Математика и математическое моделирование. 2020. № 5. С. 13–32.
DOI: 10.24108/mathm.0520.0000238

Математика и Математическое моделирование
Сетевое научное издание
http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

УДК 004.6+57.087.1

Условия взаимозамещаемости моделей при представлении автономных процессов в конечномерных и бесконечномерных пространствах

Носов А. П.[1,*], Ахрем А. А.[1], Рахманкулов В. З.[1]

[1]Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия
[*]nosov@isa.ru

Получены условия взаимозамещаемости конечномерных, бесконечномерных, и дискретных моделей динамики автономных процессов и на примере одномерных процессов показано, что при определенном соотношении параметров моделей и соответствующем выборе начальных функций эти условия удовлетворяются. Показано, как при соблюдении условий взаимозамещаемости, процесс, порожденный обыкновенным дифференциальным уравнением, можно представить в функциональном пространстве траекторией дискретной динамической системы. Результаты проверяются непосредственными вычислениями на конкретных примерах. Взаимозамещаемость используется для сравнения разнонаправленных процессов, представленных различными типами динамических моделей. Приведены примеры моделей ошибки сравнения одномерных разнонаправленных процессов, представленных динамическими моделями различных типов и имеющих различный характер поведения. Точность модели сравнения запаздывающего типа иллюстрируется примером численного моделирования.

Ключевые слова: моделирование; обыкновенные дифференциальные уравнения; дифференциальные уравнения запаздывающего типа; динамические системы, автономные процессы

Представлена в редакцию: 06.11.2020.

Введение

Во многих прикладных областях необходимо решать задачи динамики в условиях действия не одного, а двух и более автономных разнонаправленных процессов. Свойство автономности позволяет описывать динамику каждого процесса с помощью разных моделей, а свойство разнонаправленности приводит к взаимному влиянию одного процесса на другой, допуская компенсацию динамики одного автономного процесса с помощью динамических свойств противоположного процесса.

В качестве примера можно привести медицинскую задачу регулирования концентрации глюкозы в крови больных сахарным диабетом по методологии инсулинотерапии. Для этой задачи характерны два основных автономных динамических процесса — автономный процесс повышения уровня глюкозы в крови в результате приема пищи и противоположный ему процесс снижения уровня глюкозы в результате действия внешних терапевтических инъекций инсулина. Динамическое взаимодействие указанных процессов определяет обобщенную реакцию организма больного на разнонаправленные возмущения. Остаточная концентрация глюкозы в крови в каждый момент времени описывается гликемией, значения которой получают с помощью сенсоров системы непрерывного мониторинга глюкозы (CGM). Процесс подачи инсулина в организм является дискретным с неравномерным периодом инъекции инсулиновых доз. Для расчета доз применяют разные методы, включая синтез замкнутого контура гликемического контроля. Характерной особенностью задачи гликемического контроля являются большие и неодинаковые запаздывания в обоих автономных процессах как повышения, так и снижения концентрации глюкозы в крови больного [1, 2].

Таким образом, при решении динамических задач стабилизации при наличии нескольких автономных разнонаправленных процессов необходимо исследовать фундаментальные проблемы приводимости моделей динамики к единообразной форме, что позволяет анализировать и сравнивать автономные процессы с учетом влияния запаздываний на обобщенную динамику систем стабилизации.

1. Цель работы и постановка задачи

Цель работы — предложить подход к сравнению процессов, представленных различными типами динамических моделей. В настоящей статье развивается идея приводимости моделей динамики к единообразной форме, основанная на механизмах взаимозамещаемости моделей динамики исследуемого процесса.

В работе рассматриваются динамические модели в классе обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений запаздывающего типа. Поскольку пространства решений таких уравнений различны в общем случае: конечномерное арифметическое пространство для решений обыкновенного дифференциального уравнения и бесконечномерное функциональное пространство для решений дифференциального уравнения запаздывающего типа [3, 4], проблема приводимости моделей динамики к единообразной форме связана с особенностями представления процесса в обоих типах пространств. Так, для приведения моделей динамики процесса к единообразной форме потребуется определить, с учетом этих особенностей, условия, при выполнении которых модели конечномерной и бесконечномерной динамики взаимозаменяемы, и найти соотношения на параметры моделей, при которых эти условия выполняются.

2. Основные обозначения и понятия

Пусть $\mathbb{R} = (-\infty,\, +\infty)$, $\mathbb{R}^n$ — n-мерное линейное вещественное векторное пространство с евклидовой нормой $|\cdot|$, и $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел в $\mathbb{R}$. Для заданного вещественного числа $h \geq 0$ рассмотрим банахово пространство непрерывных функций $C \triangleq C\Big([-h,\, 0], \mathbb{R}^n\Big)$, отображающих интервал $[-h,\ 0]$ в $\mathbb{R}^n$ с топологией равномерной сходимости, вводя норму элемента φ в C как $\|\varphi\| = \max\limits_{-h\le\vartheta\le 0} |\varphi(\vartheta)|$. Для любого $t \in \mathbb{R}$ определим $x_t \in C$ соотношением $x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta)$, $-h \le \vartheta \le 0$.

Напомним необходимые определения абстрактной теории автономных процессов и динамических систем следуя обозначениям и терминологии [4].

Пусть $\mathcal{X}$ — банахово пространство, $\mathbb{R}^+ = [0,\ +\infty)$, u: $\mathcal{X} \times \mathbb{R}^+ \to \mathcal{X}$ — заданное отображение; определим $U(t)$: $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ для $t \in \mathbb{R}^+$ равенством $U(t)\,x = u(x,t)$.

Определение 1. *Автономный процесс* (или *непрерывная динамическая система*) на $\mathcal{X}$ есть отображение u: $\mathcal{X} \times \mathbb{R}^+ \to \mathcal{X}$, удовлетворяющее следующим свойствам:

(i) $U(t)\,x$ непрерывно для $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{X}$;

(ii) $U(0) = I$, т.е. тождественный оператор;

(iii) $U(t+\tau) = U(t)\,U(\tau)$, для $t,\ \tau \in \mathbb{R}^+$.

Функцию $u(x,t)$ можно рассматривать как состояние системы в момент $t \ge 0$, если первоначально x было состоянием системы в начальный момент $t = 0$.

Определение 2. Пусть u — процесс на $\mathcal{X}$. *Траектория* $\tau^+(x)$, начинающаяся в $x \in \mathcal{X}$, есть множество в $\mathcal{X}$, определенное формулой

$$\tau^+(x) = \Big\{(t, U(t)\,x),\ t \in \mathbb{R}^+\Big\}.$$

Орбита $\gamma^+(x)$, начинающаяся в x, — это множество в $\mathcal{X}$, определяемое следующим образом:

$$\gamma^+(x) = \Big\{U(t)\,x,\ t \in \mathbb{R}^+\Big\}.$$

Если H подмножество $\mathcal{X}$, то $\tau^+(H) = \bigcup\limits_{x\in H} \tau^+(x)$, и $\gamma^+(H) = \bigcup\limits_{x\in H} \gamma^+(x)$.

Определение 3. Если T: $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — непрерывное отображение, то семейство $\{T^k,\ k \ge 0\}$ итераций T называется *дискретной динамической системой.*

Если $\{T^k,\ k \ge 0\}$ — дискретная динамическая система, то орбита $\gamma^+(x)$, начинающаяся в $x \in \mathcal{X}$, — это $\gamma^+(x) = \{T^k x,\ k \ge 0\}$, а орбита $\gamma^+(H)$, с начальным множеством $H \subseteq \mathcal{X}$, есть $\gamma^+(H) = \bigcup\limits_{x\in H} \gamma^+(x)$.

Определение 4. Если u есть динамическая система на $\mathcal{X}$, то *интеграл динамической системы* на $\mathbb{R}$ есть непрерывная функция $y : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$, такая, что $\tau^+(0, y(0)) = \Big\{(t, y(t)),\ t \ge 0\Big\}$. Интеграл y есть *интеграл, проходящий через* $(0,x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X}$ если $y(0) = x$. *Интегральное множество на* $\mathbb{R}$ есть множество M_0 в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$, такое что для любого $(0,x) \in M_0$ имеется интеграл y на $\mathbb{R}$, проходящий через $(0,x)$ и $(s, y(s)) \in M_0$ для всех $s \in \mathbb{R}$.

