



**Publio Suárez Sotomonte**

Magíster en Educación  
Profesor Universidad  
Pedagógica y Tecnológica de  
Colombia  
Grupo de Investigación:  
Pirámide  
psuarez2002@hotmail.com

**Guillermo Alfonso**

**Ramírez Vanegas**  
Especialista en Evaluación  
Pedagógica  
Estudiante de la Maestría en  
Educación - UPTC  
Profesor Institución  
Ecológico San Francisco de  
Cómbita - Boyacá  
Grupo de Investigación:  
Pirámide  
guillermirez12@hotmail.com

Artículo de Investigación

Recibido: 11 de abril de 2011

Aceptado: 24 de julio de 2011

Praxis  
&  
Saber

Revista de Investigación y Pedagogía  
Maestría en Educación. Uptc

## EXPLORACIÓN DE SÓLIDOS A PARTIR DE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

## EXPLORAÇÃO DE SÓLIDOS BASEADA EM SISTEMAS DE REPRESENTAÇÃO

## EXPLORATION DE SOLIDES À PARTIR DE SYSTÈMES DE REPRÉSENTATION

## EXPLORATION OF SOLIDS BASED ON REPRESENTATION SYSTEMS

## Resumen

El artículo hace referencia a algunos de los resultados de una investigación que implementó una estrategia de enseñanza para generar ambientes de aprendizaje de sólidos platónicos y arquimedianos en un grupo de estudiantes de octavo grado; estrategia fundamentada en el enfoque de aprendizaje significativo y en el manejo de los sistemas de representación desde el enfoque ontosemiótico de la educación matemática, como soporte para la construcción de conceptos matemáticos. La estrategia de enseñanza de la geometría adopta las etapas de exploración, representación-modelación, construcción formal y estudio de las aplicaciones, y usa materiales concretos, físicos y tangibles, relativos al origami, troquelado y estructuras, como opciones de construcción de los sólidos tridimensionales, considerados sistemas de representación externos tangibles; al igual que herramientas educativas informáticas para diseñar ambientes de geometría dinámica, como sistemas de representación externos intangibles, que junto con los anteriores son el soporte para el desarrollo de la imaginación y de los sistemas internos de representación, fundamentales en la comprensión de conceptos geométricos.

**Palabras clave:** Sólidos platónicos y arquimedianos, Ambientes de aprendizaje, Geometría dinámica, Sistemas de representación.

## Resumo

O artigo faz referência a alguns resultados de uma pesquisa que experimentou uma estratégia de ensino que gera ambientes de aprendizagem de sólidos platônicos e arquimedianos em uma turma de oitava série de ensino fundamental. A estratégia está fundamentada na aprendizagem significativa e no uso de sistemas de representação desde o enfoque ontosemiótico da educação matemática, como apoio na construção de conceitos matemáticos. A estratégia de ensino da geometria segue as etapas de exploração, representação-modelação, construção formal e estudo das aplicações; usa materiais concretos, físicos e tangíveis, tocantes ao origami, cunhado, gravuras e estruturas, como opções de construção de sólidos tridimensionais, considerados

sistemas de representação externa tangíveis, e instrumentos educativos informáticos para representar ambientes de geometria dinâmica, como sistemas de representação externa tangíveis, que ao lado dos anteriores são suporte para o desenvolvimento da imaginação e dos sistemas de representação interna, fundamentais na compreensão dos conceitos geométricos.

**Palavras Chave.** Sólidos platônicos e arquimedianos, ambientes de aprendizagem, geometria dinâmica, sistemas de representação

## Résumé

L'article fait référence à quelques résultats d'une recherche qui a implémenté une stratégie d'enseignement pour générer des ambiances d'apprentissage de solides platoniques et archimédiens chez un groupe d'élèves de la quatrième. Cette stratégie-là a eu des fondements sur l'approche de l'apprentissage significatif et sur le maniement des systèmes de représentation dès l'approche ontosémiotique de l'éducation mathématique, en tant que support pour la construction de concepts mathématiques. La stratégie de l'enseignement de la géométrie adopte les étapes d'exploration, de représentations-modélisation, de construction formelle et d'étude des applications. De la même façon, elle utilise des matériaux concrets, physiques et tangibles, relatifs à l'origami, au troquelage et aux structures, en tant que des options de construction des solides tridimensionnels, considérés des systèmes de représentations externe-tangibles. D'autre part, cette stratégie-là utilise des outils éducatifs informatiques pour dessiner des ambiances de géométrie dynamique, en tant que systèmes de représentations externes intangibles, qui, avec les éléments précédents, sont le seul support pour le développement de l'imagination et des systèmes internes de représentations, fondamentaux dans la compréhension de concepts géométriques.

**Mots clés:** Solides platoniques et archimédiens, Ambiances d'apprentissage, Géométrie dynamique, Systèmes de représentation.

## Abstract

This article refers to some of the findings of a research project implemented as a teaching strategy to generate environments for the learning of platonic and archimedean solids, with a group of eighth grade students. This strategy was based on the meaningful learning approach and on the use of representation systems using the ontosemiotic approach in mathematical education, as a framework for the construction of mathematical concepts. This geometry teaching strategy adopts the stages of exploration, representation-modeling, formal construction and study of applications. It uses concrete, physical and tangible materials for origami, die making, and structures for the construction of three-dimensional solids considered external tangible solid representation systems; as well as computer based educational tools to design dynamic geometry environments as intangible external representation systems. These strategies support both the imagination and internal systems of representation, fundamental to the comprehension of geometry concepts.

**Key words:** Platonic and archimedean solids, learning environments, dynamic geometry, representation systems.

## Introducción

La geometría ha sido considerada fundamental en la formación de las personas, por ello se la ha incorporado en los programas curriculares de todos los países, pero, en la práctica, siempre ha estado relegada a la disposición de tiempo del maestro, tal vez, por el desconocimiento de estrategias efectivas que garanticen ambientes propicios para el aprendizaje. Al respecto, cabe considerar que “El papel de la geometría es un tema permanente de la educación matemática en todos los niveles, desde la escuela elemental hasta la superior. Durante muchos años la geometría ha sido el niño problema de los planes de estudio de matemáticas” (Steen, 1999, p. 186).

Actualmente existen programas de geometría dinámica que pueden ser usados como mediaciones para la representación de conceptos, modelos y estructuras de diversos tipos de programas de geometría. El auge de actividades integradas permite que el estudiante interactúe permanentemente, manipule objetos concretos (preferiblemente contruidos por él), reflexione acerca de sus características y, por último, desarrolle simultáneamente varios tipos de pensamiento; un propósito fundamental de esta propuesta persigue mejorar el aprendizaje de la geometría espacial.

El artículo inicia con una breve descripción de algunos trabajos particulares de geometría implementados en el ámbito nacional e internacional; se hace énfasis en las ideas planteadas en el enfoque que se conoce como geometría activa (MEN, 2002); recalca en la enseñanza de la geometría dinámica, que encamina al docente hacia la utilización de *software* diseñado para tal fin; finaliza con la descripción de los propósitos y los aspectos generales de la propuesta de investigación denominada “El aprendizaje de la geometría tridimensional (sólidos platónicos y arquimedianos) mediante el uso de herramientas educativas informáticas”.

De esta manera se pretende mostrar el trabajo que se ha realizado a través de una propuesta de investigación encaminada a destacar el reconocimiento y la representación de formas bidimensionales y tridimensionales, mediante una manera activa y dinámica de aprender geometría.

## Estado del arte

### Referentes nacionales de la educación geométrica y su relación con lineamientos, estándares y programas particulares de geometría implementados

Tradicionalmente, el aprendizaje de la geometría ha estado enmarcado en enfoques epistemológicos formalistas y en una metodología para su enseñanza de tipo algorítmico, cuya principal característica es la transmisión unidireccional de conocimientos y el empleo del método axiomático-deductivo para estructurar los conceptos claves, como puntos, rectas, segmentos, planos, semiplanos, figuras geométricas en el plano y el espacio y trazado y construcción mecánica de líneas y formas, entre otros, lo cual conlleva la memorización de propiedades y formulación de relaciones estrictamente demostradas con especial sutileza y simbolismo impecable, al estilo de los Elementos de Euclides. Tales características fueron esenciales en la denominada geometría euclidiana, y constituían un aspecto primordial en la formación básica contemplada en los planes curriculares en educación básica, media y primeros cursos de universidad.

Con el movimiento de la llamada “Matemática Moderna” se pretendió dar un cambio de rumbo a la educación matemática basada en las concepciones formalista y estructuralista. Según Vasco, el grito de “muerte a Euclides”, lanzado por Dieudonné, en una célebre arenga en el coloquio de Royaumont, en 1959, retumbó en todo el mundo, y llegó al extremo de eliminar la geometría como curso paralelo al álgebra, para dejarla relegada en la parte final de los programas; por supuesto, nunca se alcanzaba a desarrollar (Vasco, 1992).

La promesa hecha por Dieudonné de escribir un libro de geometría sin un solo dibujo, la cumplió diez años después al publicar su “Álgebra Lineal y Geometría Elemental”; fue una creación rica en contenido geométrico formal, con el empleo del método axiomático deductivo, a partir de nociones o definiciones, proposiciones y teoremas de innegable importancia, demostrados en forma elegante y rigurosa. La corriente *bourbakista* generó un clima de rigurosidad y abstracción excesiva, con el cual se impregnó la enseñanza y aprendizaje de la geometría en las décadas de los sesenta y setenta; dicho enfoque se evidencia en las

principales propuestas de los programas curriculares para educación básica en Colombia para esa época.

