

УДК 531, 534, 519-7

© А. А. Кулин, Е. М. Артемова

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПРАВИЛЬНЫХ ВИХРЕВЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ В КОНДЕНСАТЕ БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА

Рассматривается задача об устойчивости вращающихся правильных вихревых  $N$ -угольников (томсоновских конфигурации) в конденсате Бозе–Эйнштейна в гармонической ловушке. Получена зависимость скорости вращения  $\omega$  томсоновской конфигурации вокруг центра ловушки в зависимости от количества вихрей  $N$  и радиуса конфигурации  $R$ . Выполнен анализ устойчивости движения таких конфигураций в линейном приближении. Для  $N \leq 6$  построены области орбитальной устойчивости конфигураций в пространстве параметров. Показано, что вихревые  $N$ -угольники для  $N > 6$  при любых параметрах системы неустойчивы.

*Ключевые слова:* вихревая динамика, томсоновские конфигурации, конденсат Бозе–Эйнштейна, линейная устойчивость.

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-56-02

### Введение

Движение  $N$  точечных вихрей расположенных в вершинах правильного  $N$ -угольника на плоскости впервые было рассмотрено в [16]. В своей работе Томсон установил, что такая полигональная конфигурация (названная томсоновской) из  $N \leq 6$  вихрей устойчива в линейном приближении и предположил неустойчивость при  $N \geq 8$ . Для случая  $N = 7$  Томсон ошибочно установил, что возмущение вихревой конфигурации будет экспоненциально расти. Полный линейный анализ провел Хавелок [6] и показал неустойчивость  $N \geq 8$ . Анализ устойчивости полигональной конфигурации вихрей в нелинейном приближении был проведен например в [20]. В [10] показано что при  $N = 7$  томсоновская конфигурация устойчива в нелинейном приближении.

В дальнейшем исследование устойчивости таких правильных  $N$ -угольных вихревых конфигурации получило развитие в разных постановках. Например, в работах [6, 19] исследована линейная устойчивость томсоновских конфигураций в круговой области. Исследование нелинейной устойчивости правильной  $N$ -угольной конфигурации в круге было проведено в [21]. Исследование устойчивости томсоновской конфигурации  $N$  вихрей на сфере в линейном и нелинейном приближениях было проведено в [2, 3, 18]. В работе [4] выполнен линейный анализ устойчивости томсоновских конфигураций с произвольным центральным вихрем.

Все вышеописанные исследования проводились в рамках классической модели точечных вихрей в идеальной жидкости. Однако задача об устойчивости томсоновских конфигураций рассматривалась в рамках разных моделей. Например в [9, 11] исследуется устойчивость полигональных конфигураций на плоскости в рамках геострофической модели, т. е. для вихрей Бесселя. Также устойчивость полигональных вихревых конфигураций рассматривалась в модели двухжидкостной плазмы [8]. Недавно была построена модель описывающая движение вихревых нитей в конденсате Бозе–Эйнштейна. Исследованию движения вихрей в Бозе конденсате, заключенном в гармонической ловушке, посвящены, например, работы [7, 15, 17]. В работе [14] были исследованы полигональные конфигурации из двух, трех и четырех вихрей в конденсате Бозе–Эйнштейна.

В данной работе мы рассматриваем томсоновскую конфигурацию в рамках модели вихрей в конденсате Бозе–Эйнштейна, заключенного в гармоническую ловушку. Показаны границы орбитальной устойчивости томсоновской конфигурации в линейном приближении в зависимости от количества вихрей. Оказывается, что как и в задачах об устойчивости такой конфигурации внутри круговой области или на сфере, устойчивой может быть конфигурация, состоящая из не более чем 6-ти вихрей.

## § 1. Уравнения движения

Будем рассматривать движение  $N$  взаимодействующих вихрей в конденсате Бозе–Эйнштейна, заключенном в гармонической ловушке [7, 15, 17]. Выберем систему координат с началом в центре гармонической ловушки. Пусть координаты  $(x_k, y_k)$  задают положение  $k$ -ого вихря. Тогда  $r_k$  — расстояние от центра ловушки до  $k$ -ого вихря и  $r_{kj}$  — расстояние между  $k$ -м и  $j$ -м вихрями задаются следующими соотношениями

$$r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}, \quad r_{kj} = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}.$$

Движение вихря условно можно разделить на две составляющие: прецессивное движение и взаимодействие с другими вихрями.

