

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

SU(N) Gauge Theories For Large N

SU(N) Θεωρίες Βαθμίδας Για Μεγάλο N

Author:

Δημήτρης ΚΟΥΤΑΣ

Supervisor:

Δρ. Νίκος ΗΡΓΕΣ



16 Μαΐου 2014

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	7
Κεφάλαιο 1	9
1.1 Το όριο για μεγάλο N	9
1.2 Το όριο της QCD στο επίπεδο	10
1.3 Φαινομενολογικές επιπτώσεις του ορίου για μεγάλο- N στα μεσόνια και τα γλουσώματα	13
1.4 Φαινομενολογικές επιπλοκές του μεγάλου N στα βαρυόνια	17
1.5 Τοπολογικές ιδιότητες της QCD για μεγάλο N	21
1.6 Θεωρίες μεγάλου N για πεπερασμένη θερμοκρασία και/ή πυκνότητα	24
1.7 Ο ρόλος του μεγάλου N στην αντιστοιχία θεωριών βαθμίδας με τη θεωρία χορδών	29
Κεφαλαίο 2	35
SU(N) θεωρίες βαθμίδας στο lattice	35
2.1 Το ελεύθερο μονόμετρο πεδίο	35
2.1.1 Η μέθοδος των δυνατών διαδρομών	35
2.1.2 Το μονόμετρο πεδίο στο lattice	37
2.1.3 Συνεχές όριο	39
2.2 Διακριτοποίηση των SU(N) θεωριών βαθμίδας	41
2.2.1 Βαθμωτά πεδία	41
2.2.2 Φερμιόνια	44
2.2.3 Βαθμωτές θεωρίες και φερμιονική ύλη	47
2.2.4 Αποσβένουσα προσέγγιση	48
2.3 Υπολογισμοί με τη μέθοδο Monte Carlo	49
2.4 Προσομοιώσεις στο lattice για τις SU(N) θεωρίες βαθμίδας	51
Κεφαλαίο 3	55
Παραγοντοποίηση, εξισώσεις βρόχων και ομοιότητες στο μεγάλο N	55
3.1 Παραγοντοποίηση	55
3.2 Μία περιγραφή με όρους κλασικής μηχανικής του ορίου για μεγάλο N	56
3.3 Ανεξαρτησία χωροχρόνου και κύριο πεδίο	57
3.4 Εξισώσεις βρόχων	57
3.5 Το μοντέλο Eguchi-Kawai	59
3.6 Αποσβένουσα ορμή και το αποσβένων μοντέλο Eguchi-Kawai	60
3.7 Το περιπλεγμένο μοντέλο Eguchi-Kawai	64
3.8 Ελάττωση του όγκου με συζυγή φερμιόνια	68
3.9 Ελάττωση του όγκου στις θεωρίες Yang-Mills με παραμορφώσεις διπλού-ίχνους	69
3.10 Μερική απομείωση του όγκου	72
3.11 Ομοιότητες της ανεξαρτησίας όγκου και του μεγάλου N για προβολές σε orbifolds	72
Συμπεράσματα	77
Βιβλιογραφία	79

Πρόλογος

Στην εργασία αυτή, επανεξετάζω από μία ευρύτερη σκοπιά τις θεωρητικές και εννοιολογικές εξελίξεις από τη γενίκευση της QCD στο όριο για αρκετά μεγάλο αριθμό φορτίων χρώματος, μέσω της μεθόδου που αρχικά προτάθηκε από τον 't Hooft.

Στη συνέχεια εισάγω τον αναγνώστη στο φορμαλισμό των μη-διαταραγμένων, βαθμωτά-αναλλοιώτων, μη-Αβελιανών θεωριών βαθμίδας κατά τη μεθοδολογία του lattice. Μέσω της προσέγγισης αυτής, γίνεται δυνατή η μελέτη ενός συνόλου προβλημάτων και η προέκτασή τους στο όριο για μεγάλο N .

Στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών του ΕΜΠ και του Ε-ΚΕΦΕ Δημόκριτος, εκπονήθηκε αυτή η εργασία υπό την επίβλεψη τριμελούς επιτροπής με επιβλέποντα τον επίκουρο καθηγητή Νίκο Ήργες, και μέλη τους αναπληρωτές καθηγητές Αλέξανδρο Αναγνωστόπουλο και Γεώργιο Κουτσούμπα τους οποίους ευχαριστώ. Θερμά ευχαριστώ τον κύριο Ήργες για την βοήθεια που μου παρείχε και τον τρόπο κατεύθυνσης της ολοκλήρωσης της εργασίας μου.

Επίσης αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω την κυρία Παπαδοπούλου Θεοδώρα ομότιμη καθηγήτρια του ΕΜΠ για την οποία τρέφω αισθήματα σεβασμού, εκτίμησης και την οποία πάντα συμβουλεύομαι. Την ευχαριστώ για την αμέριστη συμπαράστασή της.

Εισαγωγή

Το 1974 δύο ιστορικές εργασίες δημοσιεύθηκαν στη θεωρητική φυσική με μεγάλο αντίκτυπο στην κβαντική θεωρία πεδίου. Στις 18 Απριλίου το άρθρο του Gerard 't Hooft "A planar diagram theory for strong interactions" στο Nuclear Physics B[1] ενώ στις 15 Οκτωβρίου το Physics Review D δημοσίευσε το "Confinements of quarks" του Kenneth Geddes Wilson[2].

Στο άρθρο του 't Hooft, μελετώνται οι μη-Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας στο διπλό όριο για μεγάλο N και απειροστή σταθερά σύζευξης g ώστε το γινόμενο $g^2 N$ να παραμένει σταθερό και έδειξε ότι, με αυτή τη συνθήκη, τα διαγράμματα Feynman που προκύπτουν μπορούν να διαταχθούν ως ανάπτυγμα δυνάμεων του $1/N$ όπου οι κύριες συνεισφορές προέρχονται από ένα μικρό αριθμό διαγραμμάτων με καλώς ορισμένες τοπολογικές ιδιότητες.

Από την άλλη στο άρθρο του ο Wilson, εισάγει την κανονικοποίηση για μη-Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας, μέσω της διακριτοποίησης του συνεχούς Ευκλίδειου χωροχρόνου σε πλέγμα, και απέδειξε τους περιορισμούς στο φορτίο χρώματος που υπεισέρχονται στο όριο της ισχυρής σύζευξης, σε αυτή την περίπτωση. Η μέθοδος αυτή εισήγαγε το lattice στη θεωρία πεδίου, που παρέχει ένα μαθηματικά αυστηρό, βαθμωτά αναλλοίωτο, αδιατάρακτο ορισμό της μη-Αβελιανής θεωρίας πεδίου, επιτρέποντας τη χρήση στατιστικών μεθόδων, συμπεριλαμβανομένων προσομοιώσεων Monte Carlo.

Παρότι και τα δύο άρθρα άσκησαν από την αρχή ιδιαίτερα έντονη επίδραση στη θεωρητική φυσική, οι εξελίξεις που ενέπνευσαν, ακολούθησαν τελείως διαφορετικά μονοπάτια. Πιο συγκεκριμένα, οι λεπτές μαθηματικές απλοποιήσεις στο όριο για μεγάλο N , οι ποιοτικές φαινομενολογικές προβλέψεις, ένα σύνολο επιτυχημένων εφαρμογών των τεχνικών για μεγάλο N στην εξαγωγή αναλυτικών αποτελεσμάτων για στατιστικά συστήματα ιδιοστροφορμής και την ημιαναλυτική λύση για το φάσμα στην QCD σε δύο χωροχρονικές διαστάσεις [3], ήταν όλα αποτελέσματα που οδήγησαν από νωρίς σε προσδοκίες, ότι αυτή η προσέγγιση θα μπορούσε να αποτελέσει το κλειδί που θα μας οδηγήσει στην κατανόηση των ισχυρών αλληλεπιδράσεων.