Определение 5. *Интеграл* z *дискретной динамической системы* $\{T^k,\ k \ge 0\}$ есть функция $z : \mathbb{Z} \to \mathcal{X}$ такая, что для любого $k_0 \in \mathbb{Z}$ имеем $T^k z(k_0) = z(k+k_0)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. *Интегральное множество* M дискретной динамической системы есть подмножество множества $\mathbb{Z} \times \mathcal{X}$, такое что для любого $(k_0, x) \in M$ имеется интеграл z на $\mathbb{Z}$, проходящий через (k_0, x) и $(k, z(k)) \in M$ для всех $k \in \mathbb{Z}$.

Используя данные обозначения и опираясь на приведенные понятия, далее рассмотрим пример того, как и почему один и тот же автономный процесс может быть представлен на банаховых пространствах $\mathbb{R}$ и C динамическими моделями различных типов.

3. Автономные процессы на $\mathbb{R}$ и на C

Пусть $n = 1$, $\mathbb{Z}^+$ — множество целых неотрицательных чисел в $\mathbb{R}$, и заданы некоторые числа a, b, $c \in \mathbb{R}$. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = ax(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

дискретную динамическую систему

$$\phi_{k+1} = b\phi_k, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad \phi_0 = \varphi \in C, \tag{2}$$

и дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{y}(t) = cy(t-h), \quad t \geq 0, \quad y_0 = \psi \in C, \tag{3}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}$ и $y(t) \in \mathbb{R}$ при каждом $t \in \mathbb{R}$, и $\varphi(k) \in C$ при каждом $k \in \mathbb{Z}^+$; таким образом имеем отображения $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ согласно (1), $b\colon C \to C$ по правилу (2), и $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в силу (3). Отображения a, b и c порождают автономные процессы.

3.1. Автономный процесс, порождаемый обыкновенным дифференциальным уравнением. Рассмотрим как обыкновенное дифференциальное уравнение порождает автономный процесс (динамическую систему) на $\mathbb{R}$.

Утверждение 1. *Отображение $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, действующее по правилу (1), порождает автономный процесс на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Если $x(x_0)(t)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения (1), начинающееся в $x_0 \in \mathbb{R}$ ($x(x_0)(0) = x_0$), то функция $x(x_0)(t)$ непрерывна по t и x_0 для $x_0 \in \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{R}^+$, и, полагая $u(x_0, t) = x(x_0)(t)$, получаем автономный процесс u на $\mathbb{R}$, для которого $U(t) = X(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $X(t)$ — оператор Коши уравнения (1), для которого, очевидно, выполнены свойства (i)–(iii) определения 1.

Утверждение 1 доказано.

Если автономный процесс порождается обыкновенным дифференциальным уравнением, то согласно определению 2, траектория $\tau^+(x_0)$, начинающаяся в $x_0 \in \mathbb{R}$, есть множество в $\mathbb{R}$, определенное формулой $\tau^+(x_0) = \big\{(t, X(t)\,x_0),\ t \in \mathbb{R}^+\big\}$, или множество пар $\tau^+(x_0) = \big\{(t, x(t)), t \in \mathbb{R}^+\big\}$, образующих график решения $x(x_0)(t)$ обыкновенного дифференциального уравнения (1) вдоль временной оси. Орбита $\gamma^+(x_0)$, начинающаяся в x_0, — это множество в $\mathbb{R}$, определяемое как $\gamma^+(x_0) = \big\{X(t)\,x_0,\ t \in \mathbb{R}^+\big\}$, или множество точек фазовой кривой решения $x(x_0)(t)$ обыкновенного дифференциального уравнения (1) в $\mathbb{R}$. Согласно определению 4, интеграл автономного процесса, порожденного обыкновенным дифференциальным уравнением (1), проходящий через $(0,\ x) \in \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}$, есть решение обыкновенного дифференциального уравнения (1), начинающееся в $x_0 \in \mathbb{R}$ (см., например, [5]).

Заметим, что для всякого $h > 0$ «фрагмент» решения $x(x_0)(t)$ обыкновенного дифференциального уравнения (1) при любом $t \geq h$ на отрезке $\vartheta \in [t-h,\ t]$ есть элемент C (по свойству решений обыкновенного дифференциального уравнения); обозначим его $x_t(x_0) \in C$.

Рассмотрим, как можно представить процесс, порожденный обыкновенным дифференциальным уравнением (1), элементами C. Опишем подмножество D, состоящее из элементов C, и некоторые его свойства, которые потребуются для этой цели.

3.2. Свойства множества $\boldsymbol{D}$. Пусть $d \in \mathbb{R}$ — некоторое вещественное число и подмножество $D \subset C$ содержит только такие функции $\varphi \in D$, которые удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению $\dot{\varphi}(\vartheta) = d\,\varphi(\vartheta)$, $-h \leq \vartheta \leq 0$.

Утверждение 2. *Для всякой функции $\varphi \in D$ значения $\varphi(\vartheta)$, $-h \leq \vartheta \leq 0$ в $\mathbb{R}$ определяются формулой*

$$\varphi(\vartheta) = \varphi(\vartheta)\varphi(0), \tag{4}$$

где $\varphi(\vartheta) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — оператор Коши уравнения $\dot{\varphi}(\vartheta) = d\,\varphi(\vartheta)$ в $\mathbb{R}$ для $\vartheta \in [-h,\ 0]$.

Данное утверждение основано на представлении общего решения дифференциального уравнения в форме Коши [6]. Заметим, что в (4) направление времени «справа–налево» используется для сохранения привычных обозначений начального условия в нулевой момент времени. Из Утверждения 2 в силу единственности решения задачи Коши непосредственно вытекают следствия.

Следствие 1. Всякий элемент φ множества D однозначно определяется значением функции $\varphi(\vartheta)$ в $\mathbb{R}$ на правом конце отрезка $[-h,\ 0]$, т.е. $\varphi(0)$.

Следствие 2. В каждой точке пространства $\mathbb{R}$ однозначно определен элемент множества D.

Действительно, начальное значение $\varphi(0)$ на правом конце отрезка может быть любым вещественным числом и в силу следствия 1 определяет элемент $\varphi \in D$.

Для $\varphi \in D$ определим понятие сдвига.

Определение 6. *Сдвигом элемента $\varphi \in D$ на величину $\vartheta_0 \in [-h,\ 0]$* назовем элемент $\psi_{\vartheta_0}(\varphi) \in C$, описываемый для $-h \leq \vartheta \leq 0$ формулой

$$\psi_{\vartheta_0}(\varphi)(\vartheta) = \varphi(\vartheta)\varphi(\vartheta_0)\varphi(0). \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что определенный таким образом сдвиг элемента $\varphi \in D$ не выводит за пределы множества D. Действительно, примем $\psi_{\vartheta_0}(\varphi)(0) = \varphi(\vartheta_0)\varphi(0)$ за значение функции $\psi(\vartheta)$ на правом конце отрезка $[-h, 0]$, и получим элемент $\psi \in D$ по формуле (4) для $\psi(0) = \varphi(\vartheta_0)\varphi(0)$ в виде $\psi(\vartheta) = \varphi(\vartheta)\psi(0)$.

Определение 7. Зададим отображение $\vartheta(\tau)$: $D \to D$, определенное для каждого $\tau \in$ $\in [-h,\ 0]$ формулой $\vartheta(\tau)\varphi = \psi_\tau(\varphi)$, которое будем называть *оператором сдвига на D*.