Рассмотрим составляющую, связанную с прецессией. Известно [12], что каждый отдельно рассматриваемый  $k$ -ый вихрь в гармонической ловушке будет прецессировать вокруг ее центра. Частота прецессии  $\Omega$  может быть записана в следующей форме [5, 17]

$$\Omega(r_k) = \frac{\Omega_0}{1 - r_k^2/R_{\text{TF}}^2}, \quad \Omega_0 = \frac{2\hbar\omega_r^2}{8\mu} \left( 3 + \frac{\omega_r^2}{5\omega_z^2} \right) \ln \left( \frac{2\mu}{\hbar\omega_r} \right),$$

где  $R_{\text{TF}}$  — радиус Томаса–Ферми,  $\mu$  — химический потенциал,  $\omega_r$  и  $\omega_z$  — ограничивающие радиальная и осевая частоты гармонической ловушки соответственно.

Рассмотрим парное взаимодействие между вихрями. Если расстояние между  $k$ -м и  $j$ -м вихрями равно  $r_{kj}$ , то два вихря с одинаковым топологическим зарядом  $S_k$  вращаются вокруг друг друга с угловой частотой

$$\Phi(r_{kj}) = \frac{\hbar}{mr_{kj}^2},$$

где  $m$  — масса атома вещества. С другой стороны, если вихри противоположного заряда, они движутся как вихревая пара с линейной скоростью  $v_{kj} = r_{kj}\Phi(r_{kj})$ .

Согласно [13, 17], просуммировав прецессивную скорость и скорость, обусловленную взаимодействием вихрей, уравнения движения  $N$  вихрей в конденсате Бозе–Эйнштейна могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= -S_k\Omega(r_k)y_k - \frac{b}{2} \sum_{j \neq k}^N S_j\Phi(r_{kj})(y_k - y_j), \\ \dot{y}_k &= S_k\Omega(r_k)x_k + \frac{b}{2} \sum_{j \neq k}^N S_j\Phi(r_{kj})(x_k - x_j), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $S_k$  — топологический заряд  $k$ -ого вихря ( $k = 1, \dots, N$ ),  $b$  — безразмерная константа. Хорошее согласование с экспериментом дает  $b = 1.35$  [12].

**З а м е ч а н и е 1.** Вихрь представляет собой особую точку, через которую проходит вертикальная прямая, при обходе вокруг которой фаза волновой функции конденсата меняется на  $2\pi S$ , где  $S$  — целое число [22]. Таким образом, топологический заряд  $S$  характеризует скачок фазы волновой

функции конденсата. Отметим, что в основном в работах, посвященных исследованию движения вихрей в конденсате Бозе–Эйнштейна, авторы рассматривают заряд  $S = \pm 1$ .

Используемая в классической модели точечных вихрей интенсивность вихря  $\Gamma$  (циркуляция скорости вокруг вихря) связана с топологическим зарядом соотношением  $\Gamma = 2\pi S \frac{\hbar}{m}$ .

Выполним обезразмеривание, при этом в качестве масштаба времени выберем величину  $\Omega_0^{-1}$ , а в качестве масштаба расстояния —  $R_{\text{TF}}$ . В результате перейдем к новым безразмерным переменным

$$x_k = \tilde{x}_k R_{\text{TF}}, \quad y_k = \tilde{y}_k R_{\text{TF}}, \quad t = \tilde{t} \Omega_0^{-1}.$$

В новых переменных уравнения движения (1.1) примут вид

$$\dot{x}_k = -S_k \frac{y_k}{1 - r_k^2} - c \sum_{j \neq k}^N S_j \frac{y_k - y_j}{r_{kj}^2}, \quad \dot{y}_k = S_k \frac{x_k}{1 - r_k^2} + c \sum_{j \neq k}^N S_j \frac{x_k - x_j}{r_{kj}^2}, \quad (1.2)$$

где  $c$  — новая безразмерная константа

$$c = \frac{b\hbar}{2mR_{\text{TF}}^2\Omega_0} > 0.$$

Кроме того, здесь и далее для упрощения записи опущен символ  $\sim$ , а под обозначением  $(\dot{\phantom{x}})$  понимается производная по безразмерному времени  $d/d\tilde{t}$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Уравнения (1.2) отличаются от классических уравнений, описывающих движение точечных вихрей на плоскости, дополнительным слагаемым. Аналогичное слагаемое появляется в задаче о движении точечных вихрей в круге. Однако в уравнениях движения вихрей в круге существуют и другие слагаемые, помимо входящих в (1.2). В некотором смысле модель вихрей в конденсате Бозе–Эйнштейна является промежуточной между классической моделью точечных вихрей в бесконечной области и моделью точечных вихрей в круговой области.

