальным магнитным моментом.

Исходной является релятивистская тензорная система уравнений типа Прока в декартовой системе координат, обобщенная так, чтобы учесть аномальный магнитный момент частицы. В этих уравнениях присутствует дополнительный параметр Γ, определяющий дополнительную характеристику частицы. В случае внешнего магнитного поля он интерпретируется как аномальный магнитный момент. Дополнительные члены взаимодействия появляются также и при наличии электрического поля, причем есть члены, пропорциональные и первой, и второй степеням параметра Γ. Эти взаимодействия являются соответственно линейными и квадратичными по электрическому полю. Детально рассматривается случай внешнего кулоновского поля. С использованием аппарата шаровых векторов проведено разделение переменных. В систему радиальных уравнений входит одно отдельное уравнение, в котором дополнительные члены взаимодействия отсутствуют; два других уравнения образуют связанную подсистему, в которой присутствуют дополнительные члены, линейные и квадратичные по параметру Γ.

В [21] был развит другой подход к анализу нерелятивистской векторной частицы с аномальным магнитным моментом в кулоновском поле. Он основывался на использовании тетрадного формализма и проведении процедуры нерелятивистского приближения в найденной после разделения переменных радиальной системе уравнений. В настоящей работе показано, что полученные разными методами нерелятивистские радиальные уравнения совпадают с точностью до простого линейного преобразования над двумя радиальными функциями. Соответственно нет необходимости повторно выполнять ту часть вычислений, которая была сделана в статье [21]. В частности, там были построены в явном виде формальные решения Фробениуса возникающих уравнений 2-го и 4-го порядков, однако физически интерпретируемых спектров получить не удалось. На основе выделения так называемых трансцендентных решений [22, 23] возникают лишь некие вырожденные формулы для энергии: они разумны по знаку и величине, но не зависят от квантового числа полного момента и параметра Γ. В настоящей работе получены более простые уравнения 4-го порядка. Это упрощение обусловлено отсутствием регулярной особой точки, дополнительной к физическим сингулярным точкам $r = 0$ и $r = \infty$. Построение решений Фробениуса этих уравнений технически проще, но найти физически интерпретируемые спектры, за исключением неких вырожденных примеров, также не удается. В случае минимального значения полного момента в нерелятивистском пределе возникает одно радиальное уравнение, оно сводится к дважды вырожденному уравнению Гойна, но найти соответствующий полный спектр энергий также не удается.

Нерелятивистское приближение. В тензорной форме учитывающие аномальный магнитный момент частицы обобщенные уравнения Прока имеют вид

$$D_a\Psi_b - D_b\Psi_a = m\Psi_{ab}, \quad D^b\Psi_{ab} + \frac{2ie'\lambda}{m}F_{ab}\Psi^b = m\Psi_a;$$

здесь $e' = e/\hbar c, m = Mc/\hbar, D_a = \partial_a - ie'A_a,$ параметр λ безразмерный. Сделаем в этих уравнениях (3 + 1)-расщепление:

$$D_0\Psi_k - D_k\Psi_0 = m\Psi_{0k}, \quad D_k\Psi_l - D_l\Psi_k = m\Psi_{kl},$$

$$D^l\Psi_{0l} + \frac{2ie'\lambda}{m}F_{0l}\Psi^l = m\Psi_0, \quad D^0\Psi_{k0} + \frac{2ie'\lambda}{m}F_{k0}\Psi^0 + D^l\Psi_{kl} + \frac{2ie'\lambda}{m}F_{kl}\Psi^l = m\Psi_k.$$

Дальше используем обозначение $2ie'\lambda/m = \Gamma,$ тогда предыдущие уравнения запишутся так:

$$D_0\Psi_k - D_k\Psi_0 = m\Psi_{0k}, \quad D_k\Psi_l - D_l\Psi_k = m\Psi_{kl},$$

$$D^l\Psi_{0l} + \Gamma F_{0l}\Psi^l = m\Psi_0, \quad D^0\Psi_{k0} + \Gamma F_{k0}\Psi^0 + D^l\Psi_{kl} + \Gamma F_{kl}\Psi^l = m\Psi_k.$$

Исключим из уравнений нединамические переменные Ψ_0 и Ψ_{kl}, в результате получим

$$m\Psi_k = D^0\Psi_{k0} + \frac{\Gamma}{m}F_{k0}\left(D^l\Psi_{0l} - \Gamma F_{0l}\Psi_l\right) + \frac{1}{m}D^l\left(D_k\Psi_l - D_l\Psi_k\right) - \Gamma F_{kl}\Psi_l, \tag{1}$$

$$m\Psi_{0k} = D_0\Psi_k - \frac{1}{m}D_k\left(D^l\Psi_{0l} - \Gamma F_{0l}\Psi_l\right), \tag{2}$$

все тензорные индексы опущены вниз. В уравнениях (1) и (2) перегруппируем слагаемые, выделив обусловленные аномальным моментом:

$$m\Psi_k = \left\{D^0\Psi_{k0} + \frac{1}{m}D^l(D_k\Psi_l - D_l\Psi_k)\right\} + \left\{\frac{\Gamma}{m}F_{k0}D^l\Psi_{0l} - \Gamma F_{kl}\Psi_l - \frac{\Gamma^2}{m}F_{k0}F_{0l}\Psi_l\right\}, \tag{3}$$

$$m\Psi_{0k} = \left\{D_0\Psi_k - \frac{1}{m}D_kD^l\Psi_{0l}\right\} + \frac{\Gamma}{m}D_kF_{0l}\Psi_l. \tag{4}$$

Нерелятивистские (большие и малые) компоненты вводим равенствами [24]:

$$B_k = \frac{1}{2}(\Psi_k + i\Psi_{0k}), \quad M_k = \frac{1}{2}(\Psi_k - i\Psi_{0k}); \quad \Psi_k = B_k + M_k, \quad \Psi_{0k} = -i(B_k - M_k).$$

Комбинируем уравнения (3) и (4) так, чтобы слева были выражения $(\Psi_k \pm i\Psi_{0k})$:

$$m(\Psi_k + i\Psi_{0k}) = \left\{iD_0(\Psi_k + i\Psi_{0k}) + \frac{1}{m}D^l(D_k\Psi_l - D_l\Psi_k) - \frac{i}{m}D_kD^l\Psi_{0l}\right\} +$$

$$+\left\{\frac{\Gamma}{m}F_{k0}D^l\Psi_{0l} - \Gamma F_{kl}\Psi_l - \frac{\Gamma^2}{m}F_{k0}F_{0l}\Psi_l + \frac{i\Gamma}{m}D_kF_{0l}\Psi_l\right\},$$

$$m(\Psi_k - i\Psi_{0k}) = \left\{-iD_0(\Psi_k - i\Psi_{0k}) + \frac{1}{m}D^l(D_k\Psi_l - D_l\Psi_k) + \frac{i}{m}D_kD^l\Psi_{0l}\right\} +$$

$$+\left\{\frac{\Gamma}{m}F_{k0}D^{l}\Psi_{0l}-\Gamma F_{kl}\Psi_{l}-\frac{9\Gamma^{2}}{m}F_{k0}F_{0l}\Psi_{l}-\frac{i\Gamma}{m}D_{k}F_{0l}\Psi_{l}\right\}.$$