Утверждение 3. *Для оператора сдвига $\vartheta(\tau) : D \to D$ выполнены свойства:*

$$\vartheta(0) = I; \tag{6}$$

$$\vartheta(\tau)\vartheta(\sigma) = \vartheta(\tau + \sigma), \quad \tau, \sigma \in [-h, 0]; \tag{7}$$

$$\vartheta(\tau)\varphi \text{ непрерывно по } (\tau, \varphi) \in [-h, 0] \times D. \tag{8}$$

Доказательство. Свойства (6)–(8) вытекают из свойств оператора Коши. Свойство (6) есть следствие того, что $\varphi(0) = I$, так как при этом $\psi_0(\varphi)(0) = \varphi(0)\varphi(0) = \varphi(0)$, и по следствию 1 имеем, что $\psi_0(\varphi) \equiv \varphi$, т.е. $\vartheta(0)\varphi = \varphi$. Свойство (7) есть следствие того, что $\varphi(\tau)\varphi(\sigma) = \varphi(\tau + \sigma)$. Действительно, $\vartheta(\tau)\vartheta(\sigma)\varphi = \psi_\tau\big(\psi_\sigma(\varphi)\big)$. Из определения сдвига находим $\psi_\tau\big(\psi_\sigma(\varphi)\big) = \varphi(\vartheta)\varphi(\tau)\psi_\sigma(\varphi)(0) = \varphi(\vartheta)\varphi(\tau)\varphi(\sigma)\varphi(0) = \varphi(\vartheta)\varphi(\tau+\sigma)\varphi(0)$, и $\vartheta(\tau+\sigma)\varphi = \varphi(\vartheta)\varphi(\tau+\sigma)\varphi(0)$, откуда сразу получаем требуемое свойство. Свойство (8) есть следствие непрерывной зависимости решений обыкновенного дифференциального уравнения от начальных данных.

Утверждение 3 доказано.

Перечисленные свойства подмножества $D \in C$ позволяют сформулировать условия, при которых дискретная динамическая система порождает непрерывный процесс на D.

3.3. Автономные процессы, порождаемые дискретной динамической системой. Рассмотрим дискретную динамическую систему (2) на множестве D. В этом случае справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. *Множество $D \subset C$ является инвариантным множеством дискретной динамической системы (2), т.е. $bD = D$.*

Данное утверждение основано на свойстве решений обыкновенных дифференциальных уравнений оставаться таковыми при умножении на константу.

Обозначим через $z_t(k)$ последовательность элементов из C следующим образом:

$$z_t(k) = z_{t_k} = z(t_k + \vartheta), \quad t_k = kh, \;\; -h \le \vartheta \le 0, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Утверждение 5. *Функция $z_t(k)$: $\mathbb{Z} \to D \to$ является интегралом дискретной динамической системы (2), а множество $M = \mathbb{Z}^+ \times D$ является ее интегральным множеством.*

Доказательство. Вначале проверим, что для любого $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ и всех $k \in \mathbb{Z}^+$ справедливо $b^k z_t(k_0) = z_t(k_0 + k)$. Для любого $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ непосредственно из (2) имеем $z_t(k_0) = b^{k_0} z_t(0)$, следовательно $z_t(k_0 + k) = b^{k_0+k} z_t(0) = b^k b^{k_0} z_t(0) = b^k z_t(k_0)$, что и требовалось. Далее, для любой пары $(k_0, \varphi) \in M$ имеется проходящий через (k_0, φ) интеграл $z_t(k_0) = \varphi$, и при любом $k \in \mathbb{Z}^+$ для этого интеграла пара $(k, z_t(k))$ принадлежит множеству M в силу Утверждения 4 об инвариантности множества D.

Утверждение 5 доказано.

В общем случае, если для функции $\varphi \in D$ не выполнено условие $b\varphi(-h) = \varphi(0)$, интеграл $z_t(k)$ не является непрерывной по t функцией, так как терпит разрывы в точках $t = kh$.

Теорема 1. При $b = e^{dh}$ интеграл дискретной динамической системы (2) порождает автономные процессы на D и на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Вначале покажем, что функция $x(\varphi)(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, определенная как $x(\varphi)(t) = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} z_t(k)$, начинающаяся в φ (т.е. $x(\varphi)(0) = \varphi(0)$), непрерывна по $t \in \mathbb{R}^+$. Затем убедимся в том, что функция $x_t(\varphi) : \mathbb{R}^+ \to D$ является интегралом динамической системы на D, а функция $x(\varphi)(t)$ — ее интегралом на $\mathbb{R}$.

1. Функция $x(\varphi)(t)$ составлена из последовательности «фрагментов», каждый из которых есть непрерывная на отрезке $[(k-1)h, kh]$ функция — элемент D. Значение $b = e^{dh}$ «склеивает» все фрагменты в единую непрерывную «линию», так как при этом значении b значение фрагмента на конце «своего» отрезка совпадает со значением следующего фрагмента в начале следующего отрезка. Действительно, заметим, что для любого элемента $\varphi \in D$ справедливо в силу (4) соотношение $\varphi(-h) = e^{-dh}\varphi(0)$. Для произвольного $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ рассмотрим интеграл, проходящий через $(k_0, \varphi) \in M$. Для k_0 функция $z_t(k_0)$ определена как функция t на отрезке $t \in [(k_0-1)h, k_0 h]$. Имеем для $z_t(k_0) = \varphi$, что $\varphi(0) = z(k_0 h)$ и $\varphi(-h) = z((k_0-1)h)$, откуда $e^{dh}z((k_0-1)h) = z(k_0 h)$. Из уравнения $z_t(k_0+1) = b\, x_t(z_0)$ получаем, что $z(k_0 h) = e^{dh}z((k_0-1)h)$. Таким образом, значение функции $z_t(k_0)$ на правом конце $z(k_0 h)$, равное $e^{dh}z((k_0-1)h)$ в силу того, что $z_t(k_0) \in D$, совпадает со значением функции $z_t(k_0+1)$ (которая определена уже при $t \in [k_0 h, (k_0+1)h]$) на ее левом конце $z(k_0 h)$, которое также равно $e^{dh}z((k_0-1)h)$, но уже как результат применения отображения b к функции $z_t(k_0)$ в силу уравнения (2), что дает непрерывную функцию $x(\varphi)(t) = z_t(k_0) \cup z_t(k_0+1)$ при $t \in [(k_0-1)h, (k_0+1)h]$. Поскольку все это справедливо для любого $k \in \mathbb{Z}$, выбирая $k_0 = 0$, в итоге получаем, что функция $x(\varphi)(t)$ непрерывна по t на всем $\mathbb{R}^+$.

2. Рассмотрим отображение $x_t(\varphi) : \mathbb{R}^+ \to D$, где $x_t(\varphi) = x(\varphi)(t+\vartheta)$, $-h \le \vartheta \le 0$, т.е. при каждом $t \in \mathbb{R}^+$ функция $x_t(\varphi)$ представляет собой фрагмент функции $x(\varphi)(t)$ на интервале $[t-h, t]$ и начинается в φ ($x_0(\varphi) = \varphi$, так как $x(\varphi)(0) = \varphi(0)$, и начальное значение $\varphi(0)$ в силу следствия 1 однозначно определяет элемент в D, равный φ). Полагая $u(\varphi, t) = x_t(\varphi)$ определим $U(t) : D \to D$ для $t \in \mathbb{R}^+$ равенством $U(t)\varphi = u(\varphi, t)$.