Уравнения (1.2) могут быть представлены в гамильтоновой форме

$$S_k \dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad S_k \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k},$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N S_k^2 \ln(1 - r_k^2) - \frac{c}{4} \sum_{k=1}^N \sum_{j \neq k}^N S_k S_j \ln(r_{kj}^2), \quad (1.3)$$

и скобкой Пуассона

$$\{x_k, y_j\} = \frac{1}{S_k} \delta_{kj}.$$

Уравнения движения (1.2) допускают следующие первые интегралы: интеграл энергии, совпадающий с гамильтонианом (1.3), и интеграл следующего вида

$$I = \sum_{k=1}^N S_k (x_k^2 + y_k^2). \quad (1.4)$$

Данный интеграл в динамике точечных вихрей называют интегралом момента. Его существование является следствием инвариантности относительно вращения вокруг центра гармонической ловушки.

В данной работе мы будем полагать, что все вихри имеют одинаковый топологический заряд  $S_k = S$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Более того, с помощью замены времени  $t \rightarrow S^{-1}t'$  уравнения (1.2) сводятся к уравнениям движения вихрей с единичным топологическим зарядом. Поэтому не умаляя общности будем считать что  $S = 1$ .

## § 2. Томсоновские конфигурации вихрей

В классических задачах о движении точечных вихрей на плоскости и в круговой области существуют стационарные решения — томсоновские конфигурации. Эти конфигурации представляют собой правильные  $N$ -угольники, которые вращаются с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг своего центра. Подобные конфигурации вихрей могут быть рассмотрены и в конденсате Бозе–Эйнштейна, находящегося в гармонической ловушке.

### § 2.1. Частные решения

Рассмотрим частные решения задачи о движении  $N$  одинаковых вихрей в конденсате Бозе–Эйнштейна, при которых вихри все время движения находятся в вершинах правильного  $N$ -угольника. Такие конфигурации в динамике классических точечных вихрей называются томсоновскими. Анализ устойчивости данных конфигурации в разных постановках посвящено множество работ, например [1, 2, 6, 19].

Для упрощения дальнейшего анализа системы представим уравнения (1.2) в комплексной форме

$$i\dot{z}_k = -\frac{z_k}{1-r_k^2} - c \sum_{j \neq k}^N \frac{z_k - z_j}{r_{kj}^2}, \quad z_k = x_k + iy_k. \quad (2.1)$$

Положение вихрей в вершинах вращающегося правильного  $N$ -угольника задается следующим выражением

$$z_k^0 = R \exp\left(i\frac{2\pi k}{N} + i\omega t\right), \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

где  $\omega$  — скорость вращения вокруг центра гармонической ловушки. Подставив выражения (2.2) в уравнения движения (2.1), получим зависимость угловой скорости  $\omega$  от радиуса конфигурации  $R$  и количества вихрей  $N$  (такое же выражение получено в работе [14])

$$\omega = \frac{2R^2 + c(N-1)(1-R^2)}{2R^2(1-R^2)}. \quad (2.3)$$

Таким образом, решения (2.2) с учетом угловой скорости (2.3) являются стационарными решениями системы (2.1).

Перейдем в подвижную систему координат, жестко связанную с томсоновской конфигурацией вихрей, вращающуюся со скоростью  $\omega$  вокруг центра ловушки, сделав следующую замену

$$\hat{z}_k = z_k e^{-i\omega t}.$$

Уравнения (2.1) в подвижной системе координат примут вид

$$i\dot{\hat{z}}_k = \omega \hat{z}_k - \frac{\hat{z}_k}{1-r_k^2} - c \sum_{j \neq k}^N \frac{\hat{z}_k - \hat{z}_j}{r_{kj}^2}, \quad (2.4)$$

здесь и далее для удобства будем опускать символ  $\hat{\phantom{x}}$ . Для полученной системы томсоновским конфигурациям соответствуют положения равновесия

$$z_k^0 = x_k^0 + iy_k^0 = R \exp\left(i\frac{2\pi k}{N}\right), \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.5)$$

Далее исследуем устойчивость этого положения равновесия.