Перейдем в этих уравнениях к переменным B_k и M_k, а также выделим энергию покоя, используя формальные замены

$$iD_0B_k=(iD_0+m)B_k,\qquad iD_0M_k=(iD_0+m)M_k,$$

после чего уравнения примут вид

$$2mB_k=\left\{2(iD_0+m)B_k+\frac{1}{m}D^{l}[D_k(B_l+M_l)-D_l(B_k+M_k)]-\frac{1}{m}D_kD^{l}(B_l-M_l)\right\}+$$

$$+\left\{-\frac{i\Gamma}{m}F_{k0}D^{l}(B_l-M_l)-\Gamma F_{kl}(B_l+M_l)-\frac{\Gamma^{2}}{m}F_{k0}F_{0l}(B_l+M_l)+\frac{i\Gamma}{m}D_kF_{0l}(B_l+M_l)\right\},$$

$$2mM_k=\left\{-2(iD_0+m)M_k+\frac{1}{m}D^{l}[D_k(B_l+M_l)-D_l(B_k+M_k)]+\frac{1}{m}D_kD^{l}(B_l-M_l)\right\}+$$

$$+\left\{-\frac{i\Gamma}{m}F_{k0}D^{l}(B_l-M_l)-\Gamma F_{kl}(B_l+M_l)-\frac{\Gamma^{2}}{m}F_{k0}F_{0l}(B_l+M_l)-\frac{i\Gamma}{m}D_kF_{0l}(B_l+M_l)\right\}.$$

Приводим подобные, одновременно пренебрегаем малыми компонентами в сравнении с большими, в результате получаем

$$0=\left\{2iD_0B_k+\frac{1}{m}D^{l}[D_kB_l-D_lB_k]-\frac{1}{m}D_kD^{l}B_l\right\}+$$

$$+\left\{-\frac{i\Gamma}{m}F_{k0}D^{l}B_l-\Gamma F_{kl}B_l-\frac{\Gamma^{2}}{m}F_{k0}F_{0l}B_l+\frac{i\Gamma}{m}D_kF_{0l}B_l\right\},\tag{5}$$

$$4mM_k=\left\{-2iD_0M_k+\frac{1}{m}D^{l}[D_kB_l-D_lB_k]+\frac{1}{m}D_kD^{l}B_l\right\}+$$

$$+\left\{-\frac{i\Gamma}{m}F_{k0}D^{l}B_l-\Gamma F_{kl}B_l-\frac{\Gamma^{2}}{m}F_{k0}F_{0l}B_l-\frac{i\Gamma}{m}D_kF_{0l}B_l\right\}.\tag{6}$$

Кроме того, в (6) следует пренебречь слагаемым iD_0M_k в сравнении с mM_k, тогда уравнение (6) позволит выразить малую компоненту через большую (такое же приближение присутствует и в случае вывода уравнения Паули из уравнения Дирака):

$$4mM_k=\left\{\frac{1}{m}D^{l}[D_kB_l-D_lB_k]+\frac{1}{m}D_kD^{l}B_l\right\}+\left\{-\frac{i\Gamma}{m}F_{k0}D^{l}B_l-\Gamma F_{kl}B_l-\frac{\Gamma^{2}}{m}F_{k0}F_{0l}B_l-\frac{i\Gamma}{m}D_kF_{0l}B_l\right\}.$$

Уравнение (5) содержит только большую компоненту (сменим обозначение $B_k=\Phi_k$):

$$iD_0\Phi_k=\frac{1}{2m}\left\{-D_lD_l\Phi_k+(D_lD_k-D_kD_l)\Phi_l-i\Gamma F_{k0}D_l\Phi_l-i\Gamma D_kF_{0l}\Phi_l+m\Gamma F_{kl}\Phi_l+\Gamma^{2}F_{k0}F_{0l}\Phi_l\right\}.\tag{7}$$

Это паулиевское приближение для векторной частицы с аномальным магнитным моментом. Уравнение (7) корректно с точки зрения размерностей:

$$[m]=\frac{1}{L},\quad [e'A]=\frac{1}{L},\quad [e'F]=\frac{1}{L^2},\quad [\lambda]=1,\quad [\Gamma]=\frac{1}{L},\quad [\Gamma F]=1.$$

Дальше рассматриваем только случай внешнего электрического поля:

$$iD_0\Phi_k=\frac{1}{2m}\left\{-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial}{\partial x^l}\Phi_k+i\Gamma\left(F_{0k}\frac{\partial\Phi_l}{\partial x^l}-\frac{\partial}{\partial x^k}(F_{0l}\Phi_l)\right)+\Gamma^2F_{k0}F_{0l}\Phi_l\right\}. \tag{8}$$

В векторных обозначениях уравнение записывается так:

$$iD_0\vec{\Phi}=\frac{1}{2m}\left\{-\nabla^2\vec{\Phi}+i\Gamma[\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{\Phi}-\mathrm{grad}\,(\vec{E}\,\vec{\Phi})]-\Gamma^2\vec{E}(\vec{E}\vec{\Phi})\right\}. \tag{9}$$

Если считать, что параметр Γ мал настолько, что вкладом члена с Γ^2 можно пренебречь, то уравнения (8)–(9) упростятся:

$$iD_0\Phi_k=\frac{1}{2m}\left\{-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial}{\partial x^l}\Phi_k+i\Gamma\left(F_{0k}\frac{\partial\Phi_l}{\partial x^l}-\frac{\partial}{\partial x^k}(F_{0l}\Phi_l)\right)\right\},$$

$$iD_0\vec{\Phi}=\frac{1}{2m}\left\{-\nabla^2\vec{\Phi}+i\Gamma[\,\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{\Phi}-\mathrm{grad}\,(\vec{E}\,\vec{\Phi})\,]\right\}.$$

Разделение переменных. В случае кулоновского поля имеем соотношения

$$A_0=\frac{\alpha}{r},\quad (\vec{E})=(F_{0l})=\frac{\alpha}{r^2}n_l,\quad n_l=\frac{x^l}{r},\quad iD_0=\frac{\partial}{\partial x^0}+\frac{e^2}{\hbar c}\frac{1}{r}=i\frac{\partial}{\partial x^0}+\frac{\alpha}{r}.$$

Следовательно, уравнение (9) записывается так:

$$\nabla^2\vec{\Phi}+2m\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\vec{\Phi}-i\Gamma\left[\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{\Phi}-\mathrm{grad}\,(\vec{E}\,\vec{\Phi})\right]+\Gamma^2\vec{E}\,(\vec{E}\,\vec{\Phi})=0. \tag{10}$$

Его решения ищем в виде

$$\vec{\Phi}=e^{-i\varepsilon x^0}\left[F(r)\,\vec{Y}^{j-1}_{jM}+G(r)\,\vec{Y}^{j+1}_{jM}+H(r)\,\vec{Y}^{j}_{jM}\right],$$

используем аппарат шаровых векторов [25], нижние индексы дальше будем опускать. Оператор полного орбитального момента действует на шаровые векторы согласно

$$\hat{L}^2\vec{Y}^j=j(j+1)\,\vec{Y}^j,\quad \hat{L}^2\vec{Y}^{j-1}=(j-1)j\,\vec{Y}^{j-1},\quad \hat{L}^2\vec{Y}^{j+1}=(j+1)(j+2)\,\vec{Y}^{j+1},$$

оператор Лапласа в сферических координатах равен

$$\nabla^2=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2}\hat{L}^2=\nabla_r^2-\frac{1}{r^2}\hat{L}^2.$$

Следовательно, слагаемое $\nabla^2\vec{\Phi}$ в (10) дает

$$\nabla^2\vec{\Phi}=\left[\nabla_r^2-\frac{(j-1)j}{r^2}\right]F\,\vec{Y}^{j-1}+\left[\nabla_r^2-\frac{(j+1)(j+2)}{r^2}\right]G\,\vec{Y}^{j+1}+\left[\nabla_r^2-\frac{j(j+1)}{r^2}\right]H\,\vec{Y}^{j}.$$

Операция дивергенции действует так [23]:

$$\mathrm{div}F\vec{Y}^{j-1}=\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr}-\frac{j-1}{r}\right)FY_{jm},\quad \mathrm{div}G\vec{Y}^{j+1}=-\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr}+\frac{j+2}{r}\right)GY_{jm},\quad \mathrm{div}H\vec{Y}^{j}=0.$$

