δELTΔ
Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika
p.ISSN: 2303 -3983 *e.ISSN:2548-3994*
Vol. 9 No. 1 Januari 2021 Hal 99-112
DOI: http://dx.doi.org/10.31941/delta.v9i1.1268

RUANG PROYEKTIF KOMPLEKS $\mathbb{C}P^n$ ADALAH MANIFOLD KOMPLEKS

Denik Agustito[1], Irham Taufiq[2] , Dafid Slamet Setiana[3], Riawan Yudi Purwoko[4]
[1,2,3] Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa, Yogyakarta
[4] Universitas Muhammadiyah Purworejo, Purworejo
[1] agustito@ustjogja.ac.id , [2] irham.taufiq@gmail.com , [3] dafid.setiana@ustjogja.ac.id ,
[4]riawanyudi@umpwr.ac.id

Received :
22/12/2020
Accepted :
09/01/2021
Published :
21/01/2021

Abstract
The purpose of this paper to determine the complex projective space $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ as a complex manifold is to calculate the cohomology of the coherent sheaves of $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. The research method in this paper is to construct an n-dimensional complex projective space, namely $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ and then the n-dimensional complex projective space, namely $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, is a complex manifold. The result of this research is the n-dimensional complex projective space, namely $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ is a complex and compact manifold.
Keywords: *complex, manifold, projective*

Abstrak
Tujuan dari tulisan ini untuk mengetahui ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ sebagai manifold kompleks adalah untuk menghitung cohomologi dari sheaves coherent dari $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Metode penelitian dalam tulisan ini adalah mengkonstruksi ruang proyektif kompleks berdimensi-*n* yaitu $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ dan selanjutnya adalah bahwa ruang proyetif kompleks berdimensi-*n* yaitu $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ adalah manifold kompleks. Hasil dari penelitian ini adalah ruang proyektif kompleks berdimensi-*n* yaitu $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ adalah manifold kompleks dan kompak.

Kata Kunci: kompleks, manifold, proyektif

1. Pendahuluan

Diberikan *k* adalah lapangan tertutup secara aljabarik dan $k[x_1, \dots, x_n]$ adalah ring suku banyak dengan *n*-indeterminate. Jika $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ maka himpunan nul dari S adalah himpunan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$V(S) = \{P \in k^n | f(P) = 0 \text{ untuk semua } f \in S\}$$

dimana $k^n = \{(a_1, \dots, a_n) | a_1, \dots, a_n \in k\}$ dan k^n biasanya dinamakan dengan *k*-ruang affine berdimensi-*n*. Salah satu contoh lapangan tertutup secara aljabarik adalah $\mathbb{C}$ yaitu lapangan bilangan kompleks sehingga diperoleh $\mathbb{C}$-ruang affine berdimensi-*n* yaitu $\mathbb{C}^n$. Secara topologis bahwa $\mathbb{C}$-ruang affine berdimensi-*n* yaitu $\mathbb{C}^n$ yaitu manifold kompleks.

δELTΔ Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika
Vol. 9 No. 1 Januari 2021 hal. 99 – 112

Manifold kompleks ini dalam kajian geometri aljabarik digunakan untuk mengkaji Teori Hodge (Kasilingam, 2016).

Selanjutnya jika diberikan k adalah lapangan tertutup secara aljabarik dan $k[X_1^0, \ldots, X_n^0]$ adalah ring suku banyak homogen dengan *n*-indeterminate. Jika $S \subseteq k[X_1^0, \ldots, X_n^0]$ maka himpunan nul dari S adalah himpunan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$V(S) = \{P \in k\mathrm{P}^n | f(P) = 0 \text{ untuk semua } f \in S\}$$

dimana $k\mathrm{P}^n = \{[x_0 : \ldots : x_n] | (x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1}\}$ adalah ruang proyektif berdimensi-*n*. Jika $k = \mathbb{C}$ maka $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ biasanya dinamakan dengan $\mathbb{C}$-ruang proyektif berdimensi-*n* atau ruang proyektif kompleks berdimensi-*n*. Jika secara topologis bahwa ruang afine kompleks $\mathbb{C}^n$ merupakan manifold kompleks, pertanyaan selanjutnya adalah apakah ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ juga merupakan manifold kompleks?