## § 2.2. Линейная устойчивость

Выполним анализ устойчивости конфигурации (2.5) в линейном приближении. Под устойчивостью томсоновских конфигураций будем понимать устойчивость по Раусу, согласно которой конфигурация является устойчивой, если устойчива соответствующая ей неподвижная точка приведенной системы после исключения циклической переменной, отвечающей интегралу момента (1.4).

Обозначим через  $\eta_k$  малое возмущение положений равновесия ( $\eta_k \in \mathbb{C}$ )

$$z_k = z_k^0(1 + \eta_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.6)$$

Подставив выражения (2.5) и (2.6) в уравнения (2.4) и разложив по малому параметру  $\eta_k$ , получим линеаризованную систему уравнений для малых возмущений

$$i\dot{\eta}_k = \eta_k \left( \omega - \frac{1}{1 - R^2} \right) - \frac{R^2}{(1 - R^2)^2} (\eta_k + \bar{\eta}_k) + \frac{c}{4R^2} \sum_{m \neq k}^N \frac{\bar{\eta}_m}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{N} (k - m) \right)} + \\ + \bar{\eta}_k \frac{c}{R^2} \sum_{m \neq k}^N \frac{1}{\left( 1 - \exp \left( \frac{2\pi i}{N} (k - m) \right) \right)^2}. \quad (2.7)$$

Поскольку в уравнениях (2.7) выражения под знаками суммы зависят только от разности индексов, диагонализуем эти выражения с помощью преобразования Фурье. Для этого сделаем следующую замену переменных

$$\eta_k = \sum_{n=1}^N T_{kn} \xi_n, \quad T_{kn} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp \left( i \frac{2\pi}{N} kn \right). \quad (2.8)$$

Подставив (2.8) в уравнения (2.7), получим что система в новых переменных распадается на  $N$  независимых пар уравнений

$$\dot{\xi}_n = -iA\xi_n - iB_n \bar{\xi}_{N-n}, \quad \dot{\bar{\xi}}_{N-n} = iA\bar{\xi}_{N-n} + iB_{N-n} \xi_n, \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.9)$$

где

$$A = -\frac{R^2}{(1 - R^2)^2} + \frac{c(N-1)}{2R^2}, \quad B_n = -\frac{R^2}{(1 - R^2)^2} - \frac{c(n-1)(N-n-1)}{2R^2}. \quad (2.10)$$

Здесь и далее все индексы рассматриваются с точностью додобавления или вычитания  $N$ , то есть  $\xi_0 = \xi_N$ .

**З а м е ч а н и е 3.** При выводе системы (2.9) использовалось свойство цикличности по индексу выражений стоящих под знаком суммы. То есть суммирование по переменной  $m$  заменялось на суммирование по переменной  $l = (k - m) \bmod N$ .

Собственные числа системы (2.9) могут быть представлены в виде

$$\lambda_n^\pm = \pm \sqrt{B_n B_{N-n} - A^2}. \quad (2.11)$$

Среди собственных чисел (2.11) всегда существуют два нулевых собственных числа  $\lambda_N^\pm = 0$ . Данные нулевые собственные числа соответствуют интегралу момента (1.4) и сопряженной ему циклической переменной.

Остальные собственные числа  $\lambda_n$ ,  $n = 1, \dots, N-1$ , определяют орбитальную устойчивость томсоновской конфигурации в линейном приближении. Для ее устойчивости необходимо, чтобы все собственные числа (2.11) при  $n = 1, \dots, N-1$  были чисто мнимыми. Условие устойчивости может быть представлено в виде следующих неравенств

$$P_n^{(N)} = B_n B_{N-n} - A^2 < 0, \quad n = 1, \dots, N-1. \quad (2.12)$$

Оказывается справедливо следующее предложение.