Следовательно, имеем равенство

$$\operatorname{div}\vec{\Phi} = \left[\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r}\right)F - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right)G\right]Y_{jm}.$$

Учитывая формулы (см. в [25])

$$\vec{E} = \frac{\alpha}{r^2}\vec{n}, \quad \vec{n}\,Y_{jm} = \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\vec{Y}^{j-1} - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\vec{Y}^{j+1},$$

для $\vec{E}\operatorname{div}\vec{\Phi}$ получаем выражение

$$\vec{E}\operatorname{div}\vec{\Phi} = \frac{\alpha}{r^2}\left[\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r}\right)F - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right)G\right]\left(\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\vec{Y}^{j-1} - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\vec{Y}^{j+1}\right).$$

С учетом функциональных соотношений (см. в [25])

$$\vec{n}\,\vec{Y}^{j-1} = \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\,Y_{jM}, \quad \vec{n}\,\vec{Y}^{j+1} = -\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\,Y_{jM}, \quad \vec{n}\,\vec{Y}^{j} = 0$$

находим

$$\vec{E}\,\vec{\Phi} = \frac{\alpha}{r^2}\left(\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\,F - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\,G\right)Y_{jM}.$$

Дальше, учитывая известную формулу [25]

$$\operatorname{grad} fY_{jM} = \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right)f\,\vec{Y}^{j-1} - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right)f\,\vec{Y}^{j+1},$$

для $\operatorname{grad}(\vec{E}\,\vec{\Phi})$ получаем выражение

$$\operatorname{grad}(\vec{E}\,\vec{\Phi}) = \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right)\frac{\alpha}{r^2}\left(\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\,F - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\,G\right)\vec{Y}^{j-1} -$$

$$-\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right)\frac{\alpha}{r^2}\left(\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\,F - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\,G\right)\vec{Y}^{j+1}.$$

Найдем явный вид квадратичного по Γ слагаемого

$$\Gamma^2\vec{E}(\vec{E}\,\vec{\Phi}) = \Gamma^2\frac{\alpha}{r^2}\vec{n}\left(\frac{\alpha}{r^2}\vec{n}\vec{\Phi}\right) =$$

$$= \Gamma^2\frac{\alpha^2}{r^4}\left(\frac{j}{2j+1}F - \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}G\right)\vec{Y}^{j-1} + \Gamma^2\frac{\alpha^2}{r^4}\left(\frac{j+1}{2j+1}G - \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}F\right)\vec{Y}^{j+1}.$$

Обратимся к уравнению (10), для простоты сначала отбрасываем член порядка Γ^2:

$$2m\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\vec{\Phi} + \nabla^2\vec{\Phi} - i\Gamma\left[\vec{E}\operatorname{div}\vec{\Phi} - \operatorname{grad}(\vec{E}\,\vec{\Phi})\right] = 0.$$

В детальном виде оно записывается так:

$$2m\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\left[F\,\vec{Y}^{\,j-1}_{jM}+G\,\vec{Y}^{\,j+1}_{jM}+H\,\vec{Y}^{\,j}_{jM}\right]+$$

$$+\left[\nabla_r^2-\frac{(j-1)j}{r^2}\right]F\,\vec{Y}^{\,j-1}+\left[\nabla_r^2-\frac{(j+1)(j+2)}{r^2}\right]G\,\vec{Y}^{\,j+1}+\left[\nabla_r^2-\frac{j(j+1)}{r^2}\right]H\,\vec{Y}^{\,j}-$$

$$-i\Gamma\left\{\frac{\alpha}{r^2}\left[\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr}-\frac{j-1}{r}\right)F-\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr}+\frac{j+2}{r}\right)G\right]\left(\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\vec{Y}^{\,j-1}-\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\vec{Y}^{\,j+1}\right)\right\}+$$

$$+i\Gamma\left\{\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr}+\frac{j+1}{r}\right)\frac{\alpha}{r^2}\left[\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\,F-\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\,G\right]\vec{Y}^{\,j-1}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr}-\frac{j}{r}\right)\frac{\alpha}{r^2}\left[\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\,F-\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\,G\right]\vec{Y}^{\,j+1}\right\}=0.$$

Отсюда с учетом линейной независимости трех шаровых векторов находим три радиальных уравнения:

$$\vec{Y}^{\,j},\qquad 2m\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)H+\left(\nabla_r^2-\frac{j(j+1)}{r^2}\right)H=0\,; \tag{11}$$

$$\vec{Y}^{\,j-1},\qquad 2m\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)F+\left(\nabla_r^2-\frac{(j-1)j}{r^2}\right)F-$$

$$-i\Gamma\frac{\alpha}{r^2}\left(\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr}-\frac{j-1}{r}\right)F-\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr}+\frac{j+2}{r}\right)G\right)\sqrt{\frac{j}{2j+1}}+$$

$$+i\Gamma\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr}+\frac{j+1}{r}\right)\frac{\alpha}{r^2}\left(\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\,F-\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\,G\right)=0; \tag{12}$$

$$\vec{Y}^{\,j+1},\qquad 2m\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)G+\left(\nabla_r^2-\frac{(j+1)(j+2)}{r^2}\right)G+$$

$$+i\Gamma\frac{\alpha}{r^2}\left[\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr}-\frac{j-1}{r}\right)F-\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr}+\frac{j+2}{r}\right)G\right]\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}-$$

$$-i\Gamma\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr}-\frac{j}{r}\right)\frac{\alpha}{r^2}\left(\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\,F-\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\,G\right)=0. \tag{13}$$

В первое уравнение параметр аномального магнитного момента не входит (аналогичный факт был также отмечен в [21]). В двух оставшихся уравнениях этот параметр присутствует, здесь имеем систему двух зацепляющихся уравнений второго порядка. Легко убедиться, что разбиение на две группы (11) и (12)–(13) соответствует решениям с противоположной пространственной четностью [21]. Явный вид уравнений (12)–(13) следующий:

$$\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dF}{dr}+\left[2m\varepsilon+\frac{2m\alpha}{r}-\frac{j(j-1)}{r^2}+\frac{2i\Gamma\alpha j(j-1)}{(2j+1)r^3}\right]F+\frac{3i\Gamma\alpha}{r^3}\frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}G=0, \tag{14}$$

$$\frac{d^2G}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dG}{dr}+\left[m\varepsilon+\frac{2m\alpha}{r}-\frac{(j+1)(j+2)}{r^2}-\frac{2i\Gamma\alpha(j+1)(j+2)}{(2j+1)r^3}\right]G+\frac{3i\Gamma\alpha}{r^3}\frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}F=0. \quad (15)$$

Если учесть квадратичные по Γ члены, то вместо (14) и (15) будем иметь уравнения

$$\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dF}{dr}+\left[2m\varepsilon+\frac{2m\alpha}{r}-\frac{j(j-1)}{r^2}+\frac{2i\Gamma\alpha\, j(j-1)}{(2j+1)r^3}\right]F+$$

$$+\frac{3i\Gamma\alpha}{r^3}\frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}G+\frac{\Gamma^2\alpha^2}{r^4}\left(\frac{j}{2j+1}F-\frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}G\right)=0,$$

$$\frac{d^2G}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dG}{dr}+\left[2m\varepsilon+\frac{2m\alpha}{r}-\frac{(j+1)(j+2)}{r^2}-\frac{2i\Gamma\alpha(j+1)(j+2)}{(2j+1)r^3}\right]G+$$

$$+\frac{3i\Gamma\alpha}{r^3}\frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}F+\frac{\Gamma^2\alpha^2}{r^4}\left(\frac{j+1}{2j+1}G-\frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}F\right)=0.$$

Установление связей с тетрадным подходом. В работе [21] был развит другой подход к анализу векторной частицы с аномальным магнитным моментом. Он основывался на использовании тетрадного формализма и проведении процедуры нерелятивистского приближения непосредственно в найденной после разделения переменных радиальной системе уравнений. Покажем, что полученные разными методами нерелятивистские радиальные уравнения совпадают с точностью до линейного преобразования.