Perlunya untuk mengetahui ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ sebagai manifold kompleks adalah untuk menghitung cohomologi dari Sheaves Coherent dari $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ (Arapura, 2012). Disamping itu juga dalam tinjauan geometri diferensial bahwa keberadaan lingkaran dalam ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ telah dikembangkan oleh Tosihaki Adachi, Sadahiro Maeda dan Seiichi Udagawa (1995) dan menuntut agar ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ dipandang sebagai manifold (manifold kompleks). Klasifikasi dari ruang proyektif kompleks juga dikembangkan oleh Ramesh Kasilingam (2016) melalui gagasan homotopi dan menuntut agar ruang kompleks proyektif $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ memiliki struktur manifold (manifold kompleks).

2. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan dua langkah, yaitu mengkonstruksi ruang proyektif kompleks berdimensi-n dan dibuktikan bahwa ruang proyetif kompleks berdimensi-n adalah manifold kompleks.

3. Hasil dan Pembahasan

Bentuk ruang euclidean kompleks berdimensi $n + 1$ yaitu sebagai berikut:

$$\mathbb{C}^{n+1} = \{(z_1, \ldots, z_{n+1}) | z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}\}$$

Kemudian didefinisikan sebuah relasi $\sim$ pada himpunan $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ dimana $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ yaitu sebagai berikut:

$$(y_1, \dots, y_{n+1}) \sim (z_1, \dots, z_{n+1}) \overset{\text{def}}{\equiv} y_j = kz_j \text{ untuk } k \in \mathbb{C}, k \neq 0, j = 1, \dots, n+1$$

Teorema 1.1. Relasi $\sim$ adalah relasi ekuivalen pada $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.
Bukti: Bukti diserahkan kepada pembaca.

Karena relasi $\sim$ adalah relasi ekuivalen pada $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, jelas kelas ekuivalen yang memuat $z = (z_1, \dots, z_{n+1})$ dinotasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}[z] = [(z_1, \dots, z_{n+1})] &= \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} | (y_1, \dots, y_{n+1}) \sim (z_1, \dots, z_{n+1})\} \\ &= \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} | (y_1, \dots, y_{n+1}) = k(z_1, \dots, z_{n+1}), k \in \mathbb{C}, k \neq 0\}\end{aligned}$$

Tulis $[z] = [(z_1, \dots, z_{n+1})] = [z_1 : \dots : z_{n+1}]$ dan jelas bahwa $[z] = [z_1 : \dots : z_{n+1}]$ adalah sebuah garis dalam ruang euclidean kompleks $\mathbb{C}^{n+1}$ yang melalui titik $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Setelah itu himpunan semua kelas-kelas ekuivalensi yang memuat titik $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ adalah sebagai berikut:

$$\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\sim = \{[z_1 : \dots : z_{n+1}] \big| (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}\}$$

Biasanya himpunan $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\sim$ akan dinotasikan dengan $\mathbb{C}P^n$. Ini jelas $\mathbb{C}P^n$ adalah himpunan semua garis dalam ruang euclidean kompleks $\mathbb{C}^{n+1}$ yang melalui titik $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ dan katakan $\mathbb{C}P^n = \{[z_1 : \dots : z_{n+1}] \big| (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}\}$ sebagai ruang proyektif kompleks berdimensi *n*.

Karena ruang euclidean kompleks $\mathbb{C}^{n+1}$ membentuk ruang topologi maka $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ dimana himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ didefinisikan berikut:

$$U \subseteq \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \text{ buka dalam } \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \overset{\text{def}}{\equiv} U = V \cap (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \text{ untuk suatu himpunan buka } V \text{ dalam } \mathbb{C}^{n+1}$$

juga membentuk subruang dari ruang topologi $\mathbb{C}^{n+1}$. Karena $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\sim$ maka terdapat sebuah pemetaan surjektif $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\pi\big((z_1, \dots, z_{n+1})\big) = [z_1 : \dots : z_{n+1}]$$

δELTΔ Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika
Vol. 9 No. 1 Januari 2021 hal. 99 – 112

Topologi pada $\mathbb{C}P^n$ didefinisikan melalui topologi identifikasi melalui pemetaan $\pi: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ yaitu sebagai berikut:

$$U \subseteq \mathbb{C}P^n \text{ buka dalam } \mathbb{C}P^n \overset{\text{def}}{\equiv} \pi^{-1}(U) \text{ buka dalam } \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$$

dan ini mengakitbatkan pemetaan surjektif $\pi: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ adalah kontinu.