Αυτές οι προσδοκίες όμως σύντομα φάνηκαν ουτοπικές και παρά το γεγονός ότι αρχικά αυτή η μέθοδος οδήγησε σε ένα σύνολο αρχικών αποτελεσμάτων, όπως ο φορμαλισμός μιας συστηματικής επέκτασης τάξης $1/N$ για τα βαρυόνια [4], απέτυχε τελικά να παράσχει μία ακριβή λύση της QCD στις τέσσερις διαστάσεις.

Αντίθετα τα πρώτα αποτελέσματα (τόσο τα αναλυτικά όσο και τα ποιοτικά) της μεθόδου του lattice ήταν αρκετά φτωχά σε ένα σύνολο πεδίων (gauge coupling, μάζες κουάρκ, μέγεθος lattice, αλλά και προσομοιώσεις), χαρακτηρίζονταν από έντονα φαινόμενα διακριτοποίησης και συστηματικές ή στατιστικές αβεβαιότητες και παρείχαν μόνο χρήσιμες ποιοτικές πληροφορίες για τη συνεχή θεωρία. Παρότι η QCD αναμενόταν να περιγραφεί ικανοποιητικά ως μία χαμηλής ενέργειας θεωρία με συνεχείς συμμετρίες όταν το μέγεθος του πλέγματος a τείνει στο μηδέν, ωστόσο το βασικό πρόβλημα υπολογισμών στο lattice είναι το γεγονός ότι οι υπολογισμοί πρέπει να γίνουν σε ένα πεδίο τιμών:

$$m \ll a^{-1} \tag{1}$$

και ταυτόχρονα να υπάρχουν μεγέθη πλέγματος αρκετά μεγάλα ώστε να εξασθενούν τα προβλήματα που προκύπτουν σε πεπερασμένο χωρίο. Αυτό μετατρέπει ακόμα και αυτό το बातό, θεωρητικά, πρόβλημα για το lattice σε κάτι αρκετά δύσκολο υπολογιστικά. Για τους παραπάνω λόγους μέχρι τα τέλη του προηγούμενου αιώνα πολλοί υπολογισμοί QCD για το lattice γίνονταν είτε σε σχετικά μικρά πλέγματα είτε παραλείποντας τις συνεισφορές από δυναμικούς βρόγχους κουάρκ.

Ευτυχώς, σημαντικές πρόοδοι στους αλγόριθμους και τους υπολογιστές τα τελευταία χρόνια, επέτρεψαν μεγάλης κλίμακας δυναμικές προσομοιώσεις στο lattice για πραγματικές από φυσικής σκοπιάς τιμές μεταβλητών και παραμέτρων. Αυτό επέτρεψε για πρώτη φορά να γίνουν αποδεκτές θεωρητικές προβλέψεις για ποσότητες όπως οι μάζες των αδρονίων κατά τους νόμους της QCD [4, 5]. Την ίδια στιγμή αντίστοιχη πρόοδος σημειώνεται και σε άλλους απαιτητικούς υπολογισμούς της θεωρίας πεδίου στο lattice, ειδικότερα προσομοιώσεις της θεωρίας πεδίου για μεγάλα N . Ακριβώς αυτή η εξέλιξη συμβαίνει τη στιγμή κατά την οποία οι θεωρίες για μεγάλο N σημειώνουν μεγάλη πρόοδο εξαιτίας της υπόθεσης της διαδικότητας μεταξύ της θεωρίας πεδίου στις τέσσερις διαστάσεις και της θεωρίας χορδών σε καμπυλωμένο χωρόχρονο [6, 7, 8] με πολλές διαστάσεις, που αποδίδεται και ως AdS/CFT.