Лемма 1. Для оператора $U(t) : D \to D$ выполнены свойства:

$$U(0) = I; \tag{9}$$

$$U(t)U(\tau) = U(t+\tau), \quad t,\, \tau \in \mathbb{R}^+; \tag{10}$$

$$U(t)\varphi \text{ непрерывно по } (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times D. \tag{11}$$

Доказательство. Свойство (9) выполняется, так как функция $x_t(\varphi)$ начинается в φ, поэтому $U(0)\varphi = u(0, \varphi) = x_0(\varphi) = \varphi$. Свойство (10) выполняется, так как оператор $U(t)$ есть суперпозиция двух отображений b: $D \to D$ и ϑ: $D \to D$, каждое из которых обладает аналогичным свойством. Действительно, для любых $t,\, \tau \in \mathbb{R}^+$ найдется такое $k \in \mathbb{Z}^+$, что $t+\tau \in [(k-1)]h,\, kh]$, и элемент $x_{t+\tau}(\varphi) \in D$ можно получить сдвигом элемента $z_t(k) = b^k\varphi$ на величину $\vartheta_0 = kh - (t+\tau)$, т.е. как $x_{t+\tau}(\varphi) = \vartheta(\vartheta_0)b^k\varphi$. Далее, поскольку в силу следствия 2 в каждой точке $\mathbb{R}$ однозначно определен элемент пространства D, рассмотрим элемент $\varphi_\tau \in D$ с началом в точке $x(\varphi)(\tau)$, и применим к нему оператор $U(t)$. Поскольку для любого $t \in \mathbb{R}^+$ найдется такое $k_t \in \mathbb{Z}^+$, что $t \in [(k_t - 1)]h,\ k_t h]$, и элемент $x_t(\varphi_\tau) = U(t)\varphi_\tau \in D$, можно получить сдвигом элемента $z_t(k_t) = b^{k_t}\varphi_t$ на величину $\vartheta_t = k_t h - t$, т.е. как $x_t(\varphi_\tau) = \vartheta(\vartheta_t)b^{k_t}\varphi_t$. Аналогично, для $\tau \in \mathbb{R}^+$ найдется такое $k_\tau \in \mathbb{Z}^+$, что $\tau \in [(k_\tau - 1)]h, k_\tau h]$, и элемент $\varphi_\tau = x_\tau(\varphi) \in D$ можно получить сдвигом элемента $z_\tau(k_\tau) = b^{k_\tau}\varphi$ на величину $\vartheta_\tau = k_\tau h - \tau$, т.е. как $x_\tau(\varphi) = \vartheta(\vartheta_\tau)b^{k_\tau}\varphi$. Отсюда получаем, что $x_t(x_\tau(\varphi)) = \vartheta(\vartheta_t)b^{k_t}\vartheta(\vartheta_\tau)b^{k_\tau}\varphi = \vartheta(\vartheta_t + \vartheta_\tau)b^{k_t + k_\tau}\varphi$ (оператор ϑ и b перестановочны в данном случае). Заметим, что $k_t + k_\tau = k$, так как $(k_\tau + k_t - 1)h \leq \tau + t \leq (k_\tau + k_t)h$, откуда $\vartheta_t + \vartheta_\tau = k_t h - t + k_\tau h - \tau = h - (t + \tau) = \vartheta_0$. Окончательно получаем $x_t(x_\tau(\varphi)) = \vartheta(\vartheta_0)b^k\varphi = x_{t+\tau}(\varphi)$, что и требовалось.

Свойство (11) выполняется, так как непрерывность функции $x_t(\varphi)$ по t и φ для $\varphi \in D$ и $t \in \mathbb{R}^+$ следует из доказанной ранее непрерывности по t функции $x(\varphi)(t)$ и непрерывности по φ оператора сдвига на D и отображения $b\colon\ D \to D$.

Лемма 1 доказана.

Таким образом, для отображения $U(t)$ выполнены свойства (i)–(iii) определения 1, и следовательно $u(\varphi, t)$ есть автономный процесс или непрерывная динамическая система на D, $\tau^+(\varphi) = \{(t, u(\varphi, t)),\ t \geq 0\}$ — траектория динамической системы на D, начинающаяся в φ, а отображение $x_t(\varphi)\colon \mathbb{R}^+ \to D$ — ее интеграл, проходящий через $(0,\ \varphi)$, и множество $M_0 = \mathbb{R}^+ \times D$ — интегральное множество этой динамической системы.

3. Как уже было показано, функция $x(\varphi)(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна по t и φ для $\varphi \in D$ и $t \in \mathbb{R}^+$, и, кроме того, дифференцируема на каждом сегменте $\big((k-1)h,\ kh\big)$ как элемент D. Для любого $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ найдется $\tau \in \mathbb{R}^+$, такое, что $k_0 h \in [\tau - h,\ \tau]$, т.е. точка t_{k_0} находится внутри отрезка $[\tau - h, \tau]$. В силу того, что $x_\tau(\varphi) \in D$ (так как $x_\tau(\varphi) = U(\tau)\varphi$) функция $x(\varphi)(t)$ дифференцируема в точке t_{k_0}. Поскольку все это справедливо для любого $k \in \mathbb{Z}$, функция $x(\varphi)(t)$ дифференцируема во всех точках $t_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, и таким образом дифференцируема при всех $t \geq -h$. Нетрудно видеть, что $\dot{x}(\varphi)(t) = d\,x(\varphi)(t)$ при всех $t \geq -h$, и функция $x(\varphi)(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ есть решение обыкновенного дифференциального уравнения на $\mathbb{R}$, которая порождает автономный процесс на $\mathbb{R}$ уже описанным ранее способом.

Теорема 1 доказана.

Приведем два очевидных следствия теоремы.

Следствие 3. В условиях теоремы для любых $t \geq 0$ и $\varphi \in D$ выполняется $x(\varphi)(t) = bx(\varphi)(t - h)$.

Следствие 4. При $d = a$ автономные процессы, порождаемые дискретной динамической системой (2) и обыкновенным дифференциальным уравнением (1) совпадают на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим теперь, как данный процесс может быть представлен динамической моделью с последействием.

3.4. Автономные процессы, порождаемые дифференциальным уравнением запаздывающего типа. Отображение c: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ порождает автономный процесс на C следующим образом. Пусть $y(\psi)$ обозначает решение дифференциального уравнения запаздывающего типа (3), начинающееся в $\psi \in C$, в этом случае отображение $y(\psi)(t)$: $C \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ непрерывно по t и ψ для $\psi \in C$ и $t \in \mathbb{R}^+$. Полагаем $u(\psi, t) = y_t(\psi)$ для $(\psi, t) \in C \times \mathbb{R}^+$ и получаем автономный процесс на C, при этом $U(t) = T(t)$, где $T(t)$ — отображение сдвига для уравнения (3) (т.е. $T(t)\psi = y_t(\psi)$), удовлетворяет свойствам (i)–(iii) определения 1 по определению оператора сдвига для дифференциальных уравнений запаздывающего типа [4].

Теорема 2. Если b выбрано как в теореме 1, то при $c = db$ автономный процесс, порождаемый дискретной динамической системой (2) на D совпадает с процессом, порождаемым дифференциальным уравнением запаздывающего типа (3) на D.

Доказательство.

Рассмотрим на D автономный процесс $y(\psi)(t)$, начинающийся в $\psi \in D$, порожденный дискретной динамической системой (2). В силу следствия 3 для любого $t \geq 0$ имеем $y(\psi)(t) = b\,y(\psi)(t-h)$. Покажем, что функция $y(\psi)(t)$ удовлетворяет уравнению (3) при $c = d\,b$. Подставим $y(\psi)(t)$ в уравнение (3) и получим

$$\dot{y}(\psi)(t) = dby(\psi)(t-h) = d\,y(\psi)(t), \tag{12}$$

откуда видно, что функция $y(\psi)(t)$ удовлетворяет уравнению (3), так как является решением уравнения (12) как интеграл дискретной динамической системы (2) на $\mathbb{R}$.

Теорема 2 доказана.

Приведем без доказательств несколько очевидных следствий теоремы.

Следствие 5. В условиях теоремы 2 множество $D \subset C$ является инвариантным множеством оператора сдвига для уравнения (3), т.е. $T : D = D$.

Следствие 6. В условиях теоремы 2 отображение $y_t(\psi)$: $D \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, где $y_t(\psi)(t)$ — решение уравнения (3), начинающееся в ψ, порождает автономный процесс $y(\psi)(t)$ на $\mathbb{R}$, который совпадает с процессом, порождаемым обыкновенным дифференциальным уравнением на $\mathbb{R}$.

Следствие 7. В условиях теоремы 2 при $d = a$ дифференциальное уравнение запаздывающего типа (3) порождает автономный процесс на $\mathbb{R}$, который совпадает с процессом, порождаемым обыкновенным дифференциальным уравнением (1).

Таким образом, теоремы 1 и 2 устанавливают условия на отображения a, b и c, при которых процесс, порождаемый обыкновенным дифференциальным уравнением (1) на $\mathbb{R}$, может быть представлен как процесс на C дискретной динамической системой (2) или дифференциальным уравнением запаздывающего типа (3), и наоборот, когда процесс, порождаемый дифференциальным уравнением запаздывающего типа (3) на C, может быть представлен на $\mathbb{R}$ обыкновенным дифференциальным уравнением (1).