Teorema 1.2. Ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ adalah kompak.

Bukti:

Dibuktikan $\mathbb{C}P^n$ adalah kompak.

Ambil sembarang selimut buka dari $\mathbb{C}P^n$ yaitu $\{U_\alpha\}_\alpha$ dari $\mathbb{C}P^n$.

Bentuk $U_{\alpha i} = \{[z_1, \dots, z_{n+1}] | (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}, z_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{C}P^n$.

Karena $V_i = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} | z_i \neq 0\}$ adalah himpunan buka, jelas himpunan $V_i = V_i \cap (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} | z_i \neq 0\}$ adalah juga himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Jelas $\pi^{-1}(U_{\alpha i}) = V_i$ adalah himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Karena $\pi^{-1}(U_{\alpha i}) = V_i$ adalah himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, jelas $U_{\alpha i}$ adalah himpunan buka dalam $\mathbb{C}P^n$.

Karena $U_{\alpha i} \subseteq \mathbb{C}P^n$, jelas $\bigcup_{i=1}^{n+1} U_{\alpha i} \subseteq \mathbb{C}P^n$. (*).

Ambil sembarang $[z] = [z_1 : \dots : z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n$.

Jelas $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Jelas $z_i \neq 0$ untuk setiap $i = 1, \dots, n+1$.

Jelas ini juga berlaku $z_i \neq 0$ untuk suatu $i = 1, \dots, n+1$.

Jadi $z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ yang sifatnya $z_i \neq 0$ untuk suatu $i = 1, \dots, n+1$.

Akibatnya $[z] \in U_{\alpha i}$ untuk suatu $= 1, \dots, n+1$.

Jadi $[z] \in \bigcup_{i=1}^{n+1} U_{\alpha i}$.

Jadi $\mathbb{C}P^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+1} U_{\alpha i}$. (**).

Dari (*) dan (**), diperoleh $\mathbb{C}P^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_{\alpha i}$.

Jadi $\{U_{\alpha 1}, \dots, U_{\alpha(n+1)}\}$ adalah selimut bagian berhingga dari dari selimut buka $\{U_\alpha\}_\alpha$.

Jadi $\mathbb{C}P^n$adalah kompak.

Di dalam kajian topologi, jika diberikan sebuah pemetaan kontinu $f: X \longrightarrow Y$ dan ruang X adalah terhubung, maka $f(X)$ juga terhubung. Secara khusus jika pemetaan kontinu $f: X \longrightarrow Y$ yang surjektif dan X terhubung, maka Y juga terhubung.

Pandang pemetaan $T: \mathbb{R}^{2n+2} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ yang definisikan sebagai berikut:

$$T\big((x_1, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_{n+1})\big) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$$

Pemetaan $T: \mathbb{R}^{2n+2} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ adalah bijektif dan kontinu. Dan sekarang juga pandang himpunan berikut yang akan dinamakan dengan sphere berdimensi $2n+1$ yaitu:

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \left\{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n+2} \middle| \textstyle\sum_{j=1}^{n}\big(x_j^2 + y_j^2\big) = 1\right\}$$

Jelas bahwa himpunan $\mathbb{S}^{2n+1}$ adalah subruang topologi dari ruang $\mathbb{R}^{2n+2}$. Oleh pemetaan bijektif kontinu $T: \mathbb{R}^{2n+2} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, sphere $\mathbb{S}^{2n+1}$ akan dipetakan oleh T menjadi $T(\mathbb{S}^{2n+1})$ dan jelas $\mathbb{S}^{2n+1}$ bisa dipandang sama dengan $T(\mathbb{S}^{2n+1})$ dalam ruang topologi $\mathbb{C}^{n+1}$.

Lemma 1.3. Pemetaan $\pi': \mathbb{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ yang mengirimkan semua titik pada $\mathbb{S}^{2n+1}$ ke garis pada $\mathbb{C}P^n$ adalah kontinu dan surjektif.

Bukti:

Karena $\mathbb{C}P^n$ adalah semua garis dalam ruang $\mathbb{C}^{n+1}$ yang melalui titik $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ dan $\mathbb{S}^{2n+1}$ adalah sphere dalam ruang $\mathbb{C}^{n+1}$ yang berpusat di $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ maka setiap garis dalam $\mathbb{C}P^n$ selalu berpotongan dengan sphere $\mathbb{S}^{2n+1}$ di dua titik. Ini menegaskan bahwa $\pi': \mathbb{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ adalah surjektif, dan tentunya ini adalah kontinu.