Введем новые функции (используем ортогональное преобразование, величина A не зависит от координаты r и будет зафиксирована ниже):

$$\begin{vmatrix}F\\G\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos A & \sin A\\ -\sin A & \cos A\end{vmatrix}\begin{vmatrix}f\\g\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}f\\g\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos A & -\sin A\\ \sin A & \cos A\end{vmatrix}\begin{vmatrix}F\\G\end{vmatrix}.$$

Перейдем в уравнениях (14)–(15) к функциям f, g:

$$(\cos Af''+\sin Ag'')+\frac{2}{r}(\cos Af'+\sin Ag')+$$

$$+\left[2m\varepsilon+\frac{2m\alpha}{r}-\frac{j(j-1)}{r^2}+\frac{2i\Gamma\alpha j(j-1)}{(2j+1)r^3}\right](\cos Af+\sin Ag)+$$

$$+\frac{3i\Gamma\alpha}{r^3}\frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}(-\sin Af+\cos Ag)=0,$$

$$(-\sin Af''+\cos Ag'')+\frac{2}{r}(-\sin Af'+\cos Ag')+$$

$$+\left[2m\varepsilon+\frac{2m\alpha}{r}-\frac{(j+1)(j+2)}{r^2}-\frac{2i\Gamma\alpha(j+1)(j+2)}{(2j+1)r^3}\right](-\sin Af+\cos Ag)+$$

$$+\frac{3i\Gamma\alpha}{r^3}\frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}(\cos Af+\sin Ag)=0.$$

Сначала первое уравнение умножаем на $\cos A$, второе умножаем на $-\sin A$ и складываем:

$$\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{df}{dr}+\frac{1}{r^3(2j+1)}\Big[-6i\Gamma\alpha\sqrt{j(j+1)}\sin A\cos A+$$

$$+\Big((8r+4i\Gamma\alpha)j^2+(8r+4i\Gamma\alpha)j+4i\Gamma\alpha+2r\Big)\cos^2 A-2j^3r+(-7r-2i\Gamma\alpha)j^2+$$

$$+(4m\alpha r^2-6i\Gamma\alpha+4m\varepsilon r^3-7r)j+2m\alpha r^2-2r-4i\Gamma\alpha+2m\varepsilon r^3\Big]f+$$

$$+\frac{4}{r^3(2j+1)}\left[\frac{3}{2}i\Gamma\alpha\left(\cos^2 A-\frac{1}{2}\right)\sqrt{j(j+1)}+\cos A\sin A\left(i\Gamma\alpha(j^2+j+1)+2r\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\right)\right]g=0.$$

Затем первое уравнение умножаем на $\sin A$, второе умножаем на $\cos A$ и складываем:

$$\frac{d^2 g}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dg}{dr}-\frac{4}{r^3(2j+1)}\left[-\frac{3}{2}i\Gamma\alpha\sqrt{j(j+1)}\sin A\cos A+\right.$$

$$+\left((2r+i\Gamma\alpha)j^2+(2r+i\Gamma\alpha)j+i\Gamma\alpha+\frac{1}{2}r\right)\cos^2 A+\frac{1}{2}j^3r+\left(-\frac{1}{4}r-\frac{1}{2}i\Gamma\alpha\right)j^2+$$

$$\left.+\left(-m\alpha r^2+\frac{1}{2}i\Gamma\alpha-m\varepsilon r^3-\frac{1}{4}r\right)j-\frac{1}{2}r^2m(\alpha+r\varepsilon)\right]g+$$

$$+\frac{4}{r^3(2j+1)}\left[\frac{3}{2}i\Gamma\alpha\left(\cos^2 A-\frac{1}{2}\right)\sqrt{j(j+1)}+\cos A\sin A\left(i\Gamma\alpha(1+j^2+j)+2r\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\right)\right]f=0.$$

Обращаем внимание, что коэффициент при смешивающем члене в обоих уравнениях одинаковый:

$$K=\frac{4}{r^3(2j+1)}\left[i\Gamma\alpha\left(\frac{3}{2}\left(\cos^2 A-\frac{1}{2}\right)\sqrt{j(j+1)}+\cos A\sin A(1+j^2+j)\right)+2r\cos A\sin A\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\right].$$

Выберем параметр A

$$\cos A=\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}},\quad \sin A=-\sqrt{\frac{j}{2j+1}},\quad \cos^2 A-\frac{1}{2}=\frac{1}{2(2j+1)},$$

тогда коэффициент K равен

$$K=-\sqrt{j(j+1)}\left(\frac{2}{r^2}+\frac{i\Gamma\alpha}{r^3}\right).$$

Следовательно, уравнения принимают вид

$$\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{df}{dr}+\left(2m\varepsilon+\frac{2m\alpha}{r}-\frac{j(j+1)}{r^2}\right)f-\sqrt{j(j+1)}\left(\frac{2}{r^2}+\frac{i\Gamma\alpha}{r^3}\right)g=0, \tag{16}$$

$$\frac{d^2 g}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dg}{dr}+\left(2m\varepsilon+\frac{2m\alpha}{r}-\frac{j(j+1)}{r^2}-\frac{2}{r^2}-\frac{4i\Gamma\alpha}{r^3}\right)g-\sqrt{j(j+1)}\left(\frac{2}{r^2}+\frac{i\Gamma\alpha}{r^3}\right)f=0. \tag{17}$$

С учетом квадратичных членов уравнения (16) и (17) следует заменить на следующие:

$$\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{df}{dr}+\left(2m\varepsilon+\frac{2m\alpha}{r}-\frac{j(j+1)}{r^2}\right)f-\sqrt{j(j+1)}\left(\frac{2}{r^2}+\frac{i\Gamma\alpha}{r^3}\right)g=0, \tag{18}$$

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dg}{dr} + \left(2m\varepsilon + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{j(j+1)}{r^2} - \frac{2}{r^2} - \frac{4i\Gamma\alpha}{r^3} + \frac{\alpha^2\Gamma^2}{r^4}\right) g - \sqrt{j(j+1)}\left(\frac{2}{r^2} + \frac{i\Gamma\alpha}{r^3}\right) f = 0. \quad (19)$$

В [21] были получены уравнения

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + 2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{j(j+1)}{r^2}\right]\Psi_1 - \sqrt{j(j+1)}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{r^2} + \frac{i\Gamma\alpha}{r^3}\right)\Psi_2 = 0, \quad (20)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + 2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{j(j+1)}{r^2} - \frac{2}{r^2} - \frac{4i\Gamma\alpha}{r^3} + \frac{\Gamma^2\alpha^2}{r^4}\right]\Psi_2 - \sqrt{j(j+1)}\sqrt{2}\left(\frac{2}{r^2} + \frac{i\Gamma\alpha}{r^3}\right)\Psi_1 = 0. \quad (21)$$

Уравнения (20)–(21) совпадают с (18)–(19), если учесть отождествления

$$\Psi_1 = f, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_2 = g.$$

Следующие из (20)–(21) уравнения 4-го порядка уже исследовались в работе [21], при этом получить физически интерпретируемые спектры энергии не удалось. Ниже кратко опишем анализ возникающих здесь систем уравнений.