4. Примеры

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих результаты предыдущего раздела.

Пример 1. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = ax(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0. \tag{13}$$

Как известно, решение этого дифференциального уравнения при $t \geq 0$ имеет вид

$$x(t) = x_0 e^{at}. \tag{14}$$

Для $h > 0$ положим $c = ae^{ah}$ и рассмотрим функцию $\varphi = x_0\, e^{a\,t}$ при $t \in [-h,\ 0]$. Тогда решение дифференциального уравнения запаздывающего типа, начинающееся в φ

$$\dot{y}(t) = cy(t-h), \quad y(t) = \varphi, \quad t \in [-h,\ 0], \tag{15}$$

при $t \geq 0$ будет совпадать с решением обыкновенного дифференциального уравнения (13), начинающимся в x_0, т.е. $y(\varphi)(t) = x(x_0)(t)$ при $t \geq 0$.

Этот пример иллюстрирует результат, сформулированный в следствии 7 из теоремы 2.

В следующем примере этот результат проверяется непосредственно.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{y}(t) = cy(t-h), \quad y(0) = y_0, \quad t \geq 0, \tag{16}$$

и выберем начальную функцию в виде

$$y(t) = y_0 e^{at}, \quad t \in [-h,\ 0]. \tag{17}$$

Тогда решение уравнения (16) на интервале $t \in [0, h]$ можно представить как

$$y(t) = y_0 + c\int_0^t y_0 e^{a(s-h)}\, ds, \quad t \in [0, h]. \tag{18}$$

Пусть $c = a\, e^{ah}$, тогда учитывая (18) запишем

$$y(t) = y_0 + c\int_0^t y_0 e^{a(s-h)}\, ds = y_0 + cy_0 e^{-ah}\int_0^t e^{as}\, ds = y_0 + \frac{c}{a}\, y_0 e^{-ah}\int_0^t de^{as} =$$
$$= y_0 + \frac{c}{a}\, y_0 e^{-ah} e^{as}\Big|_0^t = y_0 + \frac{c}{a}\, y_0 e^{-ah} e^{at} - \frac{c}{a}\, y_0 e^{-ah} = y_0 + y_0 e^{at} - y_0 = y_0 e^{at},$$

и видим, что при $t \in [0,\ h]$ функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{y}(t) = ay(t)$ с начальным условием $y(0) = y_0$.

На интервале $t \in [h,\ 2h]$ при $c = ae^{ah}$ и $y_h = y_0\, e^{ah}$ имеем

$$y(t) = y_h + c\int_h^t y_0\, e^{a(s-h)}\, ds = y_h + cy_0 e^{-ah}\int_h^t e^{as}\, ds = y_h + y_0\int_h^t de^{as} =$$
$$= y_h + y_0 e^{as}\Big|_h^t = y_h + y_0 e^{at} - y_0 e^{ah} = y_h + y_0 e^{at} - y_h = y_0 e^{at},$$

и вообще, для любого $k \in \mathbb{Z}^+$ на интервале $t \in [kh,\ (k+1)h]$ при $c = a\, e^{ah}$ и $y_{kh} = y_0 e^{akh}$ имеем

$$y(t) = y_{kh} + c\int\limits_{kh}^{t} y_0\, e^{a(s-h)}\, ds = y_{kh} + y_0 \int\limits_{kh}^{t} de^{as} = y_{kh} + y_0 e^{as}\Big|_{kh}^{t} =$$
$$= y_{kh} + y_0 e^{at} - y_0 e^{akh} = y_{kh} + y_0 e^{at} - y_{kh} = y_0 e^{at},$$

т.е. при всех $t \geq 0$ имеем, что $y(t) = y_0 e^{at}$, и функция $y(t)$, являющаяся решением дифференциального уравнения запаздывающего типа (16) с начальным условием (17), удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $\dot{y}(t) = ay(t)$, если a и c связаны соотношением $c = ae^{ah}$.

Приведем еще один пример, который показывает, что результаты работы применимы не в единственном случае.

Пример 3. Рассмотрим дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{y}(t) = a_0 y(t) + cy(t-h), \quad y(0) = y_0, \quad t \geq 0, \tag{19}$$

и выберем начальную функцию в виде

$$y(t) = y_0 e^{at}, \quad t \in [-h,\ 0]. \tag{20}$$

Тогда решение уравнения (19) на интервале $t \in [0, h]$ по формуле вариации постоянных можно представить как

$$y(t) = y_0 e^{a_0 t} + ce^{a_0 t}\int\limits_{0}^{t} e^{-a_0 s} y_0 e^{a(s-h)}\, ds, \quad t \in [0,\ h]. \tag{21}$$

При $c = (a - a_0)e^{ah}$ учитывая (21) находим

$$y(t) = y_0 e^{a_0 t} + ce^{a_0 t}\int\limits_{0}^{t} e^{-a_0 s} y_0 e^{a(s-h)}\, ds = y_0 e^{a_0 t} + cy_0 e^{-ah} e^{a_0 t}\int\limits_{0}^{t} e^{(a-a_0)s} ds =$$
$$= y_0 e^{a_0 t} + \frac{ce^{-ah}}{a - a_0} y_0 e^{a_0 t}\int\limits_{0}^{t} de^{(a-a_0)s} = y_0 e^{a_0 t} + y_0 e^{a_0 t} e^{(a-a_0)s}\Big|_{0}^{t} =$$
$$= y_0 e^{a_0 t} + y_0 e^{a_0 t} e^{(a-a_0)t} - y_0 e^{a_0 t} = y_0 e^{a_0 t} + y_0 e^{at} - y_0 e^{a_0 t} = y_0 e^{at},$$

и видим, что при $t \in [0,\ h]$ функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{y}(t) = ay(t)$ с начальным условием $y(0) = y_0$.

Повторяя такие же рассуждения как в примере 1, получаем при всех $t \geq 0$, что $y(t) = y_0 e^{at}$, и функция $y(t)$, являющаяся решением дифференциального уравнения запаздывающего типа (19) с начальным условием (20), удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $\dot{y}(t) = ay(t)$, если коэффициенты уравнения (19) связаны соотношением $c = (a - a_0)e^{ah}$.

И наконец, — пример, который иллюстрирует результаты, относящиеся к представлению автономного процесса при помощи дискретной модели.

Пример 4. Рассмотрим элемент $\varphi_0 \in D$ пространства C, и пусть $\varphi_0(\vartheta) = y_0 e^{a\vartheta}$ при $\vartheta \in [-h,\ 0]$, где $a, y_0 \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$, $y_0 \neq 0$. Рассмотрим дискретную динамическую систему на D

$$\varphi_{k+1} = b\varphi_k, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \tag{22}$$

и при $b = e^{ah}$ видим, что

$$\varphi_k = e^{ah}\varphi_{k-1} = e^{akh}\varphi_0 = y_0 e^{a(\vartheta+kh)}. \tag{23}$$

Введем переменную $t = \vartheta + kh$ и обозначим $y_t(k) = y_0 e^{a(\vartheta+kh)}$. Тогда $y_t(k) = b^k\varphi_0$ и орбита дискретной динамической системы (22), начинающаяся в $\varphi_0 \in D$, есть множество

$$\gamma^+(\varphi_0) = \Big\{ y_t(k) \in C,\ k \in \mathbb{Z}^+ \Big\}, \tag{24}$$

а функция $y_t(k)\colon \mathbb{Z} \to D$, согласно утверждению 5, является интегралом дискретной динамической системы (22), проходящим через φ_0.