Dos trabajos fundamentales para despertar la reflexión acerca de los temas pedagógicos de la geometría, como elementos en la formación integral del individuo, han sido el de Alberto Campos (1981) y el de Carlos E. Vasco (1992); el primero abarca desde una revisión histórica de las concepciones epistemológicas de las clases de geometría –con el estudio de aspectos teóricos claves– hasta las implicaciones generadas en la educación geométrica en las instituciones universitarias en Colombia, y el segundo es el de la propuesta de la “Geometría Activa” y su énfasis en el pensamiento espacial y en los sistemas geométricos (MEN., 2000). Adicionalmente, los trabajos que han influenciado este desarrollo están contemplados en los lineamientos y estándares curriculares de Matemáticas (Campos, 1981) y el proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional.

Otro trabajo importante es la investigación titulada “El aprendizaje de la geometría tridimensional (sólidos platónicos y arquimedianos) mediante el uso de herramientas educativas informáticas”, que se enmarca dentro de la propuesta de “Geometría Activa”, sintetizada por Castaño (2006). Allí se exponen algunas ideas formuladas en este artículo respecto del método “descubro la matemática”, especialmente relacionadas con el pensamiento métrico en geometría y referidas al aprendizaje de conceptos y estructuras geométricas de poliedros, y las concepciones didácticas necesarias para la construcción de los conceptos de la geometría del espacio tridimensional, con énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial y el manejo de los sistemas geométricos, como lo propone Vasco (1992). Se incorpora la geometría dinámica como forma de representación semiótica para llegar a la formación de representaciones mentales necesarias en la construcción conceptual.

### **Casos particulares de algunas investigaciones en educación geométrica en los ámbitos nacional e internacional**

Una de las metas trazadas por el Ministerio de Educación Nacional, con el compromiso de los diferentes estamentos educativos, es contribuir en la incorporación de las nuevas tecnologías computacionales en las diferentes áreas del conocimiento. A continuación se muestran los resultados y

sus avances de algunas investigaciones orientadas a la incorporación de nuevas tecnologías al currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia, promovidas por la Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media del MEN.

En el departamento de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, el grupo de investigación “Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría”, de Leonor Camargo, Carmen Samper y Patricia Perry, en “Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programa de geometría dinámica” (Camargo, Samper, 2006 y Perry, pp. 371-383), concluye que la geometría dinámica provee un contexto rico en posibilidades de expresión que apoya la actividad demostrativa de los estudiantes. De otro lado, los estudiantes muestran facilidad y rapidez en las construcciones geométricas, real mediciones, constatan propiedades y transforman las construcciones hechas. La geometría dinámica permite vincular la exploración con la demostración en el ámbito de la geometría euclidiana.

Luis Ángel Bohórquez Arenas, de la Universidad Distrital ‘Francisco José de Caldas’, en el año 2004, a través de su trabajo “Sobre las formas de incorporar el software Cabri Geometry en la enseñanza de los conceptos geométricos en el bachillerato” (Bohórquez, 2004, pp. 106-109), destaca que el uso del *software* en el aprendizaje de las matemáticas es efectivo, pues conlleva la comprensión de conceptos geométricos; igualmente, destaca la necesidad de plantear problemas que generen diversas estrategias de solución y la necesidad de utilizar *software* de manera natural, y enfatiza en las formas, ventajas y creación de ambientes propicios para el aprendizaje a partir del uso del Cabri Geometry.

En el ámbito internacional, Ángel P. González Soto y Nieves M. Vilchez González, de la Universidad Monseñor Estandislo Carrillo, de Venezuela, implementaron, del 2000 al 2002, el trabajo “Enseñanza de la geometría con la utilización de recursos multimedia” (González y Vilchez, 2007). Mediante la investigación educativa, a través del método cualitativo interpretativo, y haciendo uso del estudio de casos a partir de contextos espacio-temporales, focos de atención y fundamentos, planteados en el aula y en el laboratorio de computación, observaron

que con la aplicación de las nuevas tecnologías se inician una serie de experiencias que permiten el desarrollo de estructuras mentales y de esquemas de conocimiento en los estudiantes. La enseñanza de la geometría está enmarcada en la motivación y en el ofrecer a los alumnos herramientas que los lleven a descubrir el conocimiento a través de sus acciones. Desde el contexto educativo es posible utilizar los recursos multimedia, para así poder vivir la experiencia del cambio a partir del aprendizaje cooperativo.

También en Venezuela, Lizabeth Pachano Rivera y Mirian Terán de Serrentino, de la Universidad de los Andes, año 2008, trabajaron: “Estrategias para la enseñanza y aprendizaje de la geometría en educación básica: una experiencia constructivista” (Pachano, 2008, pp. 133-146). Mediante la investigación acción, en el ámbito escolar y a través de un proceso cíclico de planificación, acción, reflexión y evaluación, lograron encontrar que la enseñanza de la geometría debe estar sustentada en la aplicación de estrategias innovadoras, que se adapten a las tendencias actuales; estrategias como la visualización (formación de imágenes), la representación (construcción de imágenes mentales) y hacer conjeturas (observación y razonamiento deductivo). Esto se puede alcanzar mediante la utilización de la geometría dinámica; allí, el estudiante construye significados y los asocia con su experiencia.

Luz Manuel Santos Trigo (2003, pp. 195-211), de la Universidad de La Laguna, Venezuela, en “Procesos de transformación de artefactos tecnológicos en herramientas de resolución de problemas matemáticos”, escribe que los avances tecnológicos han influido notablemente en la forma de hacer y aprender matemáticas. El software dinámico ofrece alternativas claras a los estudiantes para identificar y explorar diversas relaciones matemáticas. Los estudiantes identifican el uso del computador como una herramienta que les permite ampliar sus capacidades cognitivas; esto les facilita el desarrollo de la visualización, el reconocimiento y la argumentación, procesos fundamentales en la geometría.

Finalmente, Jesús Victoria Flores Salazar, de la Universidad Federal de Rio Grande do Norte en Brasil, desarrolló el trabajo “Enseñanza de la geometría espacial utilizando CABRI 3D” (Flores, 2008); concluyó que las posibilidades del software son ilimitadas y se someten al conocimiento

del usuario. El CABRI 3D puede utilizarse sin mayor dificultad en la educación secundaria, pero debe hacerse como una herramienta que contribuya al aprendizaje mediante la construcción y la exploración.

## Características de la enseñanza de la geometría en diversos países en el siglo XX

La Unesco, en su informe *Estudios en educación matemática* (1986), destaca las principales características de la enseñanza de la geometría, las cuales se resumen y transcriben a continuación, destacando los autores, el país y las ideas principales contempladas en el informe. La identificación y clasificación de dichas ideas estuvo determinada por su relevancia y pertinencia con el trabajo de investigación base de este artículo.

**Tabla 1.** Características de la enseñanza de la geometría en diversos países en el siglo xx (Unesco, 1986)

AUTORES	PAÍSES	IDEAS PRINCIPALES
HICHAM BANNOUT Y MANSOUR HUSSAIN	KUMAI TÚNEZ LIBANO	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tiempo en horas dedicado a la enseñanza de la geometría es muy poco, y no hay un interés de los docentes.</li> <li>• Contenidos y métodos tradicionales y clásicos, que no conducen al estudiante al descubrimiento de la geometría.</li> <li>• A partir de la década de los sesenta se hace gran énfasis en la construcción de figuras geométricas; se da gran importancia a la observación y al desarrollo de actividades prácticas.</li> </ul>
DAVID ROBITAILLE Y KENNET TRAVERS	CANADÁ Y EE.UU.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se hace énfasis en la geometría plana, uso de coordenadas, congruencia y semejanza. Poco lo relacionado con visualización espacial y geometría sólida.</li> <li>• La enseñanza de la geometría bajo un enfoque instruccional basado en la inducción e intuición.</li> <li>• La geometría ocupa un lugar curricular, pero se evidencia la falta de compromiso de los docentes para su enseñanza, y falta de contenidos y métodos.</li> </ul>
EMILIO LLUIS	AMÉRICA LATINA	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La geometría no ha desaparecido del currículo, queda a libre criterio del docente, quien no tiene claridad en lo que se debe enseñar.</li> <li>• Predomina la enseñanza de la geometría euclidiana, aun así es muy pobre en sus contenidos.</li> <li>• En la enseñanza de la geometría predominan toda clase de enfoques, tradicional, por axiomas, por transformaciones, método vectorial, etc., perjudicando notablemente a los estudiantes.</li> <li>• Los grupos de investigación en geometría disponen de muy pocos recursos para el estudio y divulgación de sus resultados.</li> </ul>