Анализ уравнений 4-го порядка, учет членов 1-го порядка по Г. Рассмотрим систему уравнений (14)–(15), она не учитывает члены второго порядка по Г и не рассматривалась в [21]. Из нее следуют уравнения 4-го порядка, они однотипные. Для определенности рассмотрим уравнение для функции $F(r)$ (удобно использовать его краткое представление):

$$\frac{d^4F}{dr^4} + \frac{10}{r}\frac{d^3F}{dr^3} + \left(a_0 + \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2} + \frac{a_3}{r^3}\right)\frac{d^2F}{dr^2} +$$

$$+\left(\frac{b_1}{r} + \frac{b_2}{r^2} + \frac{b_3}{r^3} + \frac{b_4}{r^4}\right)\frac{dF}{dr} + \left(c_0 + \frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{r^2} + \frac{c_3}{r^3} + \frac{c_4}{r^4} + \frac{c_6}{r^6}\right)F = 0,$$

где

$$a_0 = 4m\varepsilon, \quad a_1 = 4m\alpha, \quad a_2 = 22 - 2j - 2j^2, \quad a_3 = -4i\Gamma\alpha,$$

$$b_1 = 20m\varepsilon, \quad b_2 = 16m\alpha, \quad b_3 = -29(3j+4)(j-1), \quad b_4 = -8i\Gamma\alpha,$$

$$c_0 = 4m^2\varepsilon^2, \quad c_1 = 8m^2\alpha\varepsilon, \quad c_2 = -4m(j^2\varepsilon - m\alpha^2 + j\varepsilon - 5\varepsilon),$$

$$c_3 = -4m\alpha(j^2 + j - 2 + 2i\Gamma\varepsilon), \quad c_4 = j^2(j+3)(j-1) - 8i\alpha^2\Gamma m, \quad c_6 = \Gamma^2\alpha^2 j(j+1).$$

Легко устанавливается главный член асимптотики на бесконечности

$$F = e^{Cr}, \quad C^4 + a_0C^2 + c_0 = 0, \qquad C^4 + 4m\varepsilon C^2 + 4m^2\varepsilon^2 = 0, \quad C = \pm\sqrt{-2m\varepsilon}.$$

Делаем замену переменной $x = \sqrt{r}$, уравнение примет вид

$$\frac{d^4F}{dx^4} + \frac{14}{x}\frac{d^3F}{dx^3} + \left(4a_0x^2 + +4a_1 + \frac{-45 + 4a_2}{x^2} + \frac{4a_3}{x^4}\right)\frac{d^2F}{dx^2} +$$

$$+\left((-4a_0 + 8b_1)x + \frac{-4a_1 + 8b_2}{x} + \frac{-4a_2 + 45 + 8b_3}{x^3} + \frac{-4a_3 + 8b_4}{x^5}\right)\frac{dF}{dx} +$$

$$+\left(16c_0x^4 + 16c_1x^2 + 16c_2 + \frac{16c_3}{x^2} + \frac{16c_4}{x^4} + \frac{16c_6}{x^8}\right)F = 0.$$

Решения Фробениуса около точки $x = 0$ ищем в виде [22, 23] (A, B, C – индексы сингулярной точки $x = 0$, они будут найдены ниже) $F = x^A e^{B/x} e^{Cx^2} f(x)$. Эта структура решений Фробениуса означает, что ранг точки $x = 0$ равен 3, тогда ранг точки $r = 0$ равен 3 / 2. Для функции $f(x)$ находим громоздкое уравнение, которое не приводим. Накладываем ограничения на параметры, чтобы убрать главные сингулярные члены. В результате находим индексы сингулярных точек:

$$16c_0 + 16a_0 C^2 + 16C^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \pm\sqrt{-2m\varepsilon},$$

$$B^4 + 16c_6 + 4a_3 B^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \pm 2\sqrt{2i\alpha\Gamma \pm i\alpha\Gamma\sqrt{j^2 + j + 4}},$$

$$B^2 + 4b_4 - 6a_3 + 4a_3 A + 2AB^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}.$$

Напоминаем, что параметр $i\alpha\Gamma = \gamma$ – вещественный. Будем рассматривать вариант $\gamma > 0$. Тогда связанным состояниям отвечает следующий набор значений для параметров:

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = -2\sqrt{2\gamma + 2\gamma\sqrt{1 + (j^2 + j)/2}} < 0, \quad C = -\sqrt{-2m\varepsilon} < 0.$$

В результате уравнение для функции $f(x)$ упрощается, приводим его краткую форму:

$$\frac{d^4 f}{dx^4} + \left(k_1 x + \frac{K_1}{x} + \frac{K_2}{x^2}\right)\frac{d^3 f}{dx^3} + \left(m_2 x^2 + M_0 + \frac{M_1}{x} + \frac{M_2}{x^2} + \frac{M_3}{x^3} + \frac{M_4}{x^4}\right)\frac{d^2 f}{dx^2} +$$

$$+\left(n_1 x + N_0 + \frac{N_1}{x} + \frac{N_2}{x^2} + \frac{N_3}{x^3} + \frac{N_4}{x^4} + \frac{N_5}{x^5} + \frac{N_6}{x^6}\right)\frac{df}{dx} + \left(Q_0 + \frac{Q_1}{x} + \frac{Q_2}{x^2} + \frac{Q_3}{x^3} + \frac{Q_4}{x^4} + \frac{Q_5}{x^5} + \frac{Q_6}{x^6}\right) f = 0,$$

где

$$k_1 = 8C, \quad K_1 = 4A + 14, \quad K_2 = -4B,$$

$$m_2 = 4a_0 + 24C^2, \quad M_0 = 4a_1 + 24AC + 96C, \quad M_1 = -24BC,$$

$$M_2 = 4a_2 + 36A + 6A^2 - 45, \quad M_3 = -6B(2A + 5), \quad M_4 = 4a_3 + 6B^2,$$

$$n_1 = 216C^2 - 4a_0 + 8b_1 + 16a_1 C + 8a_0 A + 48AC^2, \quad N_0 = -48BC^2 - 8a_0 B,$$

$$N_1 = -96C + 16a_2 C - 4a_1 + 8b_2 + 8a_1 A + 168AC + 24A^2 C,$$

$$N_2 = -144BC - 8a_1 B - 48ABC,$$

$$N_3 = 45 + 24B^2 C + 16a_3 C - 4a_2 + 8b_3 + 8a_2 A + 30A^2 - 124A + 4A^3,$$

$$N_4 = 150B - 8a_2 B - 48AB - 12A^2 B, \quad N_5 = 18B^2 + 8b_4 - 4a_3 + 8a_3 A + 12AB^2,$$

$$N_6 = -4B\left(B^2 + 2a_3\right),$$

$$Q_0 = 4a_0 A^2 + 24A^2 C^2 + 16c_2 + 16a_1 AC + 8b_1 A - 8a_0 A + 192AC^2 + 16b_2 C + 16a_2 C^2,$$

$$Q_1 = -4B\left(4a_1 C + 42C^2 - 3a_0 + 2b_1 + 2a_0 A + 12AC^2\right),$$

$$Q_2 = 16c_3 + 24B^2 C^2 + 16b_3 C + 4a_0 B^2 + 16a_3 C^2 +$$

$$+16a_2 AC - 8a_1 A + 4a_1 A^2 - 176AC + 72A^2 C + 8A^3 C + 8b_2 A,$$

$$Q_3 = -4B\left(4a_2C + 2b_2 - 60C - 3a_1 + 30AC + 2a_1A + 6A^2C\right),$$

$$Q_4 = 16c_4 + 48B^2C + 16b_4C + 4a_1B^2 + 24AB^2C +$$

$$+16a_3AC - 8a_2A + 4a_2A^2 + 8b_3A - 76A^2 + 112A + 8A^3 + A^4,$$

$$Q_5 = -B\left(16a_3C + 195 + 8b_3 + 8B^2C - 12a_2 + 8a_2A - 172A + 18A^2 + 4A^3\right),$$

$$Q_6 = -93B^2 + 4a_2B^2 - 8a_3A + 4a_3A^2 + 12AB^2 + 6A^2B^2 + 8b_4A.$$

Решения этого уравнения уже можно построить в виде степенных рядов. Приходим к 8-членным рекуррентным соотношениям:

$$k = 8,9,10,\ldots\quad [m_2(k-6)(k-7) + n_1(k-6) + Q_0]d_{k-6} + [N_0(k-5) + Q_1]d_{k-5} +$$