Teorema 1.4. Ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ adalah terhubung.

Bukti:

Karena sphere $\mathbb{S}^{2n+1}$ adalah ruang terhubung dan $\pi': \mathbb{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ adalah pemetaan kontinu yang surjekitf, jelas $\pi'(\mathbb{S}^{2n+1}) = \mathbb{C}P^n$ adalah terhubung.

Jadi $\mathbb{C}P^n$ adalah ruang terhubung.

δELTΔ Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika
Vol. 9 No. 1 Januari 2021 hal. 99 – 112

Sekarang jika diberikan ruang faktor $X/\sim$ dari ruang Hausdorff X dan $\sim$ adalah relasi ekuivalen pada X serta proyeksi $\pi: X \longrightarrow X/\sim$ adalah pemetaan terbuka, maka ruang faktor $X/\sim$ adalah Hausdorff jika dan hanya jika himpunan

$$D = \{(x, y) \in X \times X | x \sim y\}$$

adalah tertutup $X \times X$ (Cattani, 2013).

Teorema 1.5. Ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ adalah Hausdorff.

Bukti:

Bentuk pemetaan $f: (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(y, z) = f(y_1, \ldots, y_{n+1}, z_1, \ldots, z_{n+1}) = \sum_{i \neq j} |y_i z_j - y_j z_i|$$

untuk setiap $y = (y_1, \ldots, y_{n+1}), z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Jelas $f(y, \lambda y) = 0$ untuk setiap $\lambda \in \mathbb{C}$.

Jika $f(y, z) = 0$, maka $y_i z_j = y_j z_i$ untuk $i \neq j$.

Jelas bahwa y dan z adalah bergantung secara linear, dengan kata lain $y \sim z$.

Tulis $D = f^{-1}(\{0\}) = \{(y, z) \in (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) | y \sim z\}$.

Karena $\{0\} \subset \mathbb{R}$ adalah himpunan tertutup dan f adalah kontinu, jelas D adalah himpunan tertutup dalam $(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$.

Akibatnya $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\sim$ adalah ruang Hausdorff.

Ruang topologi X dikatakan mengikuti aksioma keterbilangan kedua jika ruang topologi tersebut memiliki sebuah basis topologi terbilang (Cattani, 2013). Salah satau sifat ruang topologi yang memenuhi aksioma keterbilangan kedua adalah sembarang subruang dari ruang topologi yang memenuhi aksioma keterbilangan kedua juga memenuhi aksioma keterbilangan kedua dan jika proyeksi $p: X \longrightarrow X/\sim$ adalah pemetaan terbuka dan X adalah ruang topologi yang memenuhi aksioma keterbilangan kedua maka ruang faktor $X/\sim$ juga memenuhi aksioma keterbilangan kedua.

Teorema 1.6. Ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ memenuhi aksioma keterbilangan kedua.

Bukti:

Jelas $\mathbb{C}^{n+1}$ memenuhi aksioma keterbilangan kedua.

Jelas subruang $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ juga memenuhi aksioma keterbilangan kedua.

Jelas proyeksi $\pi: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ adalah pemetaan terbuka.

Jadi $\mathbb{C}P^n$ memenuhi aksioma keterbilangan kedua.

Jadi ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ adalah ruang topologi Hausdorff, kompak, terhubung dan memenuhi aksioma keterbilangan kedua. Dari informasi ini, selanjutnya akan dibuktikan bahwa ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ adalah manifold kompleks.

Definisi 1.7. Manifold Topologis berdimensi 2*n* adalah ruang topologi Hausdorff *M* yang memenuhi aksioma keterbilangan kedua dan memenuhi sifat euclidean secara lokal. Euclidean secara lokal artinya sebagai berikut:

Untuk setiap titik $p \in M$ terdapat

(i) Sebuah lingkungan buka U dari p dalam *M*.

(ii) Sebuah himpunan buka $U' \subseteq \mathbb{R}^{2n}$.

(iii) Sebuah homeomorfisma $x: U \longrightarrow U'$ dan katakan x dengan *chart* dan U adalah domain dari *chart* x.