Το όριο σύζευξης της ισχυρής αλληλεπίδρασης της θεωρίας βαθμίδας αντιστοιχίζεται στο όριο στο οποίο καμπυλώνεται ο χωροχρόνος στη διαδική θεωρία χορδών που προκύπτει. Ακόμα όταν ο αριθμός του φορτίου χρώματος κατά τη θεωρία βαθμίδας γίνει μεγάλος, η σύζευξη στη διαδική θεωρία χορδών τείνει στο μηδέν, ώστε η θεωρία χορδών να οδηγείται στο κλασσικό της όριο. Για την ακρίβεια, μόνο σε αυτό το όριο η θεωρία χορδών μπορεί να αναλυθεί με αναλυτικές μεθόδους. Συνεπώς όλοι οι υπολογισμοί λαμβάνουν κατά προσέγγιση άπειρο αριθμό φορτίου χρωμάτων για την θεωρία πεδίου. Για το λόγο αυτό η κατανόηση της ποσοτικής συνάφειας του ορίου για μεγάλο- N με την QCD, σε επίπεδο πειραματικών δεδομένων, είναι πολύ σημαντική υπόθεση και μπορεί να προσεγγιστεί μέσω αριθμητικών υπολογισμών στο lattice. Ακόμα, το επίπεδο ελέγχου συστηματικών και στατιστικών αβεβαιοτήτων στους υπάρχοντες υπολογισμούς πλέγματος, είναι επαρκές για αξιόπιστα tests για κάποιες από τις φαινομενολογικές προβλέψεις που έχουν προέλθει χρησιμοποιώντας $1/N$ αναπτύγματα και άλλες μεθόδους για μεγάλο- N .

Κεφάλαιο 1

1.1 Το όριο για μεγάλο N

Η μέθοδος των αναπτυγμάτων γύρω από το μεγάλο- N είναι ένα μαθηματικό εργαλείο για να μελετηθούν στατιστικά μοντέλα και κβαντικές θεωρίες πεδίου που παραμένουν αναλλοίωτες γύρω από μία ομάδα μετασχηματισμών G σχετικά με τους εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας, των οποίων ο αριθμός σχετίζεται με μία παράμετρο N . Σε αντίθεση με την απλοϊκή προσδοκία ότι η θεωρία μπορεί να γίνεται πιο σύνθετη όταν το N τείνει στο άπειρο στην πράξη συμβαίνει το αντίθετο: συχνά η θεωρία γίνεται πολύ πιο βατή στο όριο για $N \rightarrow \infty$ και διορθώσεις που σχετίζονται με τον απειρισμό του N μπορούν να γίνουν σε ένα ανάπτυγμα γύρω από αυτό το όριο, σε δυνάμεις της μορφής $1/N$.

Σε στατιστικά συστήματα ιδιοστροφορμής οι πρώτες εφαρμογές αυτής της ιδέας πηγαινούν πίσω στις εργασίες του Stanley [22] και άλλων συγγραφέων [23, 24, 25, 26] και έχει δείξει αυτή η προσέγγιση τη μεγάλη σχέση μεταξύ της φύσης των κρίσιμων φαινομένων με την χωροχρονική διαστασιολογία και θέτει τη βάση για την εισαγωγή παραδοχών που απλοποιούν τους υπολογισμούς. Επιπλέον άλλες τεχνικές για μεγάλο- N μπορούν να δώσουν ακριβείς αναλυτικές λύσεις [27] και να αποδώσουν τη σύνδεση αυτών των μοντέλων στη διακριτοποίηση τυχαίων επιφανειών με την κβαντική βαρύτητα σε δύο χωροχρονικές διαστάσεις [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34]. Ακόμα, γενικεύσεις σε ανώτερες διαστάσεις μπορούν να γίνουν με τη βοήθεια τανυστικών μοντέλων. Παρότι ακριβείς υπολογισμοί σε αυτά τα μοντέλα εμποδίζονται από τις δυσκολίες να φορμαλιστούν συστηματικές γενικεύσεις για το ανάπτυγμα $1/N$, σημαντική πρόοδος έχει σημειωθεί με την εισαγωγή τανυστικών μοντέλων για την περιγραφή του χρώματος [35].