$$+[k_1(k-4)(k-5)(k-6) + M_0(k-4)(k-5) + N_1(k-4) + Q_2]d_{k-4} +$$

$$+[M_1(k-3)(k-4) + N_2(k-3) + Q_3]d_{k-3} +$$

$$+[(k-2)(k-3)(k-4)(k-5) + K_1(k-2)(k-3)(k-4) + M_2(k-2)(k-3) + N_3(k-2) + Q_4]d_{k-2} +$$

$$+[K_2(k-1)(k-2)(k-3) + M_3(k-1)(k-2) + N_4(k-1) + Q_5]d_{k-1} +$$

$$+[M_4k(k-1) + N_5k + Q_6]d_k + N_6(k+1)d_{k+1} = 0. \tag{22}$$

Для исследования сходимости ряда в соответствии с методом Пуанкаре – Перрона разделим полученное выражение на d_{k-6}, затем делим на k^4 и устремляем $k \to \infty$. В результате получаем алгебраическое уравнение для величины R, определяющей возможные радиусы сходимости:

$$R = \lim_{k\to\infty} = R, \quad R^4 = 0, \quad R_{\text{conv}} = \frac{1}{|R|} = \infty.$$

Для получения некоторого правила квантования воспользуемся условием трансцендентности решений [22, 23], т. е. требуем обращения в нуль коэффициента при d_{k-6} в рекуррентных формулах (22):

$$m_2(k-6)(k-7) + n_1(k-6) + Q_0 = 0.$$

Учтем явный вид параметров

$$-32m\left[\alpha(-5+2k)\sqrt{-2m\varepsilon} + \left(\frac{9}{4} - 5k + k^2\right)\varepsilon - 2m\alpha^2\right] = 0,$$

из последнего уравнения находим две формулы для уровней энергии:

$$\varepsilon_1 = -\frac{8m\alpha^2}{(-9+2k)^2}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{8m\alpha^2}{(-1+2k)^2}.$$

Эти формулы не зависят от параметров j и γ, поэтому их нельзя рассматривать как описывающие правильные спектры энергии.

Уравнение 4-го порядка, учет квадратичных по Г членов. Если учитывать квадратичные по Г члены, то имеем систему уравнений

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dF}{dr} + \left[2m\varepsilon + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{j(j-1)}{r^2} + \frac{2i\Gamma\alpha\, j(j-1)}{(2j+1)r^3}\right]F +$$

$$+\frac{3i\Gamma\alpha}{r^3}\frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}G+\Gamma^2\frac{\alpha^2}{r^4}\left(\frac{j}{2j+1}F-\frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}G\right)=0,$$

$$\frac{d^2G}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dG}{dr}+\left[2m\varepsilon+\frac{2m\alpha}{r}-\frac{(j+1)(j+2)}{r^2}-\frac{2i\Gamma\alpha(j+1)(j+2)}{(2j+1)r^3}\right]G+$$

$$+\frac{3i\Gamma\alpha}{r^3}\frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}F+\Gamma^2\frac{\alpha^2}{r^4}\left(\frac{j+1}{2j+1}G-\frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}F\right)=0.$$

Вводим обозначения

$$i\Gamma\alpha=\gamma,\quad 2m\varepsilon\Rightarrow E,\quad 2m\alpha\Rightarrow\sigma,\quad \mu=\sqrt{j(j+1)},$$

затем получаем два уравнения 4-го порядка, они однотипные. Рассмотрим одно из них, например, для функции F, перейдем к новой переменной $x=\sqrt{r}$:

$$\frac{d^4F}{dx^4}+\left[\frac{18}{x}-\frac{12x}{3x^2+\gamma}\right]\frac{d^3F}{dx^3}+$$

$$+\left[8Ex^2+\frac{79-8j^2-8j}{x^2}-\frac{16\gamma}{x^4}-\frac{4\gamma^2}{x^6}+8\sigma-\frac{108}{3x^2+\gamma}-\frac{24\gamma}{(3x^2+\gamma)^2}\right]\frac{d^2F}{dx^2}+$$

$$+\left[72Ex+\frac{4(189-36j^2-12\sigma\gamma+4\gamma^2E-72j)x}{(3x^2+\gamma)\gamma}+\frac{216x}{(3x^2+\gamma)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{-252+48j^2+72\sigma\gamma+96j}{\gamma x}+\frac{81-40j-56j^2}{x^3}+\frac{16\gamma(-3+j)}{x^5}-\frac{12\gamma^2}{x^7}\right]\frac{dF}{dx}+$$

$$+\left[16E^2x^4+32E\sigma x^2+\frac{-32\sigma j^2\gamma+288j^2-32\sigma j\gamma+576j+160\sigma\gamma-64\gamma^2E}{\gamma x^2}+\right.$$

$$+\frac{16j^4+32j^3-112j^2-128j-16\gamma^2E-64\sigma\gamma}{x^4}-\frac{16\gamma(-2j+\sigma\gamma)}{x^6}+\frac{144\gamma^2\left(-\mu^2+j+j^2\right)}{(2j+1)^2x^8}+$$

$$+\frac{96\gamma^3\left(-\mu^2+j+j^2\right)}{(2j+1)^2x^{10}}+\frac{16\gamma^4\left(-\mu^2+j+j^2\right)}{(2j+1)^2x^{12}}-32Ej^2-32Ej+160E+16\sigma^2+$$

$$\left.+\frac{-864j^2-1728j+96\gamma^2E-288\sigma\gamma}{(3x^2+\gamma)\gamma}+\frac{-288j^2-576j+32\gamma^2E-96\sigma\gamma}{(3x^2+\gamma^2)}\right]F=0.$$

Решения Фробениуса около точки $x=0$ ищем в виде $F=x^Ae^{B/x^2}e^{Cx^2}f(x)$, уравнение для функции $f(x)$ получается слишком громоздким, в явном виде его приводить не будем. Имеем следующие возможные значения параметров A, B, C:

$$I,II.\quad C=\pm\sqrt{-E},\qquad B=0,\quad A=0,-2,$$

$$III.\quad B=\gamma,\quad A=-4;\qquad IV.\quad B=-\gamma,\quad A=4.$$

Связанным состояниям могут соответствовать подстановки

$$C=-\sqrt{-E},\quad B=0,\quad A=0; \tag{23}$$

$$C=-\sqrt{-E},\quad B=\gamma,\quad A=-4,\quad \underline{\gamma<0}; \tag{24}$$

$$C=-\sqrt{-E},\quad B=-\gamma,\quad A=4,\quad \underline{\gamma>0}. \tag{25}$$

Рассмотрим случай (23), уравнение представимо в кратком виде:

$$\frac{d^4 f}{dx^4}+\left[a_1 x+\frac{a_2}{x}+\frac{a_3 x}{3x^2+\gamma}\right]\frac{d^3 f}{dx^3}+\left[b_1 x^2+b_2+\frac{b_3}{x^2}+\frac{b_4}{x^4}+\frac{b_5}{x^6}+\frac{b_6}{3x^2+\gamma}+\frac{b_7}{(3x^2+\gamma)^2}\right]\frac{d^2 f}{dx^2}+$$

$$+\left[c_1 x+\frac{c_2}{x}+\frac{c_3}{x^3}+\frac{c_4}{x^5}+\frac{c_5}{x^7}+\frac{c_6 x}{3x^2+\gamma}+\frac{c_7 x}{(3x^2+\gamma)^2}\right]\frac{df}{dx}+$$

$$+\left[m_1+\frac{m_2}{x^2}+\frac{m_3}{x^4}+\frac{m_4}{x^6}+\frac{m_5}{3x^2+\gamma}+\frac{m_6}{(3x^2+\gamma)^2}\right]f=0.$$