Jika koleksi *chart* yaitu $\{x_\alpha: U_\alpha \longrightarrow U'_\alpha\}$ dimana $\{U_\alpha\}_\alpha$ selimut buka dari *M*, maka koleksi *chatr* yaitu $\mathcal{A} = \{x_\alpha: U_\alpha \longrightarrow U'_\alpha\}$ biasanya dinamakan *atlas*. Jika diberikan dua buah *chart* yaitu $x_1: U_1 \longrightarrow U'_1$ dan $x_2: U_2 \longrightarrow U'_2$ dan anggap $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ maka pemetaan berikut:

$$x_{12} = \left(x_2|_{U_1 \cap U_2}\right) \circ \left(x_1|_{U_1 \cap U_2}\right)^{-1}: x_1\left(U_1 \bigcap U_2\right) \longrightarrow x_2\left(U_1 \bigcap U_2\right)$$

yang didefinisikan dengan $x_{12}(q) = x_2 x_1^{-1}(q)$ untuk setiap $q \in x_1(U_1 \cap U_2)$ dinamakan pemetaan transisi.

Jika diberikan sebuah manifold topologis berdimensi $2n$, maka atlas $\mathcal{A}$ dari *M* dikatakan holomorfik jika semua pemetaan transisinya adalah holomorfik (dalam $\mathbb{C}^n$). Dua buah atlas holomorfik $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ dalam manifold topologis *M* dikatakan ekuivalen jika $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ juga merupakan atlas holomorfik dan ekuivalensi dua atlas holomorfik ini mendefinisikan sebuah relasi ekuivalen. Kemudian kelas ekuivalen yang memuat sebuah atlas dari relasi ekuivalensi tersebut dinamakan struktur kompleks pada manifold topologis *M*. Manifold kompleks berdimensi *n* adalah manifold topologis berdimensi 2*n* yang memiliki sebuah struktur kompleks.

δELTΔ Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika
Vol. 9 No. 1 Januari 2021 hal. 99 – 112

Teorema 1.8. Ruang proyektif $\mathbb{C}P^n$ adalah manifold topologis berdimensi $2n$.

Bukti:

Ambil sembarang $[z] = [z_1 : \dots : z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n$.

Bentuk $U_i = \{[z_1, \dots, z_{n+1}] | (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}, z_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{C}P^n$.

Definisikan pemetaan $x_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$x_i([z_1, \dots, z_{n+1}]) = \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right)$$

Dibuktikan bahwa pemetaan $x_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ adalah homeomorfisma.

(i) Dibuktikan pemetaan $x_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ adalah kontinu.

Ambil sembarang himpunan buka V dalam $\mathbb{R}^{2n}$.

Jelas $x_i^{-1}(V) = \{[z_1, \dots, z_{n+1}] | x_i([z_1, \dots, z_{n+1}]) \in V\}$

$$= \left\{[z_1, \dots, z_{n+1}] \middle| \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right) \in V\right\}$$

Jelas $\pi^{-1}\left(x_i^{-1}(V)\right) = \left\{(z_1, \dots, z_{n+1}) \middle| \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right) \in V\right\}$.

Pilih $W = \left\{(z_1, \dots, z_{n+1}) \middle| \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right) \in V\right\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$.

Jelas W himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1}$.

Jelas $\pi^{-1}\left(x_i^{-1}(V)\right) = W \cap (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$.

Jelas $\pi^{-1}\left(x_i^{-1}(V)\right)$ adalah himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Karena $\pi^{-1}\left(x_i^{-1}(V)\right)$ adalah himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ dan proyeksi π adalah pemetaan terbuka jelas $\pi\left(\pi^{-1}\left(x_i^{-1}(V)\right)\right) = x_i^{-1}(V)$ adalah himpunan buka dalam $\mathbb{C}P^n$.

Pilih $W' = x_i^{-1}(V)$ sebagai himpunan buka dalam $\mathbb{C}P^n$.

Jelas $x_i^{-1}(V) = W' \cap U_i$.

Jelas $x_i^{-1}(V)$ adalah himpunan buka dalam U_i.

Jelas $x_i\left(x_i^{-1}(V)\right) \subseteq V$.

Karena V adalah sembarang himpunan buka dalam $\mathbb{R}^{2n}$ yang sifatnya terdapat himpunan buka dalam U_i yaitu $x_i^{-1}(V)$ yang sifatnya $x_i\left(x_i^{-1}(V)\right) \subseteq V$, jelas pemetaan $x_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ adalah kontinu.

(ii) Dibuktikan pemetaan $x_i: U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ adalah bijektif.