Για τις μη-Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας και ειδικότερα για την κβαντική χρωμοδυναμική η ανάπτυξη για μεγάλο N μελετήθηκε πρώτη φορά τη δεκαετία το '70 από τον 't Hooft ο οποίος πρότεινε την επέκταση της θεωρίας για τη συνθήκη στην οποία ο αριθμός των χρωμάτων φορτίου, παράμετρος N , τείνει στο άπειρο. Το όριο αυτό στην QCD είναι ιδιαίτερα σημαντικό επειδή σε αυτό το όριο η θεωρία επιδέχεται ένα σύνολο απλοποιήσεων οι οποίες σε συγκεκριμένες περιπτώσεις επιτρέπουν να εξαχθούν συγκεκριμένες λύσεις με αναλυτικές ή ημιαναλυτικές μεθόδους. Πολύ γνωστά παραδείγματα μπορούν να βρεθούν στις δύο διαστάσεις με τον υπολογισμό του μεσονικίου φάσματος [3]. Άλλα παραδείγματα είναι η αναγνώριση της τρίτης τάξης αλλαγή φάσης που διαχωρίζει τις ισχυρές από τις ασθενείς καταστάσεις σύζευξης στην προσέγγιση της θεωρίας μέσω lattice και ο καθορισμός των ιδιοτήτων της φασματικής πυκνότητας που σχετίζεται με τους βρόχους Wilson στη συνεχή θεωρία [36].

Στην περίπτωση των τεσσάρων διαστάσεων, το όριο για μεγάλο N δεν κάνει την QCD αναλυτικά επιλύσιμη, παρόλα αυτά παρέχει σημαντικές πληροφορίες που δεν λαμβάνονται από συμβατικούς υπολογισμούς με τη μέθοδο των διαταραχών γύρω από το όριο της ασθενούς σύζευξης. Ακόμα παρέχει απλή ερμηνεία για κάποια εμπειρικά δεδομένα που παρατηρούνται σε αδρονικές αλληλεπιδράσεις. Τέλος, το βασικό κίνητρο, είναι η πεποίθηση ότι το μεγάλο- N στην QCD μπορεί να οδηγήσει σε κάποιου είδους θεωρία χορδών.

1.2 Το όριο της QCD στο επίπεδο

Στο καθιερωμένο πρότυπο των στοιχειωδών σωματιδίων οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις περιγράφονται από την κβαντική χρωμοδυναμική, μία μη-Αβελιανή διανυσματική θεωρία πεδίου βασισμένη στην τοπικά αναλλοίωτη συμμετρία SU(3). Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα της QCD στο χωροχρόνο Minkowski είναι:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\text{Tr}(F_{ab}F^{ab}) + \sum_{f=1}^{n_f} \bar{\psi}(i\gamma^a D_a - m_f)\psi_f \quad (2)$$

όπου g είναι η σταθερά σύζευξης, $D_\mu = \partial_\mu - gA_\mu^a(x)T^a$ είναι η βαθμωτά συναλλοίωτη παράγωγος (με τα T^a να αντιπροσωπεύουν τους οχτώ γεννήτορες της άλγεβρας Lie στην SU(3), στην αναπαράσταση τους ως μηδενικού ίχνους Ερμιτιανοί πίνακες διάστασης 3 x 3, με την κανονικοποίηση: $\text{Tr}(T^a T^b) = \delta^{ab}/2$), $F_{ab} = (i/g)[D^a, D^b]$ είναι η μη-Αβελιανή δύναμη του πεδίου, τα γ^a είναι οι πίνακες Dirac, ενώ $\psi(x)$ και $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger \gamma^0$ αντίστοιχα αντιπροσωπεύουν τους σπίνορες που συνδέονται με τα πεδία κουάρκ και τις συζεύξεις τους. Τα πεδία των κουάρκ είναι στη θεμελιώδη μορφή του βαθμωτού πεδίου και παρουσιάζονται σε n_f διαφορετικά είδη -γεύσεις- με, τυπικά, διαφορετικές μάζες m_f .