**Предложение 1.** Томсоновская конфигурация, состоящая из  $N$  точечных вихрей в гармонической ловушке в конденсате Бозе–Эйнштейна

(1) орбитально устойчива в линейном приближении

– для  $N = 2, 6$  при

$$R^2 < \frac{c - \sqrt{4c}}{c - 4}, \quad (2.13)$$

– для  $N = 3, 4, 5$  при

$$R^2 < \frac{c - \sqrt{2c}}{c - 2}; \quad (2.14)$$

(2) орбитально неустойчива при  $N \geq 7$ .

**Доказательство.** Выражения (2.10) симметричны относительно замены индекса  $n \rightarrow N - n$ , следовательно  $P_{N-n}^{(N)} = P_n^{(N)}$ . Таким образом, для доказательства устойчивости достаточно рассмотреть  $[N/2]$  неравенств (2.12) при  $n = 1, \dots, [N/2]$ . Здесь и далее скобки  $[\cdot]$  означают целую часть от деления.

Нетрудно показать, что выполняется неравенство  $P_{n-1}^{(N)} < P_n^{(N)}$  для всех  $n = 2, \dots, [N/2]$ . Следовательно, для устойчивости томсоновской конфигурации  $N$  вихрей достаточно выполнения неравенства  $P_{[N/2]}^{(N)} < 0$ .

Рассмотрим далее отдельно два случая.

1. В случае **четного**  $N$  полином  $P_{[N/2]}^{(N)}$  можно представить в виде

$$P_{N/2}^{(N)} = \frac{c^2 N^2}{64R^4} \left( N^2 - 8N + 8 + \frac{16R^4}{c(R^2 - 1)^2} \right).$$

Условие устойчивости  $P_{N/2}^{(N)} < 0$  сводится к следующему неравенству:

$$N^2 - 8N + 8 < -\frac{16R^4}{c(R^2 - 1)^2}. \quad (2.15)$$

Неравенство (2.15) выполняется при  $N = 2, 6$  и выполнении условия (2.13), а также при  $N = 4$  и выполнении условия (2.14).

Для всех остальных четных  $N$  условие  $P_{N/2}^{(N)} < 0$  не выполняется. Следовательно томсоновская конфигурация, состоящая из четного числа  $N > 6$  вихрей не устойчива.

2. В случае **нечетного**  $N$  полином  $P_{[N/2]}^{(N)}$  можно представить в виде

$$P_{(N-1)/2}^{(N)} = \frac{c^2(N^2 - 1)}{64R^4} \left( (N - 1)(N - 7) + \frac{16R^4}{c(R^2 - 1)^2} \right).$$

Условие устойчивости  $P_{(N-1)/2}^{(N)} < 0$  сводится к следующему неравенству:

$$(N - 1)(N - 7) < -\frac{16R^4}{c(R^2 - 1)^2}. \quad (2.16)$$

Неравенство (2.16) выполняется при  $N = 3, 5$  и выполнении условия (2.14).

Для всех остальных нечетных  $N$  условие  $P_{(N-1)/2}^{(N)} < 0$  не выполняется. Следовательно томсоновская конфигурация, состоящая из нечетного числа  $N > 5$  вихрей, неустойчива.

На рис. 1 приведена плоскость параметров  $(c, R)$ . На данной плоскости области устойчивости для  $N = 2, 6$  обозначены правой штриховкой, а области устойчивости для  $N = 3, 4, 5$  обозначены левой штриховкой. Заметим, что в области пересечения штриховок конфигурации для  $N \leq 6$  устойчивы.  $\square$

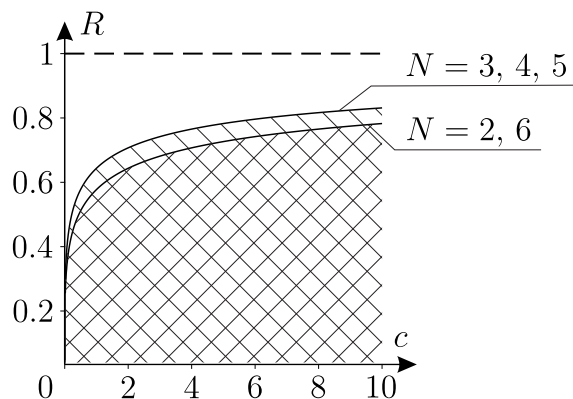


Рис. 1. Области устойчивости, задаваемые неравенствами (2.13) и (2.14).