1. Ambil sembarang $[y_1, \dots, y_{n+1}], [z_1, \dots, z_{n+1}] \in U_i$ yang sifatnya $x_i([y_1, \dots, y_{n+1}]) = x_i([z_1, \dots, z_{n+1}])$.

   Jelas $\frac{y_k}{y_i} = \frac{z_k}{z_i}$ untuk setiap $k \neq i$.

   Jelas $y_k z_i = y_i z_k$ untuk setiap $k \neq i$.

   Karena $y_k z_i = y_i z_k$ untuk setiap $k \neq i$, jelas $(y_1, \dots, y_{n+1}) \sim (z_1, \dots, z_{n+1})$ dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

   Karena $(y_1, \dots, y_{n+1}) \sim (z_1, \dots, z_{n+1})$ dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, jelas $[y_1, \dots, y_{n+1}] = [z_1, \dots, z_{n+1}]$.

   Jadi pemetaan $x_i: U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ adalah injektif.

2. Ambil sebarang $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.

   Tulis $z_k = x_k + iy_k$ untuk setiap $k = 1, \dots, n$.

   Pilih $[z] = [z_1 : \dots : z_{k-1} : 1 : z_k : \dots : z_n] \in U_i$.

   $$\begin{aligned}\text{Jelas } x_k([z_1 : \dots : z_{k-1} : 1 : z_k : \dots : z_n]) &= \left(\frac{z_1}{1}, \dots, \frac{z_{k-1}}{1}, \frac{z_k}{1}, \dots, \frac{z_n}{1}\right) \\ &= (z_1, \dots, z_n) \\ &= (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n).\end{aligned}$$

   Jadi pemetaan $x_i: U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ adalah surjektif.

Dari 1 dan 2, diperoleh pemetaan $x_i: U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ adalah bijektif.

(iii) Dibuktikan pemetaan $x_i: U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ memiliki invers.

Definisikan $x_i^{-1}: \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow U_i$ sebagai berikut:

$$x_i^{-1}\big((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)\big) = x_i^{-1}(z_1, \dots, z_n) = [z_1 : \dots : z_{i-1} : 1 : z_i : \dots : z_n]$$

1. $$\begin{aligned}\text{Jelas } x_i^{-1}\big(x_i([z_1, \dots, z_{n+1}])\big) &= x_i^{-1}\left(\left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right)\right) \\ &= \left[\frac{z_1}{z_i} : \dots : \frac{z_{i-1}}{z_i} : 1 : \frac{z_{i+1}}{z_i} : \dots : \frac{z_{n+1}}{z_i}\right] \\ &= \left[\frac{z_1}{z_i} : \dots : \frac{z_{i-1}}{z_i} : \frac{z_i}{z_i} : \frac{z_{i+1}}{z_i} : \dots : \frac{z_{n+1}}{z_i}\right] \\ &= [z_1, \dots, z_{n+1}].\end{aligned}$$

   Jadi $x_i^{-1} \circ x_i = 1_{U_i}$.

δELTΔ Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika
Vol. 9 No. 1 Januari 2021 hal. 99 – 112

2. Jelas $x_i\left(x_i^{-1}\big((z_1,\dots,z_n)\big)\right) = x_i([z_1:\dots:z_{i-1}:1:z_i:\dots:z_n])$

$$= \left(\frac{z_1}{1},\dots,\frac{z_n}{1}\right)$$

$$= (z_1,\dots,z_n)$$

Jadi $x_i \circ x_i^{-1} = 1_{\mathbb{R}^{2n}}$

Dari 1 dan 2, diperoleh $x_i^{-1}\colon \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow U_i$ adalah invers dari pemetaan x_i.

(iv). Dibuktikan bahwa pemetaan $x_i^{-1}\colon \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow U_i$ adalah kontinu.

Ambil sembarang himpunan buka V dalam U_i.

Jelas $(x_i^{-1})^{-1}(V) = \{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{R}^{2n} | [z_1:\dots:z_{i-1}:1:z_i:\dots:z_n] \in V \subseteq U_i\}$

$$= \left\{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{R}^{2n} \middle| (z_1,\dots,z_{i-1},1,z_i,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}\right\}$$

$$= \mathbb{R}^{2n}.$$

Jelas $(x_i^{-1})^{-1}(V) = \mathbb{R}^{2n}$ adalah himpunan buka dalam $\mathbb{R}^{2n}$.