Το όριο του 't Hooft στην QCD είναι μια γενίκευση της θεωρίας για την περίπτωση όπου ως ομάδα της βαθμίδας λαμβάνεται η SU(N) και τα φορτία χρώματος N θεωρείται ότι τείνουν στο άπειρο. Οι κλασικοί υπολογισμοί για την ασθενή σύζευξη δείχνουν ότι, προκειμένου το όριο να έχει σημασία ακόμα και υπό το πρίσμα της θεωρίας διαταραχών θα πρέπει την ίδια στιγμή η σταθερά σύζευξης g να τείνει στο μηδέν με τέτοιο τρόπο ώστε η κατά 't Hooft σύζευξη $\lambda = g^2 N$ να είναι σταθερή. Όσο για το πώς ο αριθμός των γεύσεων των κουάρκ n_f θα πρέπει να συμπεριφέρεται, η αυθεντική μέθοδος του 't Hooft ήταν να τον κρατήσει αμετάβλητο. Για τα παραπάνω με $N \rightarrow \infty$ η δεύτερης τάξης προσέγγιση της θεωρίας διαταραχών για την β -function της QCD είναι:

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{11N - 2n_f}{3} \right) g^3 - \frac{1}{(4\pi)^4} \left(\frac{34N^3 - 13N^2 n_f + 3n_f}{3N} \right) g^5 + O(g^7) \quad (3)$$

που μετατρέπεται σε μια επανακανονικοποιημένη συνάρτηση για το λ με πεπερασμένους όρους:

$$\mu \frac{d\lambda}{d\mu} = -\frac{11}{24\pi^2} \lambda^2 - \frac{17}{192\pi^4} \lambda^3 + O(\lambda^4) \quad (4)$$

Να σημειωθεί ότι, καθώς ο συντελεστής του πρώτου τμήματος είναι αρνητικός, η θεωρία διαταραχών προβλέπει ότι το όριο του 't Hooft στην QCD είναι μια ασυμπτωτικά ελεύθερη

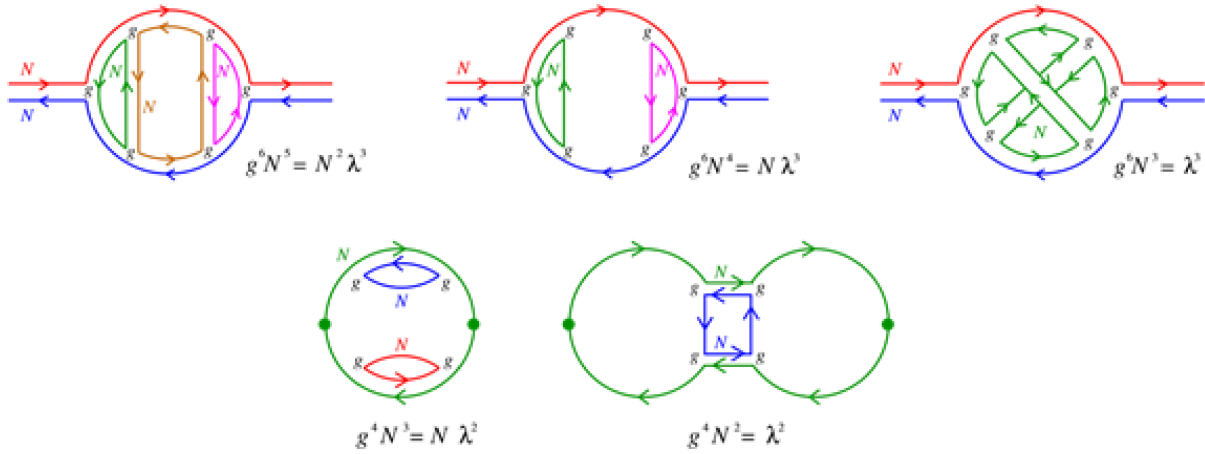
θεωρία. Ωστόσο οι μεγαλύτερης τάξης όροι της β -function είναι ανάλογοι του συστήματος που μελετάται π.χ. σε κάποια σενάρια το δεξί μέρος της εξίσωσης συγκλίνει πολύ γρήγορα σε πεπερασμένες τιμές. Είναι επομένως εύκολο να υποθέσουμε ότι η παράμετρος Λ_{QCD} των ισχυρών αλληλεπιδράσεων παραμένει σταθερή για $N \rightarrow \infty$.