### § 3. Заключение

В данной работе исследована орбитальная устойчивость томсоновской конфигурации  $N$  вихрей в линейном приближении. Показано, что устойчивой может быть конфигурация из не более чем шести вихрей. Интересно, что границы устойчивости в рассматриваемой задаче нелинейно зависят от числа вихрей. То есть существуют параметры, при которых конфигурация из  $N = 2$  вихрей является неустойчивой, а из  $N = 3, 4, 5$  — устойчивой.

Интересной открытой в данный момент проблемой остается исследование устойчивости рассмотренных конфигурации в нелинейном приближении.

Авторы выражают признательность Л. Г. Куракину за полезные обсуждения.

**Финансирование.** Работа выполнена в Уральском математическом центре в рамках государственного задания Министерства образования и науки России (project FEWS-2020-0009).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aref H. Point vortex motions with a center of symmetry // *The Physics of Fluids*. 1982. Vol. 25. No. 12. P. 2183–2187. <https://doi.org/10.1063/1.863710>
2. Borisov A. V., Kilin A. A. Stability of Thomson's configurations of vortices on a sphere // arXiv: nlin/0503068 [nlin.CD]. 2005. <https://arxiv.org/pdf/nlin/0503068.pdf>
3. Cabral H. E., Boatto S. Nonlinear stability of a latitudinal ring of point-vortices on a nonrotating sphere // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2003. Vol. 64. No. 1. P. 216–230. <https://doi.org/10.1137/S0036139902399965>
4. Cabral H. E., Meyer K. R., Schmidt D. S. Stability and bifurcations for the  $N + 1$  vortex problem on the sphere // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2003. Vol. 8. No. 3. P. 259–282. <https://doi.org/10.1070/RD2003v008n03ABEH000243>
5. Fetter A. L., Svidzinsky A. A. Vortices in a trapped dilute Bose–Einstein condensate // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2001. Vol. 13. No. 12. P. R135–R194. <https://doi.org/10.1088/0953-8984/13/12/201>
6. Havelock T. H. LII. The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1931. Vol. 11. No. 70. P. 617–633. <https://doi.org/10.1080/14786443109461714>
7. Koukouloyannis V., Voyatzis G., Kevrekidis P. G. Dynamics of three noncorotating vortices in Bose–Einstein condensates // *Physical Review E*. 2014. Vol. 89. No. 4. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.042905>
8. Kurakin L. G., Lysenko I. A. On the stability of the orbit and the invariant set of Thomson's vortex polygon in a two-fluid plasma // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 16. No. 1. P. 3–11. <https://doi.org/10.20537/nd200101>

9. Kurakin L. G., Ostrovskaya I. V. On stability of Thomson's vortex  $N$ -gon in the geostrophic model of the point Bessel vortices // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2017. Vol. 22. No. 7. P. 865–879. <https://doi.org/10.1134/S1560354717070085>
10. Kurakin L. G., Yudovich V. I. The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2002. Vol. 12. No. 3. P. 574–595. <https://doi.org/10.1063/1.1482175>
11. Laurent-Polz F. Point vortices on a rotating sphere // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2005. Vol. 10. No. 1. P. 39–58. <https://doi.org/10.1070/RD2005v010n01ABEH000299>
12. Middelkamp S., Kevrekidis P. G., Frantzeskakis D. J., Carretero-González R., Schmelcher P. Bifurcations, stability, and dynamics of multiple matter-wave vortex states // *Physical Review A*. 2010. Vol. 82. No. 1. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.013646>
13. Middelkamp S., Torres P. J., Kevrekidis P. G., Frantzeskakis D. J., Carretero-González R., Schmelcher P., Hall D. S. Guiding-center dynamics of vortex dipoles in Bose–Einstein condensates // *Physical Review A*. 2011. Vol. 84. No. 1. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.011605>
14. Navarro R., Carretero-González R., Torres P. J., Kevrekidis P. G., Frantzeskakis D. J., Ray M. W., Altıntaş E., Hall D. S. Dynamics of a few corotating vortices in Bose–Einstein condensates // *Physical Review Letters*. 2013. Vol. 110. No. 22. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.225301>
15. Ryabov P. E., Sokolov S. V. Phase topology of two vortices of the identical intensities in Bose–Einstein condensate // *arXiv: 1812.11749v1 [nlin.SI]*. 2018. <https://arxiv.org/pdf/1812.11749.pdf>
16. Thomson J. J. A treatise on the motion of vortex rings: an essay to which the Adams prize was adjudged in 1882, in the University of Cambridge. Macmillan, 1883.
17. Torres P. J., Kevrekidis P. G., Frantzeskakis D. J., Carretero-González R., Schmelcher P., Hall D. S. Dynamics of vortex dipoles in confined Bose–Einstein condensates // *Physics Letters A*. 2011. Vol. 375. No. 33. P. 3044–3050. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.06.061>
18. Богомолов В. А. Модель колебаний центров действия атмосферы // *Физика атмосферы и океана*. 1979. Т. 15. № 3. С. 243–249.
19. Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
20. Куракин Л. Г. Об устойчивости правильного вихревого  $n$ -угольника // *Докл. РАН*. 1994. Т. 335. № 6. С. 729–731.
21. Куракин Л. Г. Устойчивость, резонансы и неустойчивость правильных вихревых многоугольников внутри круговой области // *Доклады Академии наук*. 2004. Т. 399. № 1. С. 52–55. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17354346>
22. Питаевский Л. П. Конденсация Бозе–Эйнштейна в магнитных ловушках. Введение в теорию // *Успехи физических наук*. 1998. Т. 168. № 6. С. 641–653. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0168.199806e.0641>