Jelas $x_i\left((x_i^{-1})^{-1}(V)\right) \subseteq V$.

Jadi pemetaan $x_i^{-1}\colon \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow U_i$ adalah kontinu.

Dari (i), (ii), (iii) dan (iv), jelas pemetaan $x_i\colon U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ adalah homeomorfisma.

Jadi pemetaan $x_i\colon U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ adalah *chart* pada U_i.

(v) Dibuktikan bahwa $\{U_i\}_{i=1}^{n+1}$ adalah selimut buka dari $\mathbb{C}P^n$; artinya $\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i = \mathbb{C}P^n$.

Karena $V_i = \{(z_1,\dots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} | z_i \neq 0\}$ adalah himpunan buka, jelas himpunan $V_i = V_i \cap (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) = \{(z_1,\dots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} | z_i \neq 0\}$ adalah juga himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Jelas $\pi^{-1}(U_i) = V_i$ adalah himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Karena $\pi^{-1}(U_i) = V_i$ adalah himpunan buka dalam $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, jelas U_i adalah himpunan buka dalam $\mathbb{C}P^n$.

Karena $U_i \subseteq \mathbb{C}P^n$, jelas $\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i \subseteq \mathbb{C}P^n$. (*).

Ambil sembarang $[z] = [z_1:\dots:z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^n$.

Jelas $(z_1,\dots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.

Jelas $z_i \neq 0$ untuk setiap $i = 1,\dots,n+1$.

Jelas ini juga berlaku $z_i \neq 0$ untuk suatu $i = 1,\dots,n+1$.

Jadi $z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ yang sifatnya $z_i \neq 0$ untuk suatu $i = 1, \dots, n+1$.

Akibatnya $[z] \in U_i$ untuk suatu $= 1, \dots, n+1$.

Jadi $[z] \in \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$.

Jadi $\mathbb{C}P^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$. (**).

Dari (*) dan (**), diperoleh $\mathbb{C}P^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$.

Jadi $\{U_i\}_{i=1}^{n+1}$ adalah selimut buka dari $\mathbb{C}P^n$.

Dari (v), jelas bahwa $\mathcal{A} = \{x_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}\}_{i=1}^{n+1}$ membentuk atlas pada $\mathbb{C}P^n$.
Jadi ruang proyektif komplek $\mathbb{C}P^n$ adalah manifold topologis berdimensi $2n$.

Diberikan $U_i = \{[z_1, \dots, z_{n+1}] | z_i \neq 0\}$ dan $U_j = \{[z_1, \dots, z_{n+1}] | z_j \neq 0\}$ dan pandang $\mathbb{R}^{2n}$ sebagai $\mathbb{C}^n$. Anggap $i < j$ dan diperoleh himpunan berikut:

$$U_i \bigcap U_j = \{[z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_{n+1}] | z_i, z_j \neq 0\}$$

dan ini jelas bahwa pemetaan $x_i|_{U_i \cap U_j} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$x_i|_{U_i \cap U_j}([z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_{n+1}]) = \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_j}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right)$$

serta pemetaan $x_j\big|_{U_i \cap U_j} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ juga didefinisikan sebagai berikut:

$$x_j\big|_{U_i \cap U_j}([z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_{n+1}]) = \left(\frac{z_1}{z_j}, \dots, \frac{z_i}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_i}, \frac{z_{j+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right)$$

Kemudian bentuk pemetaan transisi yaitu pemetaan $x_{ij} : x_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow x_j(U_i \cap U_j)$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \left(x_j\big|_{U_i \cap U_j}\right) \circ \left(x_i|_{U_i \cap U_j}\right)^{-1} ((z_1, \dots, z_n)) \\ &= \left(\frac{z_1}{z_j}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_j}, \frac{1}{z_j}, \frac{z_i}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j}\right) \end{aligned}$$

Lemma 1.9. Fungsi $x_k : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ yang didefinisikan dengan $x_k((z_1, \dots, z_k, \dots, z_n)) = z_k$ adalah holomorfik untuk setiap $k = 1, \dots, n$.

Bukti:

δELTΔ Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika
Vol. 9 No. 1 Januari 2021 hal. 99 – 112

Pemetaan $x_k : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ yang didefinisikan dengan $x_k\big((z_1, \dots, z_k, \dots, z_n)\big) = z_k$ dapat dinyatakan dalam bentuk $x_k = u(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) + iv(y_1, \dots, y_k, \dots, y_n) = x_k + iy_k$ untuk setiap $k = 1, \dots, n$.