Умножим его на $x^7(3x^2+\gamma)^2$, затем строим решения виде степенных рядов: $f=\sum_{l=0}^{\infty} d_l x^l$; после необходимых вычислений приходим к рекуррентным соотношениям:

$$k=0,\qquad c_5\gamma^2 d_1=0\quad\Rightarrow\quad d_1=0,$$

$$k=1,\qquad 2(b_5+c_5)d_2+m_4 d_0=0,$$

$$k=2,\quad 6b_5\gamma^2 d_3+\left(6c_5\gamma+c_4\gamma^2\right)d_1+3c_5\gamma^2 d_3+m_4\gamma^2 d_1=0\quad\Rightarrow\quad d_3=0,$$

$$k=3,\quad 4\gamma^2\left[3b_5+c_5\right]d_4+\left[2\left(6b_5\gamma+b_4\gamma^2\right)+2\left(6c_5\gamma+c_4\gamma^2\right)+m_4\gamma^2\right]d_2+\left(6m_4\gamma+m_3\gamma^2\right)d_0=0,$$

$$k=4,\quad 6\left(6b_5\gamma+b_4\gamma^2\right)d_3+20b_5\gamma^2 d_5+\left(9c_5+c_3\gamma^2+6c_4\gamma\right)d_1+$$

$$+3\left(6c_5\gamma+c_4\gamma^2\right)d_3+5c_5\gamma^2 d_5+\left(6m_4\gamma+m_3\gamma^2\right)d_1+m_4\gamma^2 d_3=0\quad\Rightarrow\quad d_5=0.$$

Таким образом, получаем 7-членные рекуррентные соотношения

$$\left[9b_1(k-11)(k-12)+9c_1(k-11)+9m_1\right]d_{k-11}+$$

$$+\left[9a_1(k-9)(k-10)(k-11)+(9b_2+6b_1\gamma)(k-9)(k-10)+\right.$$

$$\left.+(3c_6+9c_2+6c_1\gamma)(k-9)+(3m_5+9m_2+6m_1\gamma)\right]d_{k-9}+$$

$$+\left[9(k-7)(k-8)(k-9)(k-10)d_{k-7}+(3a_3+9a_2+6a_1\gamma)(k-7)(k-8)(k-9)+\right.$$

$$+\left(3b_6+9b_3+6b_2\gamma+b_1\gamma^2\right)(k-7)(k-8)+\left(c_7+\gamma c_6+9c_3+6c_2\gamma+c_1\gamma^2\right)(k-7)+$$

$$\left.+\left(m_6+\gamma m_5+9m_3+6m_2\gamma+m_1\gamma^2\right)\right]d_{k-7}+$$

$$+\left[6\gamma(k-5)(k-6)(k-7)(k-8)+\left(\gamma a_3+6a_2\gamma+a_1\gamma^2\right)(k-5)(k-6)(k-7)+\right.$$

$$+\left(b_7+\gamma b_6+9b_4+6b_3\gamma+b_2\gamma^2\right)(k-5)(k-6)+$$

$$+\left(c_2\gamma^2+6c_3\gamma+9c_4\right)(k-5)+\left(9m_4+6m_3\gamma+m_2\gamma^2\right)\Big]d_{k-5}+$$

$$+\Big[\gamma^2(k-3)(k-4)(k-5)(k-6)+a_2\gamma^2(k-3)(k-4)(k-5)+\left(9b_5+6b_4\gamma+b_3\gamma^2\right)(k-3)(k-4)+$$

$$+\left(9c_5+c_3\gamma^2+6c_4\gamma\right)(k-3)+\left(6m_4\gamma+m_3\gamma^2\right)\Big]d_{k-3}+$$

$$+\Big[\left(6b_5\gamma+b_4\gamma^2\right)(k-1)(k-2)+\left(6c_5\gamma+c_4\gamma^2\right)(k-1)+m_4\gamma^2\Big]d_{k-1}+$$

$$+\Big[b_5\gamma^2(k+1)k+c_5\gamma^2(k+1)\Big]d_{k+1}=0.$$

Обращаем внимание на то, что ряд состоит только из четных степеней переменной x.

Из условия трансцендентности [22, 23]:

$$b_1(k-11)(k-12)+c_1(k-11)+m_1=0,$$

записанном в явном виде

$$-\frac{32}{3}\gamma(-E)^{3/2}+\frac{1}{3}90(-48k^2+672k-2160)E+\frac{1}{3}\left(-32\gamma E-96\sigma(k-7)\right)(-E)^{1/2}+16\sigma^2=0,$$

получаем выражения для E:

$$E_1=-\frac{\sigma^2}{(k-5)^2},\qquad E_2=-\frac{\sigma^2}{(k-9)^2}.$$

Эти формулы также не зависят от параметров j и γ, поэтому их нельзя рассматривать как описывающие правильные спектры энергии.

Другими словами, в данной задаче условие трансцендентности не приводит к построению нужных решений, хотя эти решения точные и нужным образом ведут себя около особых точек $r = 0, \infty$. Нужно искать другие методы анализа возникающих уравнений. Например, найденные точные решения и отвечающие им спектры можно было бы использовать в рамках применения теории возмущения в качестве нулевого приближения.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф19М-032).

Acknowledgements. The work was carried out under the financial support of the Belarusian Republican Foundation for Basic Research (grant no. Ф19М-032).

Список использованных источников

1. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск: Белорус. наука, 2015. – 328 с.

2. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol I. General Theory / V. V. Kisel [et al.]. − New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. − 404 p.

3. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol II. Physical Problems / V. V. Kisel [et al.]. − New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. − 402 p.

4. Corben, H. C. The electromagnetic properties of mesotrons / H. C. Corben, J. Schwinger // Phys. Rev. – 1940. – Vol. 58, № 11. – P. 953–968. https://doi.org/10.1103/PhysRev.58.953

5. Symonds, N. Vector meson in a homogeneous magnetic field / N. Symonds // Philos. Mag. – 1949. – Vol. 40. – P. 636–644.

6. Боргардт, А. А. Квантовая механика заряженных векторных бозонов с аномальным магнитным моментом во внешних электромагнитных полях / А. А. Боргардт, Д. Я. Карпенко // УФЖ. – 1970. – Т. 15. – С. 1091.

7. Tsai, W. Motion of spin-1 particles in homogeneous magnetic field, multispinor formalism / W. Tsai // Phys. Rev. D. – 1971. – Vol. 4. № 12. – P. 3652–3657. https://doi.org/10.1103/physrevd.4.3652

8. Shamaly, A. Unified theories for massive spin 1 fields / A. Shamaly, A. Z. Capri // Can. J. Phys. – 1973. – Vol. 51, № 14. – P. 1467–1470. https://doi.org/10.1139/p73-195

9. Власов, П. А. Электромагнитные моменты частиц со спином 1 и эквивалентность некоторого класса волновых уравнений / П. А. Власов // УФЖ. – 1977. – Т. 22. – С. 951.

10. Власов, П. А. Заряженная частица со спином в однородном магнитном поле / П. А. Власов // УФЖ. – 1985. – Т. 30. – С. 1605.

11. Савченко, О. Я. Векторный мезон в электромагнитном поле / О. Я. Савченко // ТМФ. – 1993. – Т. 95. – С. 51–57.

12. Савченко, О. Я. Решение уравнения Кеммера и уравнения Брейта в циркулярно поляризованной волне / О. Я. Савченко // ТМФ. – 1994. – Т. 101. – С. 200–210.

13. Савченко, О. Я. Векторный мезон в циркулярно поляризованной волне и постоянном магнитном поле / О. Я. Савченко // ТМФ. – 1995. – Т. 104. – С. 271–280.

14. Квантовая механика частицы со спином 1 и аномальным магнитным моментом в магнитном поле / В. В. Кисель [и др.] // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 5. – С. 83–90.

15. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Electric Field / E. M. Ovsiyuk [et al.] // Quaternions: Theory and Applications. Editor: Sandra Griffin. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2017. – P. 47–84.