Поступила в редакцию 01.10.2020

Килин Александр Александрович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

E-mail: aka@rcd.ru

Артемова Елизавета Марковна, студент, лаборант-исследователь, Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

E-mail: liz-artemova2014@yandex.ru

**Цитирование:** А. А. Килин, Е. М. Артемова. Устойчивость правильных вихревых многоугольников в конденсате Бозе–Эйнштейна // *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*. 2020. Т. 56. С. 20–29.



*Keywords:* vortex dynamics, Thomson configurations, Bose–Einstein condensate, linear stability.

MSC2010: 70H05, 70H14, 76Yxx, 34D20, 37Jxx

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-56-02

We consider the problem of the stability of rotating regular vortex  $N$ -gons (Thomson configurations) in a Bose-Einstein condensate in a harmonic trap. The dependence of the rotation velocity  $\omega$  of the Thomson configuration around the center of the trap is obtained as a function of the number of vortices  $N$  and the radius of the configuration  $R$ . The analysis of the stability of motion of such configurations in the linear approximation is carried out. For  $N \leq 6$ , regions of orbital stability of configurations in the parameter space are constructed. It is shown that vortex  $N$ -gons for  $N > 6$  are unstable for any parameters of the system.

**Funding.** The work was carried out in the Ural Mathematical Center within the framework of the state assignment of the Ministry of Education and Science of Russia (project FEWS-2020-0009).

#### REFERENCES

1. Aref H. Point vortex motions with a center of symmetry, *The Physics of Fluids*, 1982, vol. 25, no. 12, pp. 2183–2187. <https://doi.org/10.1063/1.863710>
2. Borisov A. V., Kilin A. A. Stability of Thomson’s configurations of vortices on a sphere, *arXiv: nlin/0503068 [nlin.CD]*, 2005. <https://arxiv.org/pdf/nlin/0503068.pdf>
3. Cabral H. E., Boatto S. Nonlinear stability of a latitudinal ring of point-vortices on a nonrotating sphere, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2003, vol. 64, no. 1, pp. 216–230. <https://doi.org/10.1137/S0036139902399965>
4. Cabral H. E., Meyer K. R., Schmidt D. S. Stability and bifurcations for the  $N + 1$  vortex problem on the sphere, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2003, vol. 8, no. 3, pp. 259–282. <https://doi.org/10.1070/RD2003v008n03ABEH000243>
5. Fetter A. L., Svidzinsky A. A. Vortices in a trapped dilute Bose–Einstein condensate, *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2001, vol. 13, no. 12, pp. R135–R194. <https://doi.org/10.1088/0953-8984/13/12/201>
6. Havelock T. H. LII. The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1931, vol. 11, no. 70, pp. 617–633. <https://doi.org/10.1080/14786443109461714>
7. Koukoulouyannis V., Voyatzis G., Kevrekidis P. G. Dynamics of three noncorotating vortices in Bose–Einstein condensates, *Physical Review E*, 2014, vol. 89, no. 4. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.042905>
8. Kurakin L. G., Lysenko I. A. On the stability of the orbit and the invariant set of Thomson’s vortex polygon in a two-fluid plasma, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 16, no. 1, pp. 3–11. <https://doi.org/10.20537/nd200101>
9. Kurakin L. G., Ostrovskaya I. V. On stability of Thomson’s vortex  $N$ -gon in the geostrophic model of the point Bessel vortices, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017, vol. 22, no. 7, pp. 865–879. <https://doi.org/10.1134/S1560354717070085>
10. Kurakin L. G., Yudovich V. I. The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2002, vol. 12, no. 3, pp. 574–595. <https://doi.org/10.1063/1.1482175>
11. Laurent-Polz F. Point vortices on a rotating sphere, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2005, vol. 10, no. 1, pp. 39–58. <https://doi.org/10.1070/RD2005v010n01ABEH000299>