Ένα άλλο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό της τελευταίας εξίσωσης είναι ότι δεν εξαρτάται από το n_f , αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο βαθμός ελευθερίας των κουάρκ είναι $O(n_f N)$ ήτοι: $O(N)$ στο όριο του 't Hooft, και επομένως ακολουθώντας αυτό το συλλογισμό ο βαθμός ελευθερίας για τα γλουόνια είναι τάξης $O(N^2)$. Για την ακρίβεια ένα διαφορετικό όριο για μεγάλο N στην QCD, το όριο του Veneziano, για το οποίο ο αριθμός γεύσεων n_f απειρίζεται κρατώντας το λόγο n_f/N σταθερό. Ωστόσο στην πράξη αυτή η επιλογή οδηγεί σε πιο περίπλοκους υπολογισμούς. Άλλα όρια έχουν δοκιμαστεί επίσης όπως το όριο Corrigan-Ramond ή καταστάσεις για τις οποίες το λ αποκλίνει, ωστόσο δεν θα ασχοληθώ παρά μονάχα με την προσέγγιση του 't Hooft.

Οι ιδιότητες της QCD στο όριο αυτό καθορίζονται από τα φαινόμενα που προκύπτουν όταν ο αριθμός των χρωμάτων γίνει μεγάλος, και η σύζευξη μικρή. Εφόσον το διπλό όριο εφαρμόζεται για σταθερό λ είναι χρήσιμο να γράψουμε όλους τους κανόνες του Feynman αντικαθιστώντας το g με $\sqrt{\lambda/N}$. Επιπλέον ένας εύκολος τρόπος να κρατήσουμε επαφή με τον αριθμό των ανεξάρτητων συνιστοσών χρώματος στα διαγράμματα Feynman που μελετάμε είναι ο λεγόμενος γράφος διπλής γραμμής ή "ταινίας". Καθότι τα κουάρκ είναι πεδία στην βασική αναπαράσταση της βαθμίδας $SU(N)$, ένας γενικός διαδότης κουάρκ της μορφής $\langle \psi(x)\bar{\psi}^j(y) \rangle$, (όπου τα i και j είναι θεμελιώδεις δείκτες χρώματος και θεωρούμε κατάλληλη βαθμίδα π.χ. 't Hooft-Feynman όπου $\xi = 1$) είναι ανάλογο του δέλτα του Kronecker δ^{ij} και μπορεί να αναπαρασταθεί με μια απλή γραμμή. Εν αντιθέσει οι ιδιότητες των γεννητόρων της άλγεβρας $SU(N)$ υποχρεώνουν τον διαδότη του πεδίου των γλουονίων $\langle A_{\mu j}^i(x)A_{\nu l}^k(y) \rangle$ να είναι ανάλογος της σχέσης $(\delta_j^i \delta_l^k - \delta_j^k \delta_l^i/N)$ και συνεπώς μπορεί να αναπαρασταθεί (όπως αναφέρθηκε παραπάνω) από ένα ζεύγος γραμμών με αντίθετο προσανατολισμό. Δεν θα λάβω υπόψη τον έναν εκ των δύο όρων του διαδότη, κάτι το οποίο ισοδυναμεί με την αντικατάσταση της βαθμίδας $SU(N)$ με $U(N)$, κάτι που επιρεάζει τα αποτελέσματα με μία σχετική διόρθωση τάξης $O(N^{-2})$ στο όριο για μεγάλο N . Αναπαριστώντας τα ανάλογα διαγράμματα και κάνοντας χρήση των παραπάνω κανόνων μπορούμε να δούμε ότι τα πλάτη των εκάστοτε φυσικών διαδικασιών που μελετώνται κυριαρχούνται από επίπεδα διαγράμματα που δεν περιέχουν δυναμικούς βρόγχους κουάρκ.