<b>LEE PENG-YEE Y LIM CHONG- KEANG</b>	ASIA SUR ORIENTAL	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cada día se enseña menos geometría euclidiana clásica, empiezan a desaparecer las demostraciones de teoremas y se van introduciendo las transformaciones geométricas.</li> <li>• Es muy poca la enseñanza de la geometría tridimensional.</li> <li>• La enseñanza de la geometría está amenazada por el énfasis en la enseñanza de álgebra, análisis, estadística e informática.</li> </ul>
<b>ADONIS F. LABOR</b>	SIERRA LEONA	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La nueva matemática ha impulsado situaciones en donde el niño investiga y descubre por sí mismo.</li> <li>• El papel del docente es guiar a los alumnos a participar activamente en el aprendizaje geométrico.</li> <li>• Existe una diferencia marcada en los contenidos que se enseñan en las diversas escuelas y niveles, en los contenidos y en los métodos de enseñanza.</li> </ul>
<b>L. YU CHERNYSHEVA, V.V. FIRSOV Y S.A. TELJAKOVSKII</b>	ANTIGUA UNIÓN DE REPÚBLICAS SOVIÉTICAS SOCIALISTAS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Existen dos corrientes: los que rechazan completamente la enseñanza de la geometría en forma sistemática, y los que sostienen que la geometría constituye la principal asignatura del currículo escolar.</li> <li>• La enseñanza de la geometría se hace a través de los manuales básicos de Kiselev (1852-1940); alto nivel científico en los contenidos y estructura metodológica perfecta.</li> <li>• A partir de 1982 se adoptan los textos de Pogorelov como guía principal de la geometría, sigue un estudio sistemático desde los conceptos básicos, pasando por geometría euclidiana hasta llegar a la solución de problemas geométricos en tercera dimensión.</li> <li>• Es notorio el interés matemático y pedagógico en la enseñanza de la geometría.</li> </ul>
<b>D.S. FIELKER</b>	REINO UNIDO E IRLANDA DEL NORTE	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Antes de la década de los sesenta, la enseñanza de la geometría era mínima, tradicional y clásica.</li> <li>• A partir de la década de los sesenta, la enseñanza se desarrolló partiendo de tres etapas: la experimental, la deductiva y la sistematización.</li> <li>• Las escuelas debían garantizar el estímulo y el desarrollo espacial del niño; se hizo énfasis en las traslaciones, desplazamientos y simetrías.</li> <li>• Posterior a 1985 se enseña esta ciencia por procesos y contenidos, con el fin de encaminar a los docentes a realizar investigación definida como la consolidación y prácticas de rutinas fundamentales.</li> </ul>

## Los niveles de Van Hiele y su relación con el constructivismo

A pesar de la preocupación de la mayoría de maestros por cualificarse en enfoques actuales en pedagogía, didáctica, tecnologías y, de manera particular, en sus áreas de especialización, muchos se ven abocados a implementar, en parte de su labor docente, estrategias tradicionales basadas en la heteroestructuración (esto es, la transmisión de conocimientos),

a causa de factores que muchas veces se escapan de su gestión, como el excesivo número de estudiantes por profesor –debido a políticas de racionalización–, la falta de apoyo en la dotación de materiales, recursos y mediaciones, y el afán de las instituciones por cumplir cabalmente el programa planteado. La investigación como estrategia pedagógica en el aula no ha sido relevante en la labor del docente; por tal razón, las innovaciones pedagógicas no cobran mayor importancia, lo cual ha generado un énfasis en investigación teórica, en detrimento de la investigación de la dinámica en el aula. Al respecto se señala que: “la investigación tradicional se ha enfocado más en crear las teorías sobre la educación que en mejorar la práctica educativa, separando y distanciando a quienes investigan en educación de quienes están en la práctica” (Latorre, 2008, p. 10).

Uno de los enfoques que se aplican para determinar el progreso en el conocimiento geométrico en un individuo es la teoría de los niveles de razonamiento, propuesta por el matrimonio holandés Van Hiele (Castaño, 2006). Los niveles de razonamiento son: *reconocimiento o descripción*, donde el estudiante percibe y reconoce explícitamente las componentes y propiedades de los objetos; *análisis*, donde percibe, describe y deduce nuevas propiedades a partir de la experimentación; *clasificación o abstracción*, donde realiza, describe y comprende los pasos individuales de un razonamiento lógico; *deducción o prueba*, aquí el estudiante es capaz de realizar, comprender y aceptar razonamientos lógicos formales, y, finalmente, *rigor*, en donde se posee capacidad para manejar, analizar y comprender diferentes geometrías. La aplicación de este modelo permite

mostrar que el razonamiento geométrico evoluciona desde niveles muy elementales de reconocimiento e identificación de las figuras geométricas hasta el desarrollo de razonamientos deductivos, y que si un docente insiste en preocuparse porque sus alumnos solo aprendan a identificar las figuras geométricas con sus nombres (e incluso definiciones) está condenándolos a mantenerse en un nivel muy elemental de pensamiento geométrico (García, 2008, p. 71).

Otro enfoque con el que se trabaja el aprendizaje de la geometría es el constructivismo. Para Kant (1991, p. 33), el conocimiento se construye a partir de la experiencia sensorial y la acción de la mente (razón), así el conocimiento viene a ser el resultado de la interacción de los conceptos. Para Piaget (1971), el desarrollo cognitivo puede comprenderse como la adquisición sucesiva de estructuras lógicas que son cada vez más complejas,

y que subyacen en distintas áreas y situaciones que el sujeto es capaz de ir resolviendo a medida que crece; desde esta perspectiva, el maestro, como mediador del aprendizaje, debe brindar a los estudiantes estrategias con contenidos contextualizados e interrelacionados que conduzcan al logro de aprendizajes significativos y permanentes.

## La geometría dinámica y su evolución

Para Castiblanco y Moreno (2004), la geometría es una ciencia que brinda la posibilidad al ser humano de situarse en el mundo donde desarrolla su acción. En sus inicios, esta ciencia se desarrolló de maneras puramente visuales, conceptuales y abstractas; muestra de ello son las decoraciones existentes en las vasijas de barro o en las cuevas rupestres de nuestros antepasados. Una segunda forma de geometría vivida por el ser humano surgió a raíz de las necesidades utilitarias que se presentaban: mediciones de áreas, de volúmenes, de linderos de tierra, y su uso en arquitectura, geografía y astronomía.

La *geometría euclidiana* (300 a.C.) surge con los tratados construidos por Euclides y socializados en sus libros *Los Elementos*, compilación y ampliación de los trabajos de Apolonio, Arquímedes y Tolomeo; su presentación se caracteriza por ser una geometría de tipo axiomática de carácter deductivo. En torno a la geometría euclidiana surge la *geometría proyectiva*, con los trabajos de Desargues, plasmada en la perspectiva usada en las primeras representaciones del desarrollo de las dimensiones artísticas de los objetos, con Leonardo da Vinci como ejemplo concreto. En el siglo XVII nace la *geometría analítica*, como una mezcla entre la geometría y el álgebra, a partir de la *geometría cartesiana* y la *geometría diferencial*, y posteriormente, en el siglo XVIII, gracias a Monge, surge la *geometría descriptiva*, como una inspiración de las geometrías tridimensionales a través del dibujo y mediante la combinación de los aspectos virtuales y conceptuales.

En el siglo XIX, Bolyai, Lobachevsky y Riemann dan inicio a la geometría denominada *no euclidiana*; ellos impulsaban las verdades convencionales aplicadas o no aplicadas a un mundo real y desarrollaban un trabajo relativo al concepto. Posteriormente, Dedekind, Cantor y Weirstrass (teoría de números) consolidan el estudio del álgebra, proporcionando un modelo firme para la geometría, que generaría la teoría de los espacios vectoriales

y la intuición geométrica. Para finales del siglo xx, como consecuencia de los tratados visuales y los primeros usos de la tecnología, florece la geometría de las *teselaciones y cenefas* de Escher, y la idea de las simetrías de Grunbaum y Shepherd. Simultáneamente, se adelanta la *geometría fractal*, como consecuencia del estudio de la autosemejanza, en objetos geométricos, con aplicaciones en las ciencias, las artes, la naturaleza; asuntos que son posibles de analizar más experimentalmente con el uso de las tecnologías computacionales (Castiblanco y Moreno, 2004).

La *geometría proyectiva* se hace necesaria y evidente con el uso de programas virtuales que tienen su desempeño en la geometría dinámica, especialmente en representación tridimensional. En computación gráfica es fundamental la adopción de la geometría proyectiva en *software* educativo como el Derive, Cabri 3D, Calques 3D, CaRMetal y otros, que sirven de soporte en el renacimiento de la geometría euclidiana y en el diseño de ambientes para el aprendizaje de esta ciencia.

## Representaciones semióticas y mentales

Uno de los aspectos claves en la propuesta de aprendizaje de la geometría es el papel que juegan las representaciones gráficas en la comprensión y construcción conceptuales. Al respecto, Duval (1999) manifiesta que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. Un mismo objeto puede darse a través de representaciones muy diferentes; dicha confusión provoca pérdida de aprendizaje. Las diversas representaciones semióticas de los objetos matemáticos serían, pues, secundarias y extrínsecas a la aprehensión conceptual de los objetos.

Para el desarrollo de la investigación y, por ende, del artículo, se adopta la tesis de Duval, en la cual las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma. La posibilidad de efectuar transformaciones sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. Respecto del trabajo con diversos sistemas de representación semiótica, como soporte fundamental de las operaciones mentales y de la construcción de esquemas mentales, Duval conceptúa: “[...] la pluralidad de los sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y

por tanto sus representaciones mentales (Benveniste, 1974; Bresson, 1987). Las representaciones mentales nunca pueden considerarse independientemente de las representaciones semióticas” (Duval, 1999).

## La representación en educación matemática

El papel de la *representación* es uno de los problemas fundamentales de investigación en educación matemática que mayor desarrollo ha tenido en las últimas tres décadas, pues se ha tratado de responder preguntas sobre la naturaleza, los tipos y el significado que esta tiene con respecto a la construcción de los conceptos matemáticos. En el aprendizaje de las matemáticas es común hablar de representaciones externas o internas a nuestra mente, representaciones mentales, imágenes, modelos y esquemas, y su papel de intermediarias en la elaboración de los conceptos matemáticos. Al respecto, Bruno D’Amore expresa:

La imagen suscitada por el hacerse cargo cognitivo de un concepto matemático da una información que toma en cuenta la cultura individual, la experiencia personal y las capacidades generales del individuo (pero también su capacidad específica de construirse imágenes: y esto podría ser objeto de atención del maestro); siendo al menos en primera instancia involuntaria, la imagen mental se forma por simple asociación verbal o icónica, o por otra cosa. A sucesivos estímulos, puede suceder que se tenga discrepancia entre la imagen formada espontáneamente y la solicitud misma; en estos casos se puede tener conflicto cognitivo (2006, pp. 165-166).

Desde el enfoque ontosemiótico, Font, Godino y D’Amore conceptúan sobre la dificultad de la investigación en el tema de las representaciones:

En nuestra opinión, la complejidad del tema, la ambigüedad de las representaciones y su importancia están en los objetos matemáticos que se trata de representar, su diversidad y naturaleza. Hablar de representación (significado y comprensión) implica necesariamente hablar del conocimiento matemático y, por tanto, de la actividad matemática, sus “producciones” culturales y cognitivas, así como de las relaciones con el mundo que nos rodea (Font, Godino y D’Amore, 2007, p. 12).

Para este trabajo se adoptan las nociones de representaciones semióticas, definidas por Duval, (1999); representaciones mentales, en el sentido de

imagen mental, definida por D'Amore, (2006), y algunas concepciones de Font (2003) sobre el papel de la representación en educación matemática. Se mencionan a continuación supuestos teóricos respecto de la representación que contextualizan el trabajo.

- Ubicados en la opción epistemológica representacionista, que, según Font, “[...] presupone que las personas tienen una mente en la que se producen procesos mentales, y que los objetos externos a las personas generan representaciones mentales internas”, se distinguen las representaciones internas y externas. Font conceptúa:

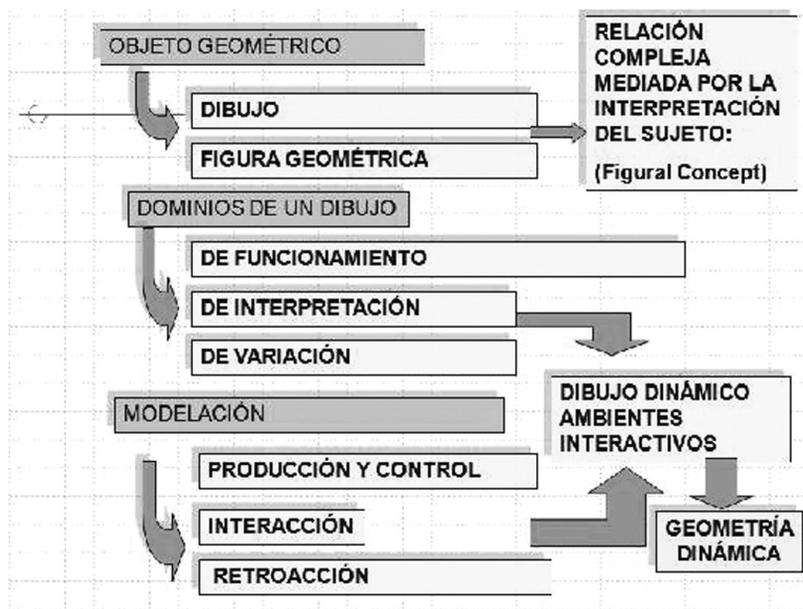
De acuerdo con este punto de vista, las personas tendríamos un conjunto (probablemente infinito) de representaciones mentales que se pueden agrupar en tres tipos: 1) Las que la persona considera externas (las representaciones internas que son el resultado de la codificación de estímulos externos); 2) Las propiamente internas, y 3) Las representaciones internas que sirven para realizar representaciones consideradas externas (representaciones internas que se pueden decodificar produciendo respuestas en el medio exterior) (Font, Godino y D'Amore, 2007, p.12).

- Los dibujos generados en aplicaciones de geometría dinámica son considerados representaciones externas (no ostensivas, en el sentido del enfoque ontosemiótico).

## La geometría dinámica

La amplia divulgación que han tenido aplicaciones de geometría dinámica como Cabri Geometry II, CaRMetal, Cabri3D, Sketchpad, Regla y Compás, Calques, NonEuclid y Fzplot, además de los programas mencionados de matemática simbólica y los especializados para dibujar y modelar poliedros, hace pensar que aprender matemáticas, en educación básica y media y al menos en los primeros niveles de la universidad, sin el uso de estos recursos informáticos sería privarse de vivir experiencias fascinantes y novedosas en el campo de las representaciones de conceptos matemáticos. Por supuesto que cuando se usa el computador como mediador del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, cambian las concepciones tradicionales del profesor y el estudiante frente a sus prácticas educativas. Al respecto, Moreno conceptúa: “Las herramientas computacionales modifican la naturaleza de las exploraciones y la relación de dichas exploraciones con la sistematicidad del pensamiento matemático [...]. Algunos autores se han interesado por la génesis instrumental de las herramientas computacionales (Rabardel, 1995)” (Moreno, 2002, pp. 46-47). Al aceptar la mediación de la pizarra electrónica

y de los computadores, no se trata de trabajar con las mismas prácticas educativas tradicionales; se deben modificar las situaciones problemáticas, los problemas, las tareas, las representaciones y hasta la forma de indagar e investigar respecto del conocimiento matemático. Al respecto de los principios con que fue elaborado el programa Cabri Geometry, Collette Laborde (1998) manifiesta: “El programa ha sido elaborado con la idea [de] que el paso por las primitivas geométricas debería favorecer el uso de conocimientos geométricos [...]. El entorno responde, pues, a la intención de ofrecer un sistema de significantes que tenga un dominio mayor de funcionamiento en relación con la geometría y que haga más evidentes los límites del dominio de interpretación”.



**Figura 1.** Ambiente de geometría dinámica Cabri. Esquemático de Jean Marie Laborde (1998)

En cuanto el ambiente de geometría dinámica generado por el programa Cabri Geometry, se considera que la distinción inicial entre primitivas geométricas y de construcción es de gran importancia. Poder hacer y grabar macroconstrucciones (que posteriormente pueden convertirse en primitivas de construcciones más elaboradas) constituye un elemento fundamental que proporciona una flexibilidad y capacidad de hacer dibujos-dinámicos cada vez más complejos, que se escapan a la intencionalidad inicial. Diseñar, crear, modelar y simular situaciones problemáticas en el programa Cabri 3D

constituye los mayores potenciales en la exploración de las representaciones en el campo de las matemáticas. Frente a las opciones que se puede plantear en geometría dinámica, Collette Laborde afirma:

[...] se pueden plantear situaciones “robustas” y situaciones “blandas”. Las primeras provienen de la construcción de una figura que satisface condiciones geométricas. Las construcciones robustas requieren conocimientos que los alumnos no tienen y se caracterizan por los teoremas y propiedades al estilo tradicional. Las construcciones blandas son aún más importantes para ayudar a obtener las construcciones robustas. Son construcciones de una figura que no satisface todas las condiciones (Laborde, 2006).

En este sentido, en el Cabri Geometry y el Cabri 3D se trabajan de manera natural las construcciones de la geometría euclídea y diversos tipos de geometría. Para crear los dibujos-dinámicos correspondientes a los poliedros, el estudiante se debe enfrentar a muchas situaciones “blandas” que, por sus características, brindan un espacio más apropiado para el aprendizaje por descubrimiento. Las situaciones problemáticas que el estudiante debe enfrentar en la construcción del modelo permiten enfocar la actividad hacia el desarrollo del pensamiento espacial, sin enfatizar en el bagaje de conocimientos, teoremas y propiedades, al estilo de la geometría clásica. El soporte que dichas actividades prestan robustece la capacidad de los estudiantes para cuando deben enfrentar problemas más formales, cuya solución implica la aplicación de los teoremas clásicos de la geometría. En el momento de poner a prueba la imaginación y creatividad de los estudiantes, en el diseño de sus propios modelos, surgen construcciones difíciles de lograr, que implican el uso de resultados que no conocen y que los impulsan a investigar y buscar solucionar los problemas que surgen de dichas situaciones abiertas.

## Propuesta

### Propósitos y aspectos generales

El trabajo de investigación que se inició con estudiantes del grado séptimo, en el año 2010, y se continuó con estudiantes del grado octavo en el año 2011, en la Institución Educativa Ecológico San Francisco, del municipio de Cóbbita, Boyacá, tiene como objetivos desarrollar las interpretaciones que favorezcan la construcción del conocimiento relacionado con los sólidos, el nivel de razonamiento, las imágenes que tienen los estudiantes

de algunos conceptos provenientes de experiencias previas, los aspectos visuales y los niveles de dificultad que presentan en la representación de los sólidos, específicamente los platónicos y los arquimedianos. Igualmente, se incorporó un software dinámico, Cabri 3D, como herramienta de trabajo en la parte final del proyecto; el uso de este software permitió hacer énfasis especialmente en la visualización, modelación y exploración de las propiedades de dichos sólidos de 3D en 2D. La adopción de la investigación-acción como metodología de este trabajo buscó que, a través de la acción y reflexión los profesores, estudiantes, institución y comunidad se mejoren ostensiblemente las prácticas educativas en beneficio de la calidad; dicho proceso pretende ser cíclico y en permanente retroalimentación, en donde cada práctica es renovada y validada por los actores y los expertos, y se considera más apropiada como opción de enseñanza y aprendizaje.

Para desarrollar la propuesta investigativa se utilizó el enfoque cualitativo; de esta forma se mantiene contacto directo con el trabajo de los estudiantes en forma individual y en equipo, desde el aula de clase y desde su propio contexto. “La investigación cualitativa implica una preocupación directa por la experiencia tal y como es vivida” (Sandín, 2003, p. 124). El tipo de investigación es investigación-acción, puesto que se pretende transformar y mejorar las prácticas educativas desde la reflexión sobre ellas en pos de un cambio en el mundo de los estudiantes; “la finalidad última de la investigación-acción es mejorar la práctica, al tiempo que permite una mayor comprensión de ella y de los contextos en que se realiza” (Alsina, 2010, p. 13). En este marco, la propuesta se desarrolla en la modalidad de investigación-acción, práctica que otorga un protagonismo activo y autónomo al profesor, quien “selecciona los problemas de investigación y [...] lleva el control del propio proyecto” (Latorre, 2008, p. 30). Para recolectar la información se utilizaron técnicas como la observación directa, a través de videos, fotografías y grabaciones que evidenciaban la subjetividad de los estudiantes, y el diario de campo, en donde docente y estudiantes “registran las acciones, las opiniones, las formas de pensar y de sentir en el mismo momento en que el que escribe los está viviendo” (Corbeta, 2003, p. 404). El análisis de la información se realizó en tres etapas: procesamiento de los datos, representación de la información e interpretación de la información; para ser presentada posteriormente en un informe escrito. Lo que se quiere es describir ¿qué ocurrió?, explicar ¿por qué ocurrió? y valorar ¿qué se puede mejorar? en el contexto de una clase.

## Actividades

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones, el proyecto se desarrolló en términos de la acción, la observación y la reflexión; la acción y la observación, a través de la ejecución de las tres primeras actividades, y la reflexión, mediante las dos últimas actividades. A continuación se describe las actividades de aula contempladas dentro de la experiencia.

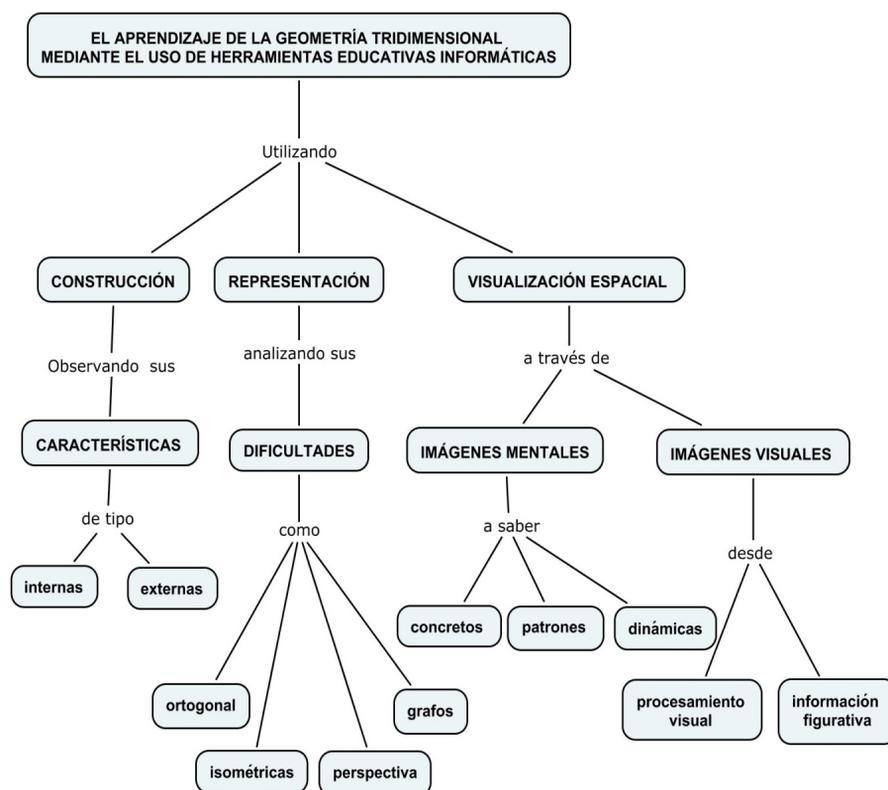
**Actividad 1. Los regalos geométricos** (Steen, 1999, p. 20). Está diseñada con labores de reconocimiento de sólidos, elaborados con estructuras, que fueron presentados como decoración del aula de clase, con el propósito de despertar en el estudiante interés por conocer las propiedades y conceptos relativos a estas figuras tridimensionales. Los objetivos de esta sesión se orientaron a detectar las ideas previas y las estructuras preconceptuales que tienen los estudiantes acerca de ciertas figuras geométricas, sólidos platónicos que se encuentran en el contexto; así mismo, se enfatiza la detección de algunas dificultades y obstáculos conceptuales que se presentan en la representación gráfica de sólidos tridimensionales a través de dibujos bidimensionales.

**Actividad 2. Construcción de los regalos geométricos.** Contiene variadas actividades que pretenden ser ambientes creativos de aprendizaje, y que invitan a los estudiantes al análisis de sus características y a clasificar y diferenciar los elementos de los sólidos platónicos. Se pretende estimular la construcción de los sólidos platónicos en tres tipos de representación externos tangibles, como son: el plegado, el troquelado y las estructuras; la experiencia adquirida en la elaboración de los sólidos, el trabajo en grupo y los procesos de argumentación son empleados como mediaciones para la construcción de los conceptos geométricos relativos.

**Actividad 3. Visualización y representación de regalos geométricos.** Permite observar el estado de las capacidades de visualización espacial a partir de descripciones verbales de los objetos y cuerpos 3D, de las proyecciones de estos objetos tridimensionales sobre el plano (haces de luz y sombras) y desde las diversas vistas de los sólidos, para clarificar y detectar debilidades en los procesos inherentes a dichas representaciones. El propósito se encaminó a desarrollar el pensamiento visual y la imaginación a través del dominio de los sistemas de representación internos no tangibles.

**Actividad 4. Visualización, construcción y modelación de los regalos geométricos.** Mediante ambientes de geometría dinámica, se pretendió desarrollar la imaginación y los sistemas de representación internos no tangibles, a través de la interacción, construcción y modelación de dibujos dinámicos hechos con Cabri 3D (sistemas de representación externos no tangibles). Se verificó, de esta manera, el uso de diferentes tipos de relaciones, las conexiones que se establecen entre ellos, la visualización, la manipulación de objetos en tercera dimensión y la exploración de las construcciones simples o complejas, realizadas mediante el software en el computador.

**Actividad 5. Aplicaciones.** Se pretendió identificar las áreas, en ámbitos tecnológicos y del contexto, en donde los sólidos son usados como parte inherente. Se mencionan aplicaciones en la arquitectura, el arte, las estructuras de los materiales, el diseño y la computación gráfica, entre otras.



**Figura 2.** Mapa conceptual de algunas categorías deductivas previstas en la propuesta objeto del artículo

## Resultados de la experiencia didáctica

A continuación se describen los resultados relevantes de las experiencias de aula implementadas para el aprendizaje de los sólidos platónicos y arquimedianos, producto del análisis de los datos cualitativos recolectados con los instrumentos (diario de campo, talleres, fichas de observación y transcripción de audios), los cuales fueron procesados con técnicas de análisis textual, de acuerdo con las categorías de análisis: observación, manipulación, construcción, visualización y representación (ver tablas 2 a 5), y a partir de las redes conceptuales deductivas y algunas categorías inductivas como: modelación dinámica, motivación por la modelación en el computador, interés por asistir a las clases cuando se utiliza el computador, deseo de participación, y sus relaciones, para, posteriormente, hacer la construcción de sentido de la experiencia, cuyas ideas principales se sintetiza en los siguientes apartados.

Para el trabajo de aula, los estudiantes contaron con una guía de trabajo que fue proporcionada por el profesor; tenían un cuaderno, denominado diario de campo -documento personal-, donde consignaron observaciones, sentimientos, actitudes y comentarios que sucedieron en el transcurso de la experiencia. En la actividad de reconocimiento de sólidos se pudo observar que, a pesar de haber planeado la actividad de manera individual, se desarrolló en forma grupal y se notó un gran deseo por realizar la visualización de los regalos geométricos para encontrar el número de caras, vértices y aristas de los poliedros. Cuando los estudiantes empezaron a discutir la manera como se podía establecer el número de vértices, caras o lados, o simplemente cuando entre todos trataban de asignarle un nombre a la figura que estaban analizando (ver tabla 2), se observó cómo relacionan los preconceptos de cuadrado y triángulo, y los transfieren a la noción de un volumen, para este caso un sólido.

**Tabla 2.** Observación y descripción de sólidos

NOMBRE DE LA FIGURA	OCTAEDRO	ICOSAEDRO	TETRAEDRO	SÓLIDO ARQUIMEDIANO	CUBO
<b>Lenguaje usual del estudiante</b>	Trompo	Balón	Triángulo	Rueda	Caja
<b>Características de la figura</b>	Doce aristas, ocho caras, seis vértices	Veinte caras. Doce vértices,	Cuatro caras, cuatro vértices, seis aristas	Dieciocho caras, ocho vértices	Doce aristas, seis caras y ocho vértices
<b>Imagen mental de la figura (representaciones mentales que se pueden hacer de objetos)</b>	trompo diamante pirámide rombo trampolín	Estrella, trompo, ventana, balón, balón pinchado, baloncillo	Pirámide	Bocín, pandereta, tambor, caja, bombo	caja, cuadrado
<b>Mediante la utilización del software</b>	Es más sencillo mover, girar el sólido para poder identificar sus características, se les facilita más el conteo y la visualización de caras, vértices y lados.				

En el desarrollo de esta actividad, los estudiantes acudían a las capacidades de discriminación visual, la manipulación y la imaginación, que fueron necesarias para encontrar y comparar las características de los sólidos. En forma general, la actividad de los estudiantes consistió en mover los sólidos, físicamente o en el computador, para identificar sus componentes y reafirmar las estructuras preconceptuales existentes.

Para los integrantes de los diferentes grupos, la manipulación es una actividad de reflexión acerca de las preguntas que la guía les propone. “La manipulación de materiales es en ella misma una manera que ha de hacer más eficaz el proceso de aprendizaje sin hacerlo necesariamente más rápido. Por otra parte, el uso de materiales es una manera de promover la autonomía del aprendiz...” (Alsina y Planas, 2008, p. 50).

Se pudo observar que existe un ánimo de verificación en el conteo de lo que cada uno de los compañeros afirma, pero, finalmente, llegan al producto que se pretende lograr e identifican el número de caras, vértices y lados de la figura que observan y manipulan.

En la actividad de imaginación (ver tabla 3), los estudiantes hicieron comparaciones físicas para el armado de las figuras, pero al hacer el movimiento mental optaban por desechar las comparaciones iniciales; en el computador, con el movimiento automático y continuo, fijan las posiciones del sólido, lo mueven, lo desbaratan, lo vuelven a armar y no presentan confusiones. Para la construcción de figuras se usó el troquelado y las estructuras; en esta última, los estudiantes muestran facilidad y rapidez para resolver la actividad, pero presentan gran dificultad en la elaboración de las figuras a través de los plegados (ver tabla 4). Se nota que las actividades en donde la motricidad fina se manifiesta no se han enfatizado en el medio, pues a la hora de hacer los dobleces, los hacen una y otra vez, y no les quedan bien. Son toscos y, por tanto, el encajar unas piezas con otras no resulta óptimo, lo que hace que los estudiantes se desanimen en la construcción de la figura. En consecuencia, se desarrollaron mejor en las construcciones con estructuras (YouTube.com) y troquelado sobre las actividades refinadas del plegado.

En la construcción de los sólidos se destaca la idea de reproducir fielmente las instrucciones para que la figura sea lo más precisa; con los sólidos en estructuras, los estudiantes argumentan más fácilmente las relaciones

de igualdad en la medida de las aristas y ángulos diedros, el paralelismo y equiformidad entre caras y aristas, lo que sucede en menor grado con el origami y con el troquelado. En el manejo del software hay una dificultad inicial, que es superada con la interactividad con el Cabri 3D y la aplicación del Poly (peda@peda.com).

**Tabla 3.** Imaginación de sólidos

<i>FIGURA</i>	<i>CUBO</i>	<i>TETRAEDRO</i>
<b>Imagen visual (como ven la figura)</b>	<p>Estudiante 1. Esta (cara) queda de asiento, esta la podemos pasar aquí para que quede en esto y esta para que quede arriba.</p> <p>Estudiante 2. Si pasamos esta aquí para que quede este lado, y esta aquí, queda esta con esta, quedan pegadas las dos arriba.</p> <p>Estudiante 3. Entonces puede formar un cubo.</p> <p>Estudiante 4. No, no se puede formar y además aquí queda faltando una cara para tapar este lado.</p> <p>Estudiante 1. No se puede porque está de asiento, esta la ponemos aquí para que quede aquí en este lado, así está para que quede por encima, luego paramos esta aquí que cubra este lado, esta va a quedar encima con esta y queda faltando una pared.</p> <p>Estudiante 1. Y si paramos así, mire, estas tres sobre esta, doblamos así, así se puede.</p> <p>Estudiante 2. Queda como dándole la vuelta, más difícil.</p> <p>Estudiante 3. Sí, mire, póngale cuidado, se para en esta así y se doblan así y se paran así, después se para aquí, es más fácil, se ve que sí se puede.</p> <p>Estudiante 1. Puede parar estas tres así, mire, lo que le digo, doble esta así, doble esta así y esta así, y ya.</p> <p>Estudiante 1. Acá atrás hay otra, pero con esa no se puede porque tres, seis, siete y un cubo se forma con seis cuadros.</p>	<p>Estudiante 1. ¿Con cuáles se puede armar el tetraedro?</p> <p>[...]</p> <p>Estudiante 2. Doblamos esta así como base, esta la doblamos a la izquierda y esta a la derecha.</p> <p>Estudiante 3. ¿Y la tapa?</p> <p>Estudiante 4. No hay tapa</p> <p>Estudiante 5. ¿Un tetraedro sin tapa?</p> <p>Estudiante 6. No, porque la tapa se cierra con estos mismos y esta quedaría como base.</p>
<b>En software Cabri 3D</b>	En este ambiente los estudiantes se destacan por la imaginación que manifiestan al ser capaces de realizar construcciones de los poliedros mediante la utilización de las herramientas del Cabri 3D.	

**Tabla 4.** Construcción de sólidos

FIGURA	TETRAEDRO	CUBO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
<b>Cartulina plana (optan trabajar en el piso)</b>	Sencillo	Sencillo con algunas dificultades en la medida	Se les dificulta por la toma de medidas	La dificultad que se aprecia es mayor	Definitivamente, es muy difícil construir esta figura
<b>Sólidos de varillas</b>	Muy sencillo	Muy sencillo	Es un poco más complicado por la cantidad de módulos que debe construir	Cada vez es más complicado por la cantidad de módulos	Más complicado
<b>Sólidos en origami</b>	No existe la más mínima presencia de motricidad fina para realizar los dobleces de las figuras. Se les dificulta en la realización de todos los sólidos.				
<b>En el software Cabri 3d</b>	<p>A pesar de que nunca han trabajado el software, muestran gran interés por indagar las herramientas del software, sus aplicaciones; aprenden con facilidad.</p> <p>Estudiante 1. Diferencia entre hacer las figuras nosotros y hacerlas en el computador, igual podemos abrir, desarmar, voltear, girar, pero sin manipularlas, [...] agrandarlas, achicarlas. [...] la ventaja de hacerlas a mano es que podemos manipularlas.</p> <p>Estudiante 2. Manejar los sólidos, armarlos, desarmarlos, pero fue muy bonito. Lo otro fue que los manejos del computador son muy fáciles [...] hoy desarmé las figuras en el computador, lo hice en varios poliedros [...] como si fuera otra dimensión, me pareció muy dinámico.</p>				

En la argumentación de los integrantes de cada grupo se puede intuir el afán y el cuidado para que la figura que van a construir cumpla con las características de congruencia de caras, aristas, ángulos, paralelismo de caras o aristas y perpendicularidad. En estas actividades, los estudiantes tienen que hacer uso de la discriminación visual necesaria, para comparar los componentes de los sólidos construidos a través de la utilización de cartulina plana o mediante papiroflexia o armando estructuras.

La médica y antropóloga italiana María Montessori (1964) es pionera en el uso de materiales manipulables para el desarrollo de lo que ella denomina inteligencia. Ella hace célebre la frase ‘el niño tiene la inteligencia en la mano’, en referencia al aprendizaje de los niños a través de la manipulación y la experimentación de los objetos. [...] el material llama al niño, lo estimula y lo guía (Alsina y Planas, 2008, p. 50).

Respecto de la representación gráfica de los sólidos, elaborada por los estudiantes, es notable la dificultad para dibujar los objetos originales (sólidos platónicos) en papel blanco; se notó dificultad en el uso práctico de nociones de paralelismo y perpendicularidad. Se presentan dibujos que vienen a ser irregulares frente a los que se les pide que dibujen, lo que significa que no hay claridad en la visualización del objeto en el espacio.

**Tabla 5.** Representación de sólidos: dibujo de cuerpos

<b>FIGURA</b>	<b>TETRAEDRO</b>	<b>CUBO</b>	<b>OCTAEDRO</b>	<b>DODECAEDRO</b>	<b>ICOSAEDRO</b>
<b>Representación ortogonal (dibujo de varias vistas laterales)</b>	Presentan figuras dibujando una de sus caras, parece que las vieran solo de frente.	No usan la perpendicularidad y el paralelismo, fundamentales para la construcción del cubo.	Lo toman como si se tratara la elaboración de un troquelado.	Asumen las vistas laterales como si fueran cuadrados.	Destacan el triángulo equilátero, pero no hacen proyección alguna.
<b>Representación del grafo</b>	Los dibujos intentan mostrar profundidad, pero fallan en la representación.	Son muy pocos los estudiantes que optan esta representación.	Lo toman como si se tratara de un cuadrado.	La gran mayoría dibujaron un hexágono totalmente plano.	Igual dibujan una estructura dotada de rectas que forman un entramado como un hexágono.
<b>Representación en perspectiva</b>	Se evidencian dibujos correctos, las aristas las orientan hacia el fondo.	Casi todos muestran interés por la perspectiva de la figura.	No hay completitud en la perspectiva de la figura.	Se les dificulta la perspectiva en este sólido, pero la desarrollan.	Se les dificulta la vista de la perspectiva en esta figura, pero la realizan.
<b>En el software Cabri 3D</b>	Los estudiantes presentan dificultades, pero logran hacer la representación planar de los diferentes sólidos.				

En el desarrollo de la actividad se observó la adecuada destreza de los estudiantes para dibujar en perspectiva; esto permite entender mejor los procesos de visualización espacial con los que cuentan para hacer representaciones 3D.

La sesión correspondiente a la visualización, construcción y representación de los regalos geométricos mediante aplicaciones de geometría dinámica se inició con una inducción sobre los ambientes dinámicos y sus diversos dominios e interactividad; se dio la posibilidad de explorar en situaciones planteadas blandas y duras (Laborde, 2006), usando el lenguaje icónico que aparece en la barra de herramientas: los íconos de manipulación y construcción de figuras en el plano y en el espacio, y los comandos de transformación. Los estudiantes diseñaron figuras que correspondían a objetos de su contexto, a las que llamaron de la siguiente manera: “mickey, helado, robot, balones, camión y semicono” (colección figural, según Piaget); les llamó la atención el hecho de poder animar las figuras geométricas en la pantalla del computador, de visualizar figuras (vistas), medir áreas, perímetros, ángulos; exploraron en el plano las características del vestido del sólido (caras laterales).

Las opiniones de los estudiantes estuvieron más enfocadas a que pueden hacer el mismo tipo de acciones con los sólidos platónicos en forma manual y con el software, pero que mediante el computador no los pueden manipular físicamente.

**Estudiante 1:** ... entre hacer las figuras nosotros y hacerlas en el computador, igual podemos abrir, desarmar, voltear, girar, pero sin manipularlas, [...] agrandarlas, achicarlas, [...] la ventaja de hacerlas a mano es que podemos manipularlas.

**Estudiante 2:** ... pudimos experimentar muchas cosas, como manejar los sólidos, armarlos, desarmarlos, [...] hoy desarmé las figuras en el computador, lo hice en varios poliedros [...] como si fuera otra dimensión, me pareció muy dinámico.

**Estudiante 3:** lo más interesante fue hacer figuras y diseñarle un vestido, podíamos hacer todas en el mismo plano. Me gusta que hicimos grandes figuras jugando con nuestra imaginación, fue más difícil armarlas en los otros talleres; en el computador uno puede redondear, pero no cogerlas con las manos. Ningún día había manejado figuras en el computador [...] tal vez las hubiera dibujado en Paint, pero no manipulado, y ver cada lado por el cual uno se indica cómo es por cada lado.

**Estudiante 4:** lo que más divertido me pareció fue explorar muchas cosas, mirarlas por debajo, por encima, abrirlas y armarles el vestido.

**Estudiante 5:** lo que más me gusta es que se pueden determinar las medidas sin necesidad de usar regla, [...] las figuras se pueden girar los grados que uno desee, [...] y fuera de eso puede hallar el área de las caras sin necesidad de operaciones.

**Estudiante 6:** ... además, podemos dibujar muchas figuras, agrandarlas, achicarlas, y les podemos dar movimiento, eso no lo podemos hacer con los pitillos, [...]

Una vez planeados y ejecutados los tres primeros talleres: regalos geométricos, construcción de los regalos geométricos y visualización y representación de los regalos geométricos, a manera de acción sobre la necesidad de observar la práctica de lo que entendían los estudiantes acerca de las características y generalidades de los sólidos platónicos y

arquimedianos, surgió la necesidad de aplicar dos talleres más: uno de visualización, construcción y modelación de los regalos geométricos, y otro de aplicaciones; estos se desarrollaron en un ambiente dinámico con ayuda de Cabri 3D, para que brindaran un medio de reflexión o reconocimiento de esas mismas características de los sólidos platónicos y arquimedianos, y fueron el producto de la evidente motivación de los estudiantes por la modelación de objetos tridimensionales en el computador, aspecto que no había sido contemplado inicialmente.

Los niveles de desempeño contemplados en la tabla 6 son el resultado de la observación y análisis de las actividades propuestas en la prueba piloto aplicada en las dos últimas actividades, lo que garantizó el éxito en un manejo óptimo de los materiales virtuales; además, son categorías inductivas detectadas en la implementación de la experiencia.

Se notó el interés y la motivación que mostraron los estudiantes por explorar, descubrir, representar, construir, comparar y analizar los objetos geométricos que construyeron manualmente en las actividades iniciales y que ahora podían hacer mediante el uso del Cabri 3D.

**Tabla 6.** Resultados de la aplicación del Cabri 3D

<i>ATRIBUTOS Y DESARROLLOS</i>	<i>NIVEL DE DESEMPEÑO ÓPTIMO</i>	<i>NIVEL DE DESEMPEÑO DÉBIL</i>
<b>Contexto</b>	Diseñan figuras bien estructuradas que son del entorno y que les llaman la atención, se arriesgan a diseñar dibujos.	Son muy pocos los estudiantes que presentan dificultades en el manejo del ambiente dinámico, las superan luego de manipularlo sucesivamente.
<b>Caras laterales</b>	Manipulan cada una de las caras de las figuras poliédricas, las giran, las analizan por debajo, por encima, de frente.	
<b>Vistas</b>	Visualizan cada uno de los sólidos, desde diferentes puntos de mira; son capaces de realizar diferentes rotaciones y giros en el plano y en el espacio.	
<b>Tamaños y cambios de escala</b>	Manejan los comandos para realizar homotecias uniformes y parciales, para ampliar o reducir las figuras.	
<b>Representaciones</b>	Buscan colocar diversas figuras en el mismo plano, para hacer figuras más grandes, con el propósito de diseñar figuras de su entorno.	
<b>Aplicación Matemática</b>	Miden aristas, hallan el área de las caras y el volumen de los sólidos; determinan la medida de los ángulos diedros y ángulos planos.	
<b>Animación</b>	Algunos estudiantes animan las construcciones fijando parámetros con limitaciones.	

## Conclusiones

La investigación descrita evidencia que el estudiante manipula, construye y observa primero sobre el contexto de su realidad, y luego, en espacios de representación más abstractos, como el plano y el tridimensional; esto le permite hacer visualizaciones, descripciones y análisis desde su propia experiencia, para adquirir nuevas visiones de la geometría, de los objetos, sus propiedades y relaciones, y establecer así un desarrollo del pensamiento geométrico.

Para el trabajo con los diversos tipos de representación externa se evidencia la óptima utilización de los tres tipos de materiales: plegados, troquelados y estructuras, y el desarrollo de la actividad en dos entornos: el espacio del entorno y, posteriormente, la representación de dicho espacio en el plano mediante el uso del papel; adicionalmente, la experiencia se desarrolla con sistemas de representación externa intangibles (no ostensivos, según Font) como la pantalla del computador, “no es solo formar imágenes, no se trata solamente de íconos visuales, hay múltiples modalidades de representar, de estar en el lugar de, de fingir, [...], en el sentido semiótico proyectivo expresivo es ‘expresar en-hacia afuera’ e ‘interpretar en-hacia adentro’, (Vasco, 2011), en este caso, el ambiente dinámico generado por Cabri 3D; por tanto, se considera fundamental diseñar ambientes creativos de aprendizaje de conceptos matemáticos, que permitan aprovechar la función socializadora de las herramientas informáticas.

La interpretación de cómo los estudiantes se desempeñan en el manejo de los sistemas de representación externos tangibles (ostensivos, según Font), se fundamenta en las ventajas y facilidades que tienen en el dominio de los algoritmos e instrucciones para la construcción de los sólidos a través del plegado, las estructuras y el troquelado. Con la construcción de los sólidos, mediante el plegado, se establecen más fácilmente relaciones de paralelismo y perpendicularidad planares necesarias para la realización de los dobleces, en donde predicen y estiman la medida de los ángulos en el diseño de la figura base, y a pesar de lo compleja que es la etapa del ensamble, una vez realizado, los mueven libremente, reflexionando acerca de sus características. Con el troquelado desarrollan la habilidad de medir y conjeturar respecto del tamaño de las aristas para determinar la magnitud de la figura que pretenden construir; igual que en el plegado,

aproximan la medida angular existente entre aristas, especificando la clase de figuras que forman las caras, que hacen parte del sólido armado. En estas formas de construir sólidos, una vez armada o encajada la figura se ocultan algunos componentes y propiedades debido a que los elementos internos del sólido quedan escondidos. El troquelado permite pasar del espacio (3D) al plano (2D) con una sola transformación, que después se puede simular en el computador (al estilo de lo visualizado en la aplicación Poly), asunto que no lo permite el plegado ni, menos, las estructuras.

De otro lado, las estructuras permiten un análisis más complejo, debido a que los componentes de los sólidos son visibles; se pueden observar los cruces de las aristas de manera externa e interna, cruces que generan otras figuras que al igual pueden y deben ser motivo de análisis (ángulos diedros, entre otros). Cabe destacar que la técnica que más llama la atención a los estudiantes es la construcción de los sólidos mediante las estructuras, ya que la consideran concreta porque las aristas tienen una medida fija (los pitillos utilizados tienen una medida estándar), la medida del ángulo queda determinada con el ensamble de la cara regular (asumen espontáneamente la medida de los ángulos como iguales). En la representación de las perspectivas mediante estructuras, las aristas se convierten en segmentos, lo que hace perder la sensación de profundidad, determinando una impresión de realidad en la figura representada. Sin embargo, las estructuras son una forma precisa de realizar dibujo de proyecciones de sólidos; con sólidos opacos las proyecciones se dificultan, debido a la interpretación y al trazado de paralelas y perpendiculares en el plano.

Respecto del desempeño del estudiante en el manejo de los sistemas de representación externos intangibles, el movimiento de los sólidos se limita en torno a un eje de coordenadas y al plano, lo que obliga a discernir acerca de los movimientos que se van a realizar; ya no existe la libertad y la rapidez con que se cuenta cuando se trabaja con los sólidos reales. En el análisis de las perspectivas, en la pantalla del computador se hace más sencillo, porque en esta se puede observar la convergencia de las líneas paralelas en el plano frontal, sin perder de vista que los cuerpos tienen una apariencia opaca, pero que el ambiente dinámico muestra o lleva a la intuición de los elementos del sólido.

Al iniciar la propuesta se pudo observar que los estudiantes desconocían las características internas y externas en el dibujo de los poliedros. Desarrolladas las actividades, se determinó que la información figurativa y los procesos visuales permiten que la representación figural mejore significativamente.

Los sistemas semióticos de representación de los sólidos platónicos y arquimedianos permitieron la construcción del concepto de poliedro que los estudiantes caracterizan y describen, inicialmente, con el uso de un lenguaje cotidiano a partir de su contexto, y posteriormente, empleando lenguaje matemático en ambientes virtuales y sistemas de representación internos (imaginación). Comprendieron que las representaciones son instancias que permiten conocer el concepto; por ejemplo, un tetraedro tiene diversas representaciones tridimensionales y diversas representaciones bidimensionales, las cuales permiten evidenciar características y propiedades particulares en cada representación que, integradas, se complementan para enriquecer las representaciones internas que soportan el concepto de poliedro regular o semirregular.

## Trabajo futuro

Dado que los estudiantes manifiestan una alta motivación al realizar las aplicaciones tecnológicas en el desarrollo del proyecto de investigación, base de este artículo, se hace necesario buscar o crear los espacios para implementar el empleo del software dinámico en las clases de geometría. Esto llevará al estudiante a que identifique el computador como una herramienta tecnológica de trabajo, que le permite ampliar sus capacidades cognitivas. El docente debe promover la fusión de la investigación y la implementación de los espacios virtuales para el aprendizaje desde los diversos contextos áulicos. De igual forma, se debe propender hacia una renovación en los marcos conceptuales de la geometría. El uso de las herramientas tecnológicas promueve en los estudiantes el cambio de paradigma del uso de lápiz y papel (sin desconocerlo, al menos en fases iniciales del aprendizaje) por el uso de medios dinámicos e interactivos que transformen significativamente los resultados de la educación geométrica.

## Bibliografía

- ALSINA, Ángel y Domingo, Martha (2010). “Identidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13: 7-32.
- ALSINA, Ángel y Planas, Nuria (2008). *Matemática inclusiva: propuesta para una educación matemática accesible*. Madrid: Narcea.
- BOHÓRQUEZ, Luis Ángel (2004). “Sobre las formas efectivas de incorporar el software Cabri-Geometrie en la enseñanza de conceptos geométricos en el bachillerato”. *Revista de Estudios Sociales*, 19: 106-109.
- CAMARGO, Leonor; Samper, Carmen y Perry, Patricia (2006). “Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica”. *Lecturas Matemáticas UPN Bogotá*, p. 371-383.
- CABRI 3D, Manual del usuario. Disponible en: [http://download.cabri.com/data/pdfs/manual/c3dv2/user\\_manual\\_pt\\_br.pdf](http://download.cabri.com/data/pdfs/manual/c3dv2/user_manual_pt_br.pdf)
- CAMPOS, Alberto (1981). *La educación geométrica*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- CASTAÑO, Jorge (2006). *Consideraciones sobre la educación del pensamiento espacial y geométrico*. Memorias XVI Congreso de Geometría y IV de Aritmética. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. pp. 579-594.
- CASTIBLANCO, Ana Cecilia y Moreno Armella, Luis (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Bogotá: MEN.
- CORBETTA, Piergiorgio (2003). *Metodología y técnicas de investigación social*. España: McGraw-Hill.
- DUVAL, Raymond (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.
- D’AMORE, Bruno (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio.
- FONT, Vicenç; Godino, Juan D. y D’Amore, Bruno (2007). *Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática*. Barcelona: Universidades de Barcelona, Granada y Bolonia.
- FONT, Vicen (2003). “Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas”. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 14: 1-35.
- FLORES, Jesús Victoria (2008). *Enseñanza de la geometría espacial utilizando Cabri 3D*. Documento manuscrito presentado en el V Coloquio

- Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú.
- GARCÍA PEÑA, Silvia y López Escudero, Olga Leticia (2008). *La enseñanza de la geometría*. México: INEE.
- GONZÁLEZ SOTO, Ángel y Vilches González, Nieves (2007). *Enseñanza de la geometría con utilización de recursos multimedia*. Tesis de doctorado. Universidad Rovira I Virgili. Venezuela.
- KANT, Immanuel (1991). *Pedagogía*. Trad. Lorenzo Luzuriaga y José Luis Pascual. Madrid: Akal.
- LATORRE, Antonio (2008). *La investigación acción. Conocer y cambiar la práctica educativa*. España: Grao.
- LABORDE, Colette (1998). *Cabri Geometry: Una nueva relación con la geometría*. Grenoble: Universidad Joseph Fourier, IUFM.
- LABORDE, Colette (2006). *Soft and hard constructions with Cabri : contribution to the learning of mathematics*. Bogotá: XVII Encuentro de Geometría, Universidad Pedagógica Nacional.
- MALARA, Nicolina (1999). “Acerca de las dificultades que tienen los profesores de secundaria para visualizar y representar objetos tridimensionales”. *Educación Matemática*, 11(3): 54-68.
- Marqués, Pere (2000). *Software educativo*. <http://www.peda.com/polypro/welcome.html>.
- MORENO, Armella Luis (2002). *Argumentación y formalización mediadas por Cabri-Geometry. Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- PACHANO, Lizabeth y Teran de Serratino, Mirian (2008). “Estrategias para la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la educación básica: una experiencia constructivista”. *Paradigma*, 29(1): 133-146.
- POLY, Manual del usuario. Disponible en: [Peda@peda.com](mailto:Peda@peda.com), [www.peda.com](http://www.peda.com).
- PERRY, Patricia; Camargo, Leonor; Samper, Carmen (2006). *Actividad demostrativa en la formación de profesores de matemáticas*. Bogotá: Fondo Editorial UPN.
- PIAGET, Jean (1971). *La Epistemología del Espacio*. Barcelona: Ateneo.
- REPÚBLICA DE COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria*

y *Media de Colombia*. Fase Piloto. Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media,

REPÚBLICA DE COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2002). *Estándares Curriculares. Área de Matemáticas. Aportes para el Análisis*. Asociación Colombiana de Matemática Educativa. Bogotá: Gaia.

SANDÍN ESTEBAN, M. Paz (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones*. España: MacGraw Hill.

SANTOS TRIGO, Luz Manuel (2003). *Procesos de transformación de artefactos tecnológicos en herramientas de resolución de problemas matemáticos*. Boletín de la Asociación Matemáticas Venezolana, pp. 195-211.

STEEN, Lynn (1999). *La enseñanza agradable de las matemáticas*. México: Limusa.

UNESCO (1986). *Estudios en educación matemática*. Montevideo: Rostlac.

VASCO, Carlos E. (1992). *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas. Volúmenes I y II*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

VASCO, Carlos E. (2011). *La interacción entre modelos y teorías en la enseñanza de la cronotopía*. XX Encuentro de Geometría y sus aplicaciones. Bogotá: UPN.

YOUTUBE.COM. Zabalkann (2009). *Haciendo un dodecaedro*. [Video]. Enero de 2011.