12. Middelkamp S., Kevrekidis P. G., Frantzeskakis D. J., Carretero-González R., Schmelcher P. Bifurcations, stability, and dynamics of multiple matter-wave vortex states, *Physical Review A*, 2010, vol. 82, no. 1. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.013646>
13. Middelkamp S., Torres P. J., Kevrekidis P. G., Frantzeskakis D. J., Carretero-González R., Schmelcher P., Hall D. S. Guiding-center dynamics of vortex dipoles in Bose–Einstein condensates, *Physical Review A*, 2011, vol. 84, no. 1. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.011605>
14. Navarro R., Carretero-González R., Torres P. J., Kevrekidis P. G., Frantzeskakis D. J., Ray M. W., Altıntaş E., Hall D. S. Dynamics of a few corotating vortices in Bose–Einstein condensates, *Physical Review Letters*, 2013, vol. 110, no. 22. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.225301>
15. Ryabov P. E., Sokolov S. V. Phase topology of two vortices of the identical intensities in Bose–Einstein condensate, *arXiv: 1812.11749v1 [nlin.SI]*, 2018. <https://arxiv.org/pdf/1812.11749.pdf>
16. Thomson J. J. A treatise on the motion of vortex rings: an essay to which the Adams prize was adjudged in 1882, in the University of Cambridge. Macmillan, 1883.
17. Torres P. J., Kevrekidis P. G., Frantzeskakis D. J., Carretero-González R., Schmelcher P., Hall D. S. Dynamics of vortex dipoles in confined Bose–Einstein condensates, *Physics Letters A*, 2011, vol. 375, no. 33, pp. 3044–3050. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.06.061>
18. Bogomolov V. A. Model of oscillations of the centers of action of the atmosphere, *Fizika Atmosfery i Okeana*, 1979, vol. 15, no. 3, pp. 243–249 (in Russian).
19. Borisov A. V., Mamaev I. S. *Matematicheskie metody dinamiki vikhrevykh struktur* (Mathematical methods in the dynamics of vortex structures), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2005.
20. Kurakin L. G. On the stability of a regular vortex  $n$ -gon, *Dokl. Ross. Akad. Nauk*, 1994, vol. 335, no. 6, pp. 729–731 (in Russian).
21. Kurakin L. G. Stability, resonances and instability of regular vortex polygons inside a circular region, *Doklady Akademii Nauk*, 2004, vol. 399, no. 1, pp. 52–55 (in Russian). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17354346>
22. Pitaevskii L. P. Bose–Einstein condensation in magnetic traps. Introduction to the theory, *Physics–Uspekhi*, 1998, vol. 41, no. 6, pp. 569–580. <https://doi.org/10.1070/PU1998v041n06ABEH000407>

Received 01.10.2020

Kilin Aleksandr Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Ural Mathematical Center, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

E-mail: [aka@red.ru](mailto:aka@red.ru)

Artemova Elizaveta Markovna, Student, Ural Mathematical Center, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

E-mail: [liz-artemova2014@yandex.ru](mailto:liz-artemova2014@yandex.ru)

**Citation:** A. A. Kilin, E. M. Artemova. Stability of regular vortex polygons in Bose–Einstein condensate, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 56, pp. 20–29.