Jelas $u(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = x_k$ dan $v(y_1, \dots, y_k, \dots, y_n) = y_k$.

Dengan persamaan Cauchy-Riemann diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y_k} \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y_k} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x_k}$$

untuk setiap $k = 1, \dots, n$.

Jadi $x_k : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ yang didefinisikan dengan $x_k\big((z_1, \dots, z_k, \dots, z_n)\big) = z_k$ adalah holomorfik untuk setiap $k = 1, \dots, n$.

Sifat 1.10. Untuk $i < j$, pemetaan transisi $x_{ij} : x_i\big(U_i \cap U_j\big) \longrightarrow x_j\big(U_i \cap U_j\big)$ adalah holomorfik.

Bukti:

Pemetaan transisi $x_{ij} : x_i\big(U_i \cap U_j\big) \longrightarrow x_j\big(U_i \cap U_j\big)$ dapat dinyatakan $x_{ij} = (x_{i1}, \dots, x_{ik}, \dots, x_{in})$, dimana $x_{ik} : x_i\big(U_i \cap U_j\big) \longrightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$x_{ik}\big((z_1, \dots, z_k, \dots, z_n)\big) = z_k$$

untuk setiap $(z_1, \dots, z_k, \dots, z_n) \in x_i\big(U_i \cap U_j\big)$.

Jelas berdasarkan Lemma 1.9, pemetaan $x_{ik} : x_i\big(U_i \cap U_j\big) \longrightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ adalah holomorfik.

Akibatnya pemetaan transisi $x_{ij} : x_i\big(U_i \cap U_j\big) \longrightarrow x_j\big(U_i \cap U_j\big)$ adalah holomorfik.

Dari Sifat 1.10, jelas atlas $\mathcal{A} = \{x_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}\}_{i=1}^{n+1}$ adalah atlas holomorfik. Kelas ekuivalensi yang memuat atlas holomorfik $\mathcal{A} = \{x_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}\}_{i=1}^{n+1}$ dinamakan struktur kompleks pada $\mathbb{C}P^n$ dan akibatnya ruang proyektif kompleks $\mathbb{C}P^n$ adalah manifold kompleks.

4. Kesimpulan

Simpulan dari penelitian ini adalah 1) ruang proyektif kompleks berdimensi-*n* yaitu $\mathbb{C}P^n$ dikontruksi melalui ruang euclidean kompleks berdimensi-$n + 1$ yaitu $\mathbb{C}^{n+1}$ terhadap relasi ekuivalensi tertentu, 2) ruang proyektif kompleks berdimensi-*n* yaitu $\mathbb{C}P^n$

adalah ruang topologi kompak dan terhubung, dan 3) ruang proyektif kompleks berdimensi-*n* yaitu $\mathbb{C}P^n$ adalah manifold kompleks berdimensi-*n*.

Pustaka

Adachi, T,. Udagawa, S, Maeda, S,. 1995, *Circles in a Complex Projective Space,* Osaka J. Math.32 (1995), 709-719.

Arapura, D,. 2012,. *Algebraic Geometry over the Complex Numbers*,. New-York, Springer-Verlag.

Cattani, E., Zein, F.E., Griffiths, P.A., Trang, L.D. (2013). *Hodge Theory*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Dugundji, J,. 1966,. *Topology*,. Michigan,. Allyn and Bacon.

Kasilingam, R,. 2016,. *Classification of Smooth Structures on a Homotopy Complex Projective Space*,. Proc. Indian Acad. Sci (Math.Sci). Vol. 126, No. 2, May 2016, pp.277-281, Inidian Academy of Sciences.

Movasati, H. & Vilaflor, R. (2020). *A Course in Hodge Theory: Periods of Algebraic Cycles.* Publisher.

Movasati, H. (2020). *A Course in Hodge Theory: With Emphasis on Multiple Integrals.* Boston: International Press.

Nicolaescu, L.I. (2018). *Lectures on the Geometry of Manifolds.* Washington: World Scientific.

Tu, L.W. (1982). *An Introduction to Manifolds*. New York: Springer.

Voisin, C,. 2002, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry* I, Cambridge, Cambridge University Press.

δELTΔ Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika
Vol. 9 No. 1 Januari 2021 hal. 99 – 112