Запишем

$$y_t(k) = y_0 e^{at}, \quad t \in [(k-1)h,\ kh]. \tag{25}$$

Для $k = 1$ имеем $t \in [0,\ h]$, и функция $y(t) = y_0 e^{at}$ из (25) удовлетворяет уравнению $\dot{y}(t) = ay(t)$ с начальным условием $y(0) = y_0$ на интервале $[0,\ h]$. Для $k = 2$ имеем $t \in [h,\ 2h]$, и функция $y(t) = y_0 e^{at}$ из (25) удовлетворяет уравнению $\dot{y}(t) = ay(t)$ с начальным условием $y(0) = y_0$ на интервале $[0,\ 2h]$. Далее, при $k = 3,\ 4,\ \ldots$ функция $y(t) = y_0 e^{at}$ из (25) удовлетворяет уравнению $\dot{y}(t) = ay(t)$ с начальным условием $y(0) = y_0$ на интервале $[0,\ kh]$.

Таким образом, интеграл $y_t(k)$ дискретной динамической системы (22) удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $\dot{y}(t) = ay(t)$ на $\mathbb{R}$, является проекцией орбиты (24) в $\mathbb{R}$, а график решения $(t, y(t))$, $t \in \mathbb{R}^+$ дифференциального уравнения $\dot{y}(t) = ay(t)$ представляет собой непрерывную траекторию дискретной динамической системы (22) в $\mathbb{R}$.

Далее рассмотрим несколько примеров возможного применения полученных результатов при моделировании и конструировании разнонаправленных процессов.

5. Сравнение разнонаправленных процессов

Воспользуемся результатами предыдущих разделов и приведем примеры простейших моделей сравнения разнонаправленных процессов. Пусть имеется два процесса $u_1(t)$ и $u_2(t)$, и пусть $f(u_1, u_2)$ — некоторая функция, заданная на этих процессах, используемая для их сравнения. Значения функции сравнения $f(u_1(t), u_2(t))$ в каждый момент $t \geq 0$ будем называть *ошибкой сравнения*. Для данной функции сравнения ошибка сравнения в момент времени t известна, если имеются значения $u_1(t)$ и $u_2(t)$ в этот же момент времени, однако, особенно при моделировании и конструировании процессов, важнее иметь ошибку сравнения для динамических моделей процессов, а не для самих значений процессов, т.е. возможность смоделировать ошибку сравнения не запуская самих процессов. Проиллюстрируем сказанное некоторыми примерами.

5.1. Уравнение ошибки сравнения. Пусть имеется два разнонаправленных процесса $u_1(t)$ и $u_2(t)$, представленные при $t \geq 0$ динамическими моделями одного типа: обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{u}_1(t) = au_1(t), \quad u_1(0) = u_0, \tag{26}$$

и

$$\dot{u}_2(t) = bu_2(t), \quad u_2(0) = u_0, \tag{27}$$

с одинаковым начальным условием $u_0 \neq 0$ при $t = 0$.

В качестве функции сравнения рассмотрим функцию $v(t) = u_1(t)/u_2(t)$. Тогда для

$$\dot{v}(t) = \frac{\dot{u}_1(t)u_2(t) - u_1(t)\dot{u}_2(t)}{u_2^2(t)}$$

имеем

$$\dot{v}(t) = \frac{au_1(t)u_2(t) - u_1(t)bu_2(t)}{u_2^2(t)} = (a-b)v(t), \quad v(0) = 1,$$

отсюда получаем *уравнение ошибки сравнения* двух разнонаправленных процессов в виде

$$\dot{v}(t) = (a-b)v(t). \tag{28}$$

Уравнение (28) устанавливает связь ошибки сравнения двух разнонаправленных процессов $u_1(t)$ и $u_2(t)$ с параметрами их динамических моделей (26) и (27).

Далее рассмотрим менее очевидные модели ошибки сравнения для процессов, представленных динамическими моделями различных типов.

5.2. Уравнение ошибки сравнения при наличии у характеристического квазиполинома действительного корня. Пусть теперь процессы $u_1(t)$ и $u_2(t)$ представлены при $t \geq 0$ динамическими моделями различных типов: обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{u}_1(t) = au_1(t), \quad u_1(0) = u_0, \tag{29}$$

и дифференциальным уравнением запаздывающего типа

$$\dot{u}_2(t) = cu_2(t-h), \quad u_2(0) = u_0, \tag{30}$$

с одинаковым начальным условием $u_0 \neq 0$ при $t = 0$.

Пусть уравнение $be^{bh} = c$ имеет действительный корень b. Выберем начальную функцию в (30) на отрезке $t \in [-h,\ 0]$ как примере 16 в виде $y(t) = u_0e^{bt}$. Тогда процесс $u_2(y)(t)$, начинающийся в y, будет удовлетворять при $t \geq 0$ обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\dot{u}_2(t) = bu_2(t), \quad u_2(0) = u_0, \tag{31}$$

а уравнение ошибки сравнения процессов $u_1(t)$ и $u_2(t)$ для той же функции сравнения, что и в предыдущем примере, будет иметь вид

$$\dot{v}(t) = (a - b)v(t). \tag{32}$$

Заметим, что хотя уравнение ошибки сравнения (32) внешне похоже на уравнение (28), однако, уравнение (32) устанавливает связь ошибки сравнения с параметрами динамических моделей (29) и (30) разнонаправленных процессов $u_1(t)$ и $u_2(t)$ только при дополнительном условии правильного выбора начальной функции y на отрезке $t \in [-h,\ 0]$.

Далее рассмотрим моделирование ошибки сравнения для процессов, не только представленных динамическими моделями различных типов, но и имеющих различный характер поведения.

5.3. Уравнение ошибки сравнения при отсутствии у характеристического квазиполинома действительного корня. Пусть процессы $u_1(t)$ и $u_2(t)$ представлены при $t \geq 0$ динамическими моделями различных типов: обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{u}_1(t) = au_1(t), \quad u_1(0) = u_0, \tag{33}$$

и дифференциальным уравнением запаздывающего типа

$$\dot{u}_2(t) = bu_2(t - h), \quad u_2(0) = u_0, \tag{34}$$

с одинаковым начальным условием $u_0 \neq 0$ при $t = 0$, значение параметра b таково, что уравнение $\lambda e^{\lambda h} = b$ не имеет действительного корня.

В этом случае заменим модель (33) процесса $u_1(t)$ на динамическую модель запаздывающего типа:

$$\dot{u}_1(t) = cu_1(t - h), \quad u_1(t) = y(t) = u_0 e^{at}, \quad t \in [-h,\ 0], \tag{35}$$

где $c = ae^{ah}$, и сравним процессы $u_1(y)(t)$ и $u_2(y)(t)$, начинающиеся в y.

В качестве функции сравнения рассмотрим функцию $v(t) = u_2(t)/u_1(t)$. Тогда для

$$\dot{v}(t) = \frac{\dot{u}_2(t)u_1(t) - u_2(t)\dot{u}_1(t)}{u_1^2(t)}$$

имеем уравнение

$$\dot{v}(t) = \frac{bu_2(t - h)u_1(t) - u_2(t)cu_1(t - h)}{u_1^2(t)} = b\frac{u_2(t - h)}{u_1(t)} - cv(t)\frac{u_1(t - h)}{u_1(t)}. \tag{36}$$

Поскольку для u_1 справедливо $u_1(t) = e^{ah}u_1(t - h)$ при любом $t \geq 0$, то в (36) имеем

$$\dot{v}(t) = b\frac{u_2(t - h)}{u_1(t)} - cv(t)\frac{u_1(t - h)}{u_1(t)} = b\frac{u_2(t - h)}{e^{ah}u_1(t - h)} - cv(t)\frac{e^{-ah}u_1(t)}{u_1(t)} =$$
$$= be^{-ah}v(t - h) - cv(t)e^{-ah}.$$

Отсюда получаем уравнение ошибки сравнения при $t \geq 0$ в виде

$$\dot{v}(t) = -av(t) + \frac{ab}{c} v(t-h), \quad v(t) \equiv 1, \quad t \in [-h,\ 0]. \tag{37}$$

Уравнение (37) устанавливает связь ошибки сравнения двух разнонаправленных процессов $u_1(t)$ и $u_2(t)$ с параметрами их динамических моделей (33) и (34) и условием правильного выбора начальной функции y на отрезке $t \in [-h, 0]$.

Для большей наглядности проиллюстрируем этот результат примером численного моделирования.