16. Techniques of projective operators used to construct solutions for a spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external magnetic field / E. M. Ovsiyuk [et al.] // Quaternions: Theory and Applications. Editor: Sandra Griffin. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2017. – P. 11–46.

17. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Magnetic Field / V. Kisel [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2017. – Vol. 20, № 1. – P. 21–39.

18. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Electric Field / E. M. Ovsiyuk [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2018. – Vol. 21, № 1. – P. 1–20.

19. Kisel, V. V. On the wave functions and energy spectrum for a spin 1 particle in external Coulomb field / V. V. Kisel, E. M. Ovsiuyk, V. M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2010. – Vol. 13, № 4. – P. 352–367.

20. On describing bound states for a spin 1 particle in the external Coulomb field / E. M. Ovsiyuk [et al.] // Balkan Society of Geometers Proceedings. – 2018. – Vol. 25. – P. 59–78.

21. Войнова, Я. А. Частица со спином 1 и аномальным магнитным моментом в кулоновском поле, нерелятивистская теория / Я. А. Войнова, Н. Г. Крылова, Е. М. Овсиюк // Изв. Коми науч. центра УрО РАН. – 2020. – № 5 (45).

22. Ronveaux, A. Heun's Differential Equations / A. Ronveaux. – Oxford: Oxford Univ. Press, 1995.

23. Slavyanov, S. Yu. Special functions. A unified theory based on singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – Oxford: Oxford Univ. Press, 2000.

24. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Белорус. наука, 2009. – 486 с.

25. Варшалович, Д. А. Квантовая теория углового момента / Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. Л. Херсонский. – М.; Л.: Наука, 1975. – 438 с.

References

1. Pletyukhov V. A., Red'kov V. M., Strazhev V. I. *Relativistic wave equations and internal degrees of freedom*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2015. 328 p. (in Russian).

2. Kisel V. V., Ovsiyuk E. M., Balan V., Veko O. V., Red'kov V. M. *Elementary particles with internal structure in external field. Vol. I. General formalism*. New York, Nova Science Publishers Inc., 2018. 404 p.

3. Kisel V. V., Ovsiyuk E. M., Balan V., Veko O. V., Red'kov V. M. *Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol II. Physical Problems*. New York, Nova Science Publishers Inc., 2018. 402 p.

4. Corben H. C., Schwinger J. The electromagnetic properties of mesotrons. *Physical Review*, 1940, vol. 58, no. 11, pp. 953–968. https://doi.org/10.1103/PhysRev.58.953

5. Symonds N. Vector meson in a homogeneous magnetic field. *Philosophical Magazine*, 1949, vol. 40, pp. 636–644.

6. Borgardt A. A., Karpenko D. Ya. Quantum mechanics of charged vector bosons with anomalous magnetic moment in external electromagnetic fields. *Ukraine Journal of Physics*, 1970, vol. 15, p. 1091 (in Russian).

7. Tsai W. Motion of spin-1 particles in homogeneous magnetic field, multispinor formalism. *Physical Review D*, 1971, vol. 4, no. 12, pp. 3652–3657. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.4.3652.

8. Shamaly A., Capri A. Z. Unified theories for massive spin 1 fields. *Canadian Journal of Physics*, 1973, vol. 51, no. 14, pp. 1467–1470. https://doi.org/10.1139/p73-195

9. Vlasov P. A. Electromagnetic moments of the particles of spin 1 and the equivalence of a class of wave equations. *Ukraine Journal of Physics*, 1977, vol. 22, p. 951 (in Russian).

10. Vlasov P. A. Charged particle with spin in a uniform magnetic field. *Ukraine Journal of Physics*, 1985, vol. 30, p. 1605 (in Russian).

11. Savchenko O. Ya. Vector meson in the electromagnetic field. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1993, vol. 95, no. 1, pp. 399–403. https://doi.org/10.1007/bf01015893

12. Savchenko O. Ya. Solution of the Kemmer equation and the Breit equation in a circularly polarized wave. *Theoretica l and Mathematical Physics*, 1994, vol. 101, no. 2, pp. 1296–1302. https://doi.org/10.1007/bf01018277

13. Savchenko O. Ya. Vector meson in a circularly polarized wave and constant magnetic field. *Theoretical and Mathema tical Physics*, 1995, vol. 104, no. 2, pp. 980–988. https://doi.org/10.1007/bf02065978

14. Kisel V. V., Ovsiyuk E. M., Voynova Ya. A., Veko O. V., Red'kov V. M. Quantum mechanics of spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the magnetic field. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2016, vol. 60, no. 5, pp. 83–90 (in Russian).

15. Ovsiyuk E. M., Voynova Ya. A., Kisel V. V., Balan V., Red'kov V. M. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Electric Field. *Quaternions: Theory and Applications*. New York, Nova Science Publishers Inc., 2017, pp. 47–84.

16. Ovsiyuk E. M., Voynova Ya. A., Kisel V. V., Balan V., Red'kov V. M. Techniques of projective operators used to construct solutions for a spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the external magnetic field. *Quaternions: Theory and Applications.* New York, Nova Science Publishers Inc., 2017, pp. 11–46.

17. Kisel V., Voynova Ya., Ovsiyuk E., Balan V., Red'kov V. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Magnetic Field. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2017, vol. 20, no. 1, pp. 21–39.

18. Ovsiyuk E., Voynova Ya., Kisel V., Balan V., Red'kov V. Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Electric Field. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2018, vol. 21, no. 1, pp. 1–20.

19. Kisel V. V., Ovsiuyk E. M., Red'kov V. M. On the wave functions and energy spectrum for a spin 1 particle in external Coulomb field. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2010, vol. 13, no. 4, pp. 352–367.

20. Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Voynova Ya. A., Koral'kov A. D., Kisel V. V., Red'kov V. M. On describing bound states for a spin 1 particle in the external Coulomb field. *Balkan Society of Geometers Proceedings*, 2018, vol. 25, pp. 59–78.

21. Voynova Ya. A., Krylova N. G., Ovsiyuk E. M. Spin 1 particle with anomalous magnetic moment in the Coulomb field, nonrelativistic theory. *Izvestiya Komi nauchnogo tsentra UrO RAN = Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Division of the Russian Academy of Sciences*, 2020, vol. 45, no. 5 (in Russian).

22. Ronveaux A. *Heun's Differential Equations*. Oxford, Oxford Univ. Press, 1995.

23. Slavyanov S. Yu., Lay W. Special functions. A unified theory based on singularities. Oxford, Oxford Univ. Press, 2000.

24. Red'kov V. M. *Particle Fields in the Riemann Space and the Lorents Group*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2009. 486 p. (in Russian).

25. Varshalovich D. A., Moskalev A. N., Khersonsky V. L. *Quantum Theory of Angular Momentum*. Moscow, Leningrad, Nauka Publ., 1975. 438 p. (in Russian).

Информация об авторах

Войнова Янина Александровна – кандидат физико-математических наук, преподаватель, Минское суворовское военное училище (ул. М. Богдановича, 29, 220029, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: voinovayanina@mail.ru

Крылова Нина Георгиевна – научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории диэлектрической спектроскопии гетерогенных систем физического факультета, Белорусский государственный университет (ул. Бобруйская, 5, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: krylovang@bsu.by

Овсиюк Елена Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теоретической физики и прикладной информатики, Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, г. Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Information about the authors

Yanina A. Voynova – Ph. D. (Physics and Mathematics), Teacher, Minsk Suvorov Military School (29, M. Bogdanovich Str., 220029, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: voinyuschka@mail.ru

Nina G. Krylova – Researcher of the Laboratory of Dielectric Spectroscopy of Heterogeneous Systems, Physics Faculty, Belarusian State University (5, Bobruiskaya Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: krylovang@bsu.by

Elena M. Ovsiyuk – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Head of the Department of Theoretical Physics and Applied Informatics, Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Republic of Belarus).
E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru