

Analisis Galat Energi dan Galat Fase Metode *Forward 4th Order Symplectic Chin-Chen* untuk Kasus Sistem Osilator Harmonik Sederhana

Hasanuddin

Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Tanjungpura,
Jln. Prof. H. Hadari Nawawi Pontianak

Email : hasanuddin@physics.untan.ac.id

(Diterima 16 Maret 2020; Disetujui 21 November 2020; Dipublikasikan 29 Desember 2020)

Abstrak

Penelitian ini meninjau galat energi dan galat fase dari metode *forward 4th order symplectic Chin-Chen* (F4OS-CC) untuk kasus sistem osilator harmonik sederhana. Metode F4OS-CC merupakan suatu integrator yang bersifat *symplectic* dan *time-reversible* tanpa menggunakan selang waktu negatif. Simulasi osilasi harmonik sederhana dengan metode integrasi F4OS-CC dan metode Leapfrog menghasilkan galat energi terikat (tidak memiliki rambatan linier). Akan tetapi, metode F4OS-CC memiliki galat fase yang lebih besar jika dibandingkan dengan metode non-symplectic orde sama (metode Runge-Kutta orde 4). Galat fase dapat dikurangi dengan menggunakan selang waktu variabel yang bergantung terhadap posisi. Tetapi, rambatan galat energi menjadi meningkat secara linier.

Kata kunci: F4OS-CC, galat energi, galat fase, Runge-Kutta orde 4

1. Latar Belakang

Sistem osilator harmonik sederhana (OHS) memiliki solusi posisi dan kecepatan sebagai fungsi dari waktu berupa fungsi sinusoidal. Dalam sistem ini, energi total dan periode bernilai tetap. Selain itu, sistem ini memiliki solusi analitik sederhana yang dapat dijadikan sebagai referensi untuk berbagai metode numerik dalam menentukan galat komputasinya. Banyak sistem dapat didekati sebagai sebuah sistem OHS jika simpangan osilasi cukup kecil. Jika terdapat sebuah sistem dinamik dengan potensial konservatif (salah satunya OHS) tetapi tidak mempunyai solusi analitik, maka dapat diketahui bahwa energi total sistem konstan.

Penyelesaian persamaan Newton untuk sistem dinamik dengan potensial konservatif yang tidak memiliki solusi analitik memerlukan metode numerik yang dapat menjaga besaran energi total agar tetap walaupun simulasi atau komputasi dilakukan dalam waktu yang sangat lama. Salah satu metode yang memiliki sifat ini adalah metode Leapfrog yang merupakan kelas dari metode *symplectic* [1,2] dan *time-reversible* orde-2 [3] (ulasan metode yang memiliki kedua sifat ini dapat dilihat, misalnya pada referensi [4]). Untuk sistem yang memerlukan solusi numerik dengan akurasi yang lebih tinggi, dapat digunakan metode *symplectic* orde yang lebih tinggi. Akan tetapi,

metode ini memerlukan selang waktu negatif [1,5]. Hal ini akan menjadi masalah ketika gaya yang bekerja bersifat disipatif [6].

Salah satu metode *symplectic* orde yang lebih tinggi tetapi tidak membutuhkan selang waktu negatif adalah algoritma *forward 4th order symplectic Chin-Chen* (F4OS-CC) [7]. Metode ini telah diaplikasikan dan diuji pada sistem tiga benda terbatas [7] dan sistem planet yang memerlukan akurasi yang tinggi [6]. Penelitian-penelitian ini hanya menganalisa galat energi dan perbandingan galatnya dengan metode yang lain. Beberapa penelitian [8,9] menunjukkan bahwa terdapat galat fase dalam metode F4OS-CC. Akan tetapi, belum ada upaya untuk mereduksi galat fase.

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisa galat energi dan galat fase untuk sistem OHS dengan selang waktu tetap. Rambatan galat energi terhadap waktu dibandingkan dengan metode *non-symplectic* dengan orde yang sama. Penelitian ini juga mendemonstrasikan salah satu upaya untuk mengurangi galat fase dengan mengubah selang waktu menjadi variabel yang bergantung terhadap posisi sistem.

Artikel ini terdiri dari beberapa bagian. Pertama, bagian metode yang menjelaskan algoritma F4OS-CC dan pengaturan simulasi. Kedua, bagian yang menjelaskan hasil simulasi

gerak OHS dengan menggunakan metode F4OS-CC dan analisis galat energi total (selanjutnya kata energi mengacu ke energi total, kecuali dinyatakan khusus dalam teks) dan galat fase. Bagian terakhir berupa kesimpulan dari penelitian ini.

2. Metodologi

Metode F4OS-CC merupakan metode numerik untuk menyelesaikan persamaan differensial orde-2 khususnya persamaan dinamika Newton. Metode ini bersifat *symplectic*, *time-reversible*, dan hanya memiliki selang waktu positif. Intinya, solusi numerik dari persamaan dinamika berupa posisi dan kecepatan setelah selang waktu tertentu. Kecepatan (v) dan posisi (x) sistem setelah selang waktu h diperoleh dengan langkah-langkah berikut (setara dengan algoritma 4A dalam [7]): Pertama, perbaharui kecepatan dalam selang waktu $h/6$ berikutnya melalui persamaan

$$v_{1/6} = v_0 + \frac{1}{6}ha_0. \quad (1)$$

Kedua, perbaharui posisi dalam selang waktu $h/2$ berikutnya melalui persamaan:

$$x_{1/2} = x_0 + \frac{1}{2}hv_{1/6}. \quad (2)$$

Ketiga, perbaharui kecepatan dalam selang waktu $h/3$ berikutnya melalui persamaan

$$v_{5/6} = v_{h/6} + \frac{2}{3}h\tilde{a}_{1/2}. \quad (3)$$

Keempat, perbaharui posisi dalam selang waktu $h/2$ berikutnya melalui persamaan

$$x_1 = x_{1/2} + \frac{1}{2}hv_{5/6}. \quad (4)$$

Kelima, perbaharui kecepatan dalam selang waktu $h/6$ berikutnya melalui persamaan

$$v_1 = v_{5/6} + \frac{1}{6}ha_1. \quad (5)$$

Pada persamaan (1)–(5), posisi $x_k = x(kh)$, kecepatan $v_k = v(kh)$, dan percepatan $a_k = a(x_k)$. Dalam metode ini, diperkenalkan semacam percepatan termodifikasi, $\tilde{a}_{1/2} = \tilde{a}(x_{1/2})$ yang diperoleh dari persamaan

$$\tilde{a} = a + \frac{1}{48}h^2g, \quad (6)$$

dengan g adalah suatu vektor yang dihitung melalui (setara dengan persamaan (15) dalam [7])

$$g = \frac{\partial}{\partial x}|a|^2. \quad (7)$$

Dalam sistem OHS bermassa m dan konstanta k yang memiliki percepatan $a = -kx/m$, besaran ini menjadi

$$g = 2\left(\frac{k}{m}\right)^2 x. \quad (8)$$

Karena OHS merupakan sistem konservatif, energi total, $E_0 = \frac{1}{2}kA^2$ dengan A amplitudo, bernilai tetap. Galat energi total dinyatakan dengan:

$$\varepsilon = \frac{E - E_0}{E_0}, \quad (9)$$

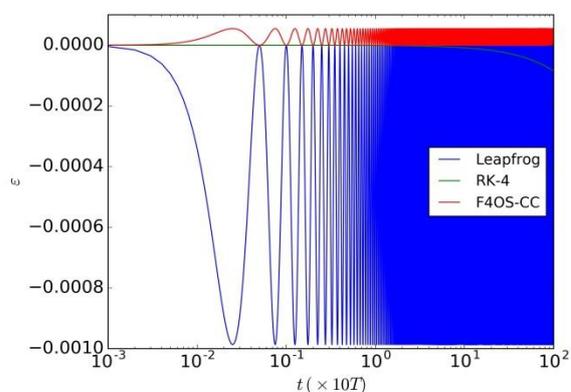
dengan E adalah energi yang diperoleh dari metode numerik. Galat fase ditunjukkan melalui perbedaan waktu untuk mencapai simpangan terbesar setelah beberapa periode osilasi.

Simulasi gerak osilasi untuk sistem OHS dimulai dengan posisi awal $x_0 = 1$ satuan jarak dan kecepatan awal $v_0 = 0$ satuan jarak/waktu. Solusi analitik untuk sistem ini dinyatakan oleh fungsi cosinus terhadap waktu untuk posisi dan fungsi sinus terhadap waktu untuk kecepatan. Kedua fungsi tersebut memiliki periode tetap yaitu sebesar $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ satuan waktu. Standar selang waktu yang digunakan adalah $0,01T$.

Untuk simulasi standar, digunakan nilai numerik k/m sebesar $400\pi^2 / (\text{satuan waktu})^2$. Dengan demikian, periode osilasi sebesar 0,1 satuan waktu. Untuk mengkuantisasi seberapa sulit suatu sistem diselesaikan secara numerik, maka dihitung nilai eksentrisitas dari ellips dalam koordinat posisi-Vs-kecepatan,

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{v^2}{2E/m} = 1 \quad (10)$$

[persamaan (10) diperoleh dari persamaan



Gambar 1. Plot galat energi vs waktu simulasi selama 1000 periode osilasi untuk metode leapfrog, Runge-Kutta orde 4, dan FS4OS-CC.

energi]. Nilai numerik eksentrisitas ellips ini adalah 0,999873. Dengan sistem yang memiliki eksentrisitas tinggi, galat yang muncul akan tinggi, karena di posisi $x = 0$, kecepatan menjadi sangat besar dan mencapai maksimum.

3. Hasil dan Pembahasan

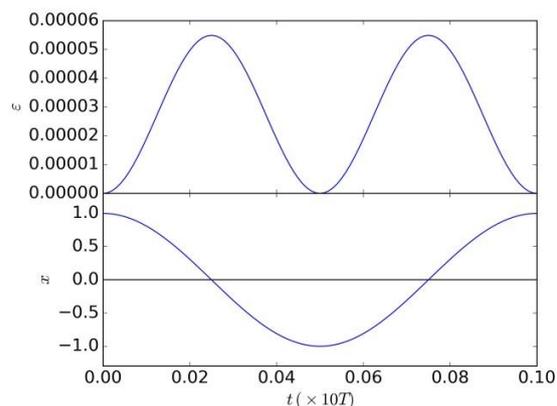
Simulasi gerak OHS dilakukan dalam rentang waktu yang cukup lama yaitu 1000 kali periode osilasi (T). Setiap selang waktu standar yaitu $0,01T$, posisi dan kecepatan sistem disimpan dan dihitung galat energi melalui persamaan (9). Rambatan galat energi disajikan dalam Gambar 1.

Metode Leapfrog dan F4OS-CC memiliki galat energi yang terikat karena kedua metode ini merupakan metode *symplectic* dan *time-reversible*. Sifat *time-reversible* dapat dipandang sebagai berikut. Sistem bergerak dari titik kesimbangannya ke simpangan terjauh sama artinya dengan sistem bergerak dalam arah sebaliknya tetapi dengan waktu mundur sehingga galat yang muncul dari komputasi satu arah waktu akan diimbangi oleh galat dari arah waktu sebaliknya. Dengan demikian, tidak terdapat galat energi netto dalam satu periode osilasi.

Kedua metode *symplectic* ini memiliki perbedaan dalam hal akurasi. Sebagaimana yang terlihat dalam Gambar 1, Metode F4OS-CC memiliki amplitudo galat energi lebih kecil jika dibandingkan dengan metode Leapfrog dengan faktor sekitar $1/16$. Hasil ini sesuai dengan orde akurasi kedua metode. Metode F4OS-CC memiliki akurasi dalam orde $\sigma(h^4)$, sedangkan metode Leapfrog hanya memiliki akurasi dalam orde $\sigma(h^2)$.

Metode Runge-Kutta orde 4 (RK-4) memiliki rambatan galat energi yang semakin meningkat secara linier. Secara spesifik, metode ini menghasilkan nilai energi total sistem berkurang sehingga amplitudo dari OHS juga mengalami penurunan. Oleh karena itu, metode ini hanya akan lebih cocok untuk simulasi yang tidak memerlukan rentang waktu terlalu panjang.

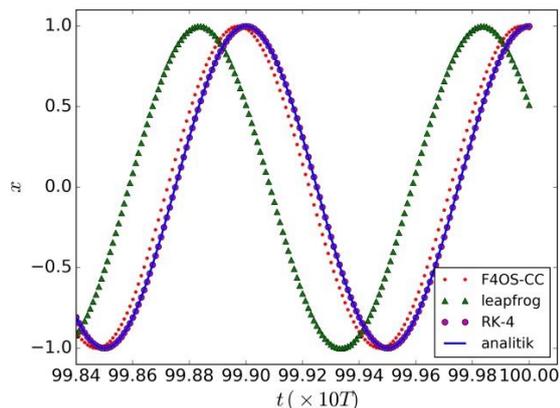
Kestabilan galat energi total dalam sistem yang berosilasi dengan metode F4OS-CC dapat dilihat dari galat energi netto setelah setengah periode (lihat Gambar 2). Galat energi meningkat



Gambar 2. Plot galat energi vs waktu (panel atas) dan posisi vs waktu (panel bawah) dalam 1 periode osilasi untuk simulasi standar.

seiring dengan waktu karena akumulasi galat energi total di setiap langkah. Akan tetapi, akumulasi ini tidak linier karena semakin kecil simpangan sistem terhadap titik seimbangannya, maka kecepatan semakin besar dan galat posisi (energi) semakin besar. Untuk mendapatkan galat energi yang sama di setiap langkah waktu, maka diperlukan besar langkah waktu yang tidak tetap. Langkah waktu harus lebih kecil jika kecepatan sistem semakin besar. Puncak dari galat energi adalah di seperempat periode dimana simpangan minimum (kecepatan maksimum). Hal ini terjadi karena setelah titik ini kecepatan berubah arah (yang dapat diinterpretasi sebagai waktu mundur), energi menurun sehingga energi galat berkurang sampai di setengah periode osilasi dengan cara yang sama ketika energi menaik di $\frac{1}{4}$ periode pertama. Hasilnya adalah tidak terdapat galat energi netto sebagaimana terlihat di $\frac{1}{2}$ dan 1 periode osilasi dalam Gambar 2.

Walaupun galat energi tidak memiliki peningkatan rambatan, tetapi metode F4OS-CC menunjukkan perbedaan fase dengan fase sesungguhnya (Gambar 3). Nilai numerik perbedaan fase metode F4OS-CC pada saat osilasi ke-1000 adalah sekitar -0.003 satuan waktu, sedangkan metode Leapfrog menghasilkan perbedaan fase sekitar -0.017 satuan waktu. Hal ini sangat berbeda dengan metode RK-4 yang galat fasenya dapat diabaikan (hampir tidak memiliki galat fase).



Gambar 4. Plot posisi sistem (x) vs. waktu (t) dari simulasi metode F4OS-CC, Leapfrog, RK-4, dan solusi di akhir-akhir simulasi.

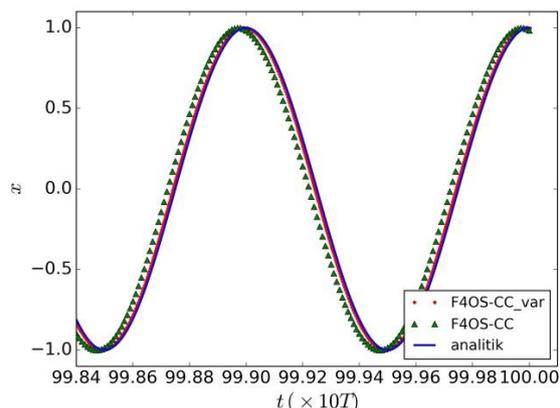
Hasil ini menunjukkan bahwa metode *symplectic* menghasilkan galat fase yang cukup berarti jika dibandingkan dengan metode *non-symplectic* (RK-4). Hal ini karena metode *symplectic* (Leapfrog dan F4OS-CC) memiliki akurasi posisi dan kecepatan yang berbeda. Posisi memiliki akurasi satu tingkat lebih tinggi jika dibandingkan dengan kecepatan [lihat persamaan (12) sampai persamaan (15)]. Sebaliknya, metode RK-4, kedua besaran memiliki akurasi yang sama.

Salah satu cara untuk menurunkan perbedaan fase ini adalah dengan menggunakan selang waktu yang lebih kecil. Akan tetapi, cara ini akan membuat jumlah iterasi atau pengulangan menjadi lebih banyak. Secara teknis dapat dikatakan bahwa akurasi yang diperoleh oleh setiap metode integrasi sebanding dengan biaya komputasi (jumlah iterasi).

Cara alternatif untuk mengurangi galat fase adalah menggunakan selang waktu yang dapat berubah terhadap variabel fisis sistem. Untuk menguji pengaruh selang waktu variabel terhadap galat fase, dalam penelitian ini, digunakan selang waktu yang tergantung pada posisi sistem dalam bentuk

$$\Delta t = \eta \left(\frac{|x|}{A} + B \right). \quad (11)$$

dengan η parameter akurasi, A amplitudo sistem dan B suatu tetapan tak berdimensi yang nilainya sebanding dengan selang waktu dasar. Selang waktu ini akan memiliki rentang dari ηB sampai $\eta(B + 1)$. Semakin kecil η , maka semakin kecil rata-rata selang waktunya dan lebar rentang selang waktunya, dan semakin kecil galat yang diperoleh. Pengujian dengan selang waktu ini



Gambar 3. Perbandingan plot posisi (x) vs. waktu (t) antara metode F4OS-CC selang waktu tetap, selang waktu variabel (F4OS-CC_var) yang menggunakan persamaan (11) dengan $\eta = 0,01T$ dan $B = 0$, dan solusi analitik di osilasi terakhir dalam simulasi.

dimotivasi oleh fakta bahwa semakin kecil simpangan sistem, maka kelajuan sistem semakin besar dan selang waktu harus lebih kecil agar galat komputasi dapat direduksi.

Hasil uji selang waktu variabel ditunjukkan oleh Gambar 4. Dengan menggunakan parameter akurasi $\eta = 0,01T$ dan tetapan $B = 0,1$, selisih fase dapat direduksi sampai sekitar 73%. Akan tetapi, rambatan galat energi menjadi meningkat secara linier melebihi rambatan galat yang dimiliki oleh metode RK-4. Hal ini terjadi karena dengan menggunakan selang waktu variabel, sifat *time-reversible* dari metode F4OS-CC menjadi rusak. Hal ini dapat dilihat dari galat energi netto setelah 1 periode osilasi yang menunjukkan bahwa nilainya tidak sama dengan nol.

Untuk saat ini, penggunaan persamaan (11) untuk tipe selang waktu variabel perlu dimodifikasi karena rambatan galat energi yang semakin meningkat. Diperlukan penelitian lanjutan mengenai pemilihan selang waktu variabel yang lebih tepat atau diperlukan suatu modifikasi metode F4OS-CC yang bersifat menjaga sifat *time-reversible* walaupun selang waktu tak tetap.

4. Kesimpulan

Simulasi OHS dengan metode integrasi F4OS-CC menghasilkan galat energi total yang terikat dengan orde akurasi sebesar selang waktu pangkat 4 (dan lebih akurat jika dibandingkan dengan metode Leapfrog yang memiliki orde akurasi sebesar selang waktu pangkat 2). Jika dibandingkan dengan metode *non-symplectic*

dengan orde yang sama seperti Runge-Kutta orde 4 yang memiliki rambatan galat energi yang meningkat terhadap waktu, galat energi metode FS4OS-CC cenderung tetap setelah setiap suatu kelipatan periode osilasi. Akan tetapi, metode F4OS-CC memiliki galat fase yang cukup signifikan jika dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde-4. Galat fase ini dapat diperkecil dengan menggunakan selang waktu yang berubah terhadap posisi. Tetapi, penggunaan selang waktu berubah terhadap posisi mengubah sifat F4OS-CC menjadi *non-symplectic* sehingga galat energi memiliki tren meningkat.

Apendiks: Uraian Deret Taylor Metode Leapfrog dan F4OS-CC

Untuk menentukan orde akurasi atau orde galat dari beberapa besaran yang dihitung dengan menggunakan metode numerik diperlukan uraian semacam deret Taylor untuk metode numerik tersebut.

Posisi dan kecepatan yang diperoleh dengan metode Leapfrog setelah selang waktu h adalah [2]:

$$x = x_0 + v_0 h + \frac{a_0}{2} h^2, \quad (12)$$

dan

$$v = v_0 + \left(\frac{a_0 + a_1}{2}\right) h. \quad (13)$$

Sedangkan, metode F4OS-CC memiliki posisi dan kecepatan setelah selang waktu h adalah

$$x = x_0 + v_0 h + \frac{1}{6}(a_0 + 2a_{1/2})h^2 + \frac{g_{1/2}}{144} h^4, \quad (14)$$

dan

$$v = v_0 + \frac{1}{6}(a_0 + 4a_{1/2} + a_1)h + \frac{g_{1/2}}{72} h^3. \quad (15)$$

Daftar Pustaka

- [1] Yoshida, H., Recent Progress in the Theory and Application of Symplectic Integrators, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 56, pp.27–43, 1993.
- [2] Dehnen, W. and Read, J. ~I. I., N-body simulations of gravitational dynamics, *European Physical Journal Plus*, 126(5), pp.55, 2011.
- [3] Hut, P., Makino, J., and McMillan, S., Building a better leapfrog, *Astrophysical Journal*, 443pp.L93–L96, 1995.
- [4] Leimkuhler, B. and Reich, S., *Simulating Hamiltonian Dynamics*, Cambridge University Press, 2005.
- [5] Suzuki, M., General theory of fractal path integrals with applications to many-body theories and statistical physics, *Journal of Mathematical Physics*, 32(2), pp.400–407, 1991.
- [6] Dehnen, W. and Hernandez, D. ~M., Symplectic fourth-order maps for the collisional N-body problem, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 465pp.1201–1217, 2017.
- [7] Chin, S. A. and Chen, C. R., Forward Symplectic Integrators for Solving Gravitational Few-Body Problems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 91(3), pp.301–322, 2005.
- [8] Scuro, S. R. and Chin, S. A., Forward symplectic integrators and the long-time phase error in periodic motions, *Phys. Rev. E*, 71(5), pp.56703, 2005.
- [9] Chin, S. and Scuro, S., Exact evolution of time-reversible symplectic integrators and their phase errors for the harmonic oscillator, *Physics Letters A*, 342(5–6), pp.397–403, 2005.