6. Численный пример

Сравним два процесса $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые представлены при $t \geq 0$ обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{u}_1(t) = au_1(t), \quad u_1(0) = u_0 = 1, \tag{38}$$

и дифференциальным уравнением запаздывающего типа

$$\dot{u}_2(t) = bu_2(t-1), \quad u_2(0) = u_0 = 1, \tag{39}$$

при значениях параметров $a = -1.2$ и $b = -1.2$.

Графики этих процессов представлены на рис. 1.

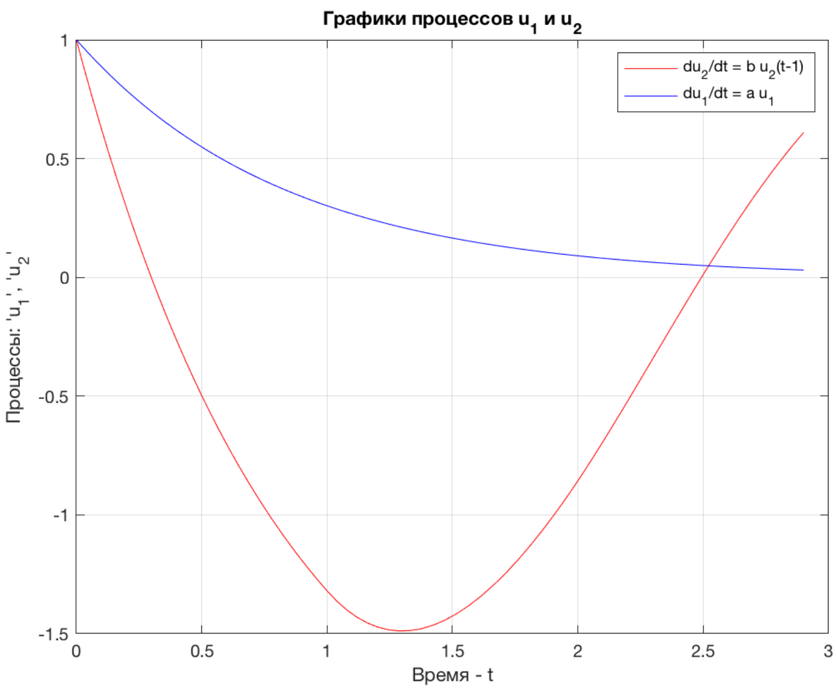

Рис. 1. Графики процессов $u_1(t)$ (синяя кривая) и $u_2(t)$ (красная кривая) на интервале $t \in [0,\ 3]$ при значении параметров $a = -1.2$ в уравнении (38) и $b = -1.2$ в уравнении (39)

Уравнение $\lambda = be^{-\lambda}$ при таком значении параметра b не имеет действительных корней [7], поэтому представим процесс $u_1(t)$ динамической моделью запаздывающего типа

$$\dot{u}_1(t) = cu_1(t-1), \quad u_1(t) = e^{at}, \quad t \in [-1,\ 0], \tag{40}$$

где $c = ae^a = (-1.2) \cdot e^{-1.2} = -0.3614$.

Графики процесса $u_1(t)$ в силу уравнений (38) и (40) представлены на рис. 2.

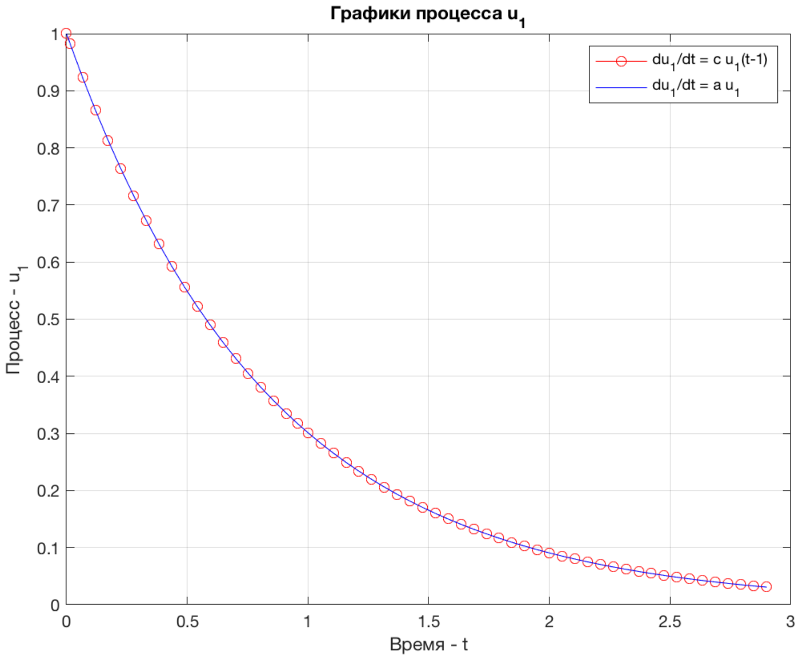

Рис. 2. Графики процесса $u_1(t)$ в силу уравнения (38) (синяя кривая) и в силу уравнения (40) (красная кривая в кружочках) на интервале $\begin{bmatrix} t\in \\ 0,\ 3 \end{bmatrix}$ при значении параметров $a = -1.2$ в уравнении (38) и $c = -0.3614$ в уравнении (40)

На рис. 2 видно, что обе модели, и (38), и (40), одинаково точно описывают один и тот же процесс $u_1(t)$.

Уравнение ошибки сравнения v для функции $f(u_1, u_2) = u_2(t)/u_1(t)$ примет вид

$$\dot{v}(t) = -av(t) + \frac{ab}{c}v(t-1), \quad v(t) \equiv 1, \quad t \in [-1,\ 0],$$

или при указанных значениях параметров a, b и c

$$\dot{v}(t) = 1.2v(t) - 3.9841v(t-1), \quad v(t) \equiv 1, \quad t \in [-1,\ 0]. \tag{41}$$

Графики функции сравнения и ошибки сравнения представлены на рис. 3.

Здесь хорошо видно, что модель ошибки сравнения (41) точно воспроизводит значения функции сравнения $f(u_1, u_2)$, вычисляемой непосредственно на процессах $u_1(t)$ и $u_2(t)$, представленных уравнениями (38) и (39).

Отметим, что примеры моделей сравнения разнонаправленных процессов приведены только для иллюстрации особенностей подхода, основанного на приведении моделей динамики процессов к единообразной форме, и не должны рассматриваться как окончательное

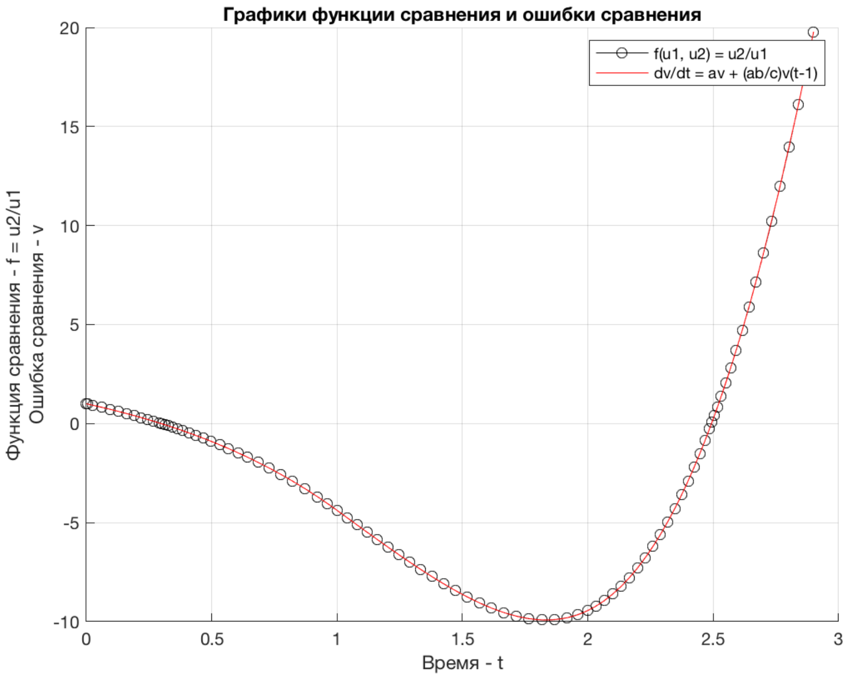

Рис. 3. Графики функции сравнения $f(u_1, u_2) = u_2(t)/u_1(t)$, определенной непосредственно на процессах $u_1(t)$ и $u_2(t)$, представленных динамическими моделями (38), (39) (черная кривая в кружочках), и ошибки сравнения $v(t)$ в силу уравнения (41) (красная кривая) на интервале $t \in [0,\ 3]$

решение задачи сравнения. Полное решение задач сравнения разнонаправленных процессов выходит за рамки данной статьи.

Заключение

Изложен способ приведения разнотипных моделей динамики к единообразной форме, основанный на механизмах взаимозамещаемости моделей исследуемого процесса. Рассмотрены конечномерные и бесконечномерные модели динамики автономных процессов в классе обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений запаздывающего типа. Показано как процесс, порожденный обыкновенным дифференциальным уравнением, можно представить в функциональном пространстве траекторией дискретной динамической системы, сформулированы условия для такого представления, и на примере первого порядка приведены соотношения параметров непрерывной и дискретной моделей, при которых эти условия удовлетворяются.

Установлены условия взаимозамещаемости конечномерных, бесконечномерных и дискретных моделей динамики, при выполнении которых автономный процесс, порождаемый обыкновенным дифференциальным уравнением в конечномерном пространстве, может быть представлен как процесс, порождаемый дискретной динамической системой или дифференциальным уравнением запаздывающего типа в бесконечномерном функциональном пространстве, и наоборот, процесс, порождаемый дифференциальным уравнением запаздывающего типа обыкновенным дифференциальным уравнением. Для одномерных автономных процессов найдены соотношения на параметры этих моделей, которые удовлетворяют условиям взаимозамещаемости. Полученные результаты на простых примерах проверяются непосредственными вычислениями.

Идеи приводимости моделей динамики к единообразной форме применяются для сравнения разнонаправленных процессов, представленных различными типами динамических моделей. Приведены примеры моделей ошибки сравнения одномерных разнонаправленных процессов, представленных динамическими моделями различных типов и имеющих различный характер поведения. Точность модели сравнения запаздывающего типа иллюстрируется примером численного моделирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 19-07-00686а.

Список литературы

1. Емельянов С.В., Носов А.П., Рахманкулов В.З., Ахрем А.А. Принципы и методы разработки моделей искусственной поджелудочной железы в виртуальной среде // Информационные технологии и вычислительные системы. 2017. № 2. С. 3–23. Режим доступа: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_29422153_73201272.pdf (дата обращения 17.01.2021).

2. Рахманкулов В.З., Ахрем А.А. Разработка алгоритмической базы знаний для транспозиционного виртуального симулятора инсулинотерапии и искусственной поджелудочной железы // Системный анализ и информационные технологии: 8-я междунар. конф.: САИТ-2019 (Иркутск, Россия, 8–14 июля 2019 г.): Тр. М., 2019. С. 129–134. DOI: 10.14357/SAIT2019017

3. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 212 с.

4. Хейл Дж.К. Теория функционально-дифференциальных уравнений: пер. с англ. М.: Мир, 1984. 421 с. [Hale J.K. Theory of functional differential equations. 2nd ed. N.Y.: Springer, 1977. 365 p.].

5. Нефедов Н.Н., Попов В.Ю., Волков В.Т. Обыкновенные дифференциальные уравнения: курс лекций. М.: Изд-во МГУ, 2016. 200 с.

6. Высшая математика для технических университетов / В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов: учеб. пособие. 3-е изд. Ч. 5: Дифференциальные уравнения. Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2014. 392 с.

7. Андронов А.А., Майер А.Г. Простейшие линейные системы с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1946. Т. 7, вып. 2–3. С. 95–106.

Mathematics and Mathematical Modeling, 2020, no. 5, pp. 13–32.
DOI: 10.24108/mathm.0520.0000238

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal
http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

Interchangeability Conditions for Autonomous Processes Models in Finite-dimensional and Infinite-dimensional Spaces

Nosov A. P.[1,*], Akhrem A. A.[1], Rakhmankulov V.Z.[1]

Federal Research Center "Informatics and Control" of RAS, Moscow, Russian Federation
[*]nosov@isa.ru

Keywords: modeling, ordinary differential equations, delayed differential equations, dynamical systems, autonomous processes

Received: 06.11.2020.

The paper presents the interchangeability conditions for the finite-dimensional, infinite-dimensional, and discrete models of dynamics of autonomous processes and, using the one-dimensional processes as an example, shows that with the certain ratio of the model parameters and appropriate choice of initial functions these conditions are satisfied. Reveals how, subject to the conditions of interchangeability, the process generated by an ordinary differential equation can be represented in the functional space by the trajectory of a discrete dynamic system.

Considers dynamic models in the class of ordinary differential equations and delay differential ones. Since the solution spaces of such equations are, in general, different: a finite-dimensional arithmetic space for solutions of the ordinary differential equation and the infinite-dimensional functional space for solutions of the delay differential equation, the problem to reduce dynamic models to the uniform form is associated with representation of processes in both types of spaces. Based on the interchangeability mechanisms of dynamic models of the process under study, the paper proposes methods to reduce the models of dynamics to a uniform form.

The results are verified by direct calculations using the specific examples. Interchangeability is used to compare the oppositely directed processes represented by different types of dynamic models. To compare one-dimensional multidirectional processes, presented by dynamic models of various types and having a different behavior pattern, examples of the error models are given. An accuracy of the comparison model of delay type is illustrated by a numerical simulation example.

References

1. Emelyanov S.V., Nosov A.P., Rakhmankulov V.Z., Akhrem A.A. Principles and methods of artificial pancreas models design in virtual environment. *Informatsionnye tekhnologii i vychis-*

litel'nye sistemy [Information Technologies and Computing Systems], 2017, no. 2, pp. 3–23. Available at: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_29422153_73201272.pdf, accessed 17.01.2021 (in Russian).

2. Rakhmankulov V.Z., Ahrem A.A. Razrabotka algoritmicheskoj bazy znanij dlia transpozitsionnogo virtual'nogo simuliatora insulinoterapii i iskusstvennoj podzheludochnoj zhelezy [Development of an algorithmic knowledge base for a transpositional virtual insulin therapy simulator and an artificial pancreas]. *Sistemnyj analiz i informatsionnye tekhnologii: 8-ia mezhdunarodnaia konferentsiia: SAIT 2019* [Systems analysis and information technologies: 8th intern. conf.: SAIT 2010 (Irkutsk, Russia, July 8-14, 2019)]: Proc. Moscow, 2019. Pp. 129–134. DOI: 10.14357/SAIT2019017 (in Russian)
3. Krasovskij N.N. *Nekotorye zadachi teorii ustojchivosti dvizheniia* [Some problems of the theory of stability of motion]. Moscow: Fizmatgiz Publ., 1959. 212 p. (in Russian).
4. Hale J.K. *Theory of functional differential equations*. 2nd ed. N.Y.: Springer, 1977. 365 p. (Russ. ed.: Hale J.K. Teoriia funktsional'no-differentsial'nykh uravnenij. Moscow: Mir Publ., 1984. 421 p.).
5. Nefedov N.N., Popov V.Yu., Volkov V.T. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniia* [Ordinary differential equations]: lecture's course. Moscow: MSU Publ., 2016. 200 p. (in Russian).
6. *Vysshaia matematika dlia tekhnicheskikh universitetov. Chast'5: Differentsial'nye uravneniia* [Higher mathematics for technical universities. Pt. 5: Differential equations] / V.N. Zadorozhnyj, V.F. Zal'mezh, A.Yu. Trifonov, A.V. Shapovalov: a textbook. 3rd ed. Tomsk: Tomsk Politechnical Univ. Publ., 2014. 392 p. (in Russian).
7. Andronov A.A., Maier A.G. Simplest linear systems with retardation. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1946, vol. 7, no. 2-3, pp. 95–106 (in Russian).