Τα παραπάνω μπορούν να γίνουν κατανοητά στο σχήμα (1) στο οποίο εικονίζονται 5 διαγράμματα για δύο διαφορετικές διεργασίες. Τα επάνω διαγράμματα, τρία τον αριθμό, σχηματοποιούν τη συνεισφορά ενός γλουονίου διαδότη για διαδικασίες με τρεις βρόγχους και ένα τυχαίο N . Το επίπεδο διάγραμμα στα αριστερά αποτελείται μόνο από φανταστικά γλουόνια, είναι το διάγραμμα με το μεγαλύτερο αριθμό ανεξάρτητων γλουονίων (εδώ λαμβάνεται η γενική περίπτωση εισερχόμενων γλουονίων), και είναι ανάλογο του $g^6 N^5 = N^2 \lambda^3$. Από την άλλη αντικαθιστώντας ένα εσωτερικό γλουόνιο με ένα βρόχο κουάρκ όπως στο μεσαίο διάγραμμα, "σβήνει" μία εσωτερική γραμμή μειώνοντας το λόγο της συνεισφοράς κατά ένα παράγοντα N σε $N \lambda^3$. Τέλος στο δεξιό διάγραμμα που σε αντίθεση με τα προηγούμενα περιλαμβάνει διασταυρούμενες γραμμές και δεν είναι επίπεδο, έχουμε μία απομείωση της συνεισφοράς κατά N^2 και πιο αναλυτικά $g^6 N^3 = \lambda^3$.

Τα δύο κάτω διαγράμματα αναπαριστούν τη διάδοση ενός μεσονίου. Στο δεξιό διάγραμμα έχουμε τη συμμετοχή δύο γλουονίων και πλάτος $g^4 N^2 = \lambda^2$ ενώ στο αριστερό διάγραμμα με αντίστοιχη λογική με τα πάνω διαγράμματα, εφόσον έχουμε τη συμμετοχή ενός



Σχήμα 1: **Επάνω:** Διαφορετικοί τύποι διαγραμμάτων *Feynman* που συνεισφέρουν στη διάδοση γλουονίου με τρεις εσωτερικούς βρόχους. Στο όριο του 't Hooft ο αριθμός των ανεξάρτητων δεικτών χρώματος είναι μεγαλύτερος στο αριστερό διάγραμμα που περιέχει μόνο γλουόνια. Αντικαθιστώντας ένα γλουόνιο, στο μεσαίο διάγραμμα μειώνει τη συνεισφορά κατά N . Τέλος στο δεξιό διάγραμμα αν και συμμετέχουν μόνο γλουόνια είναι μη επίπεδο και έχει συνεισφορά τάξης $O(1)$. Συνεπώς τα δύο τελευταία κανάλια καταπιέζονται σε σχέση με το πρώτο. **Κάτω:** Δύο διαγράμματα που συνεισφέρουν στην μετάδοση ενός μεσονίου. Στο δεξιό διάγραμμα η διαδικασία γίνεται μέσω της δράσης δύο εικονικών γλουονίων και ως εκ τούτου είναι ασθενέστερη κατά ένα παράγοντα τάξης $1/N$ σε σχέση με το αριστερό διάγραμμα όπου έχουμε τη συμμετοχή τριών φωτονίων, σε συμφωνία και με τον κανόνα OZI της *QCD*.

τρίτου γλουονίου έχουμε έναν επιπλέον παράγοντα τάξης N δηλαδή $g^4 N^3 = N \lambda^2$ κάτι που βρίσκεται σε συμφωνία και με το νόμο *OZI* που θέλει τα κανάλια που αναπαρίστανται από διαγράμματα *Feynman* τα οποία μπορούν να αναλυθούν σε δύο διαγράμματα, αν τμηθεί μια εσωτερική γραμμή γλουονίου, να καταπιέζονται σε σχέση με αυτά που δεν πληρούν αυτή την ιδιότητα.

Τμήμα των μαθηματικών απλοποιήσεων της *QCD* στο όριο του 't Hooft είναι το γεγονός ότι μόνο επίπεδα διαγράμματα έχουν ουσιαστική συνεισφορά και μάλιστα ο αριθμός τους αυξάνεται εκθετικά με την τάξη του διαγράμματος (όπου τάξη ο αριθμός των εσωτερικών βρόχων), τη στιγμή που ο συνολικός αριθμός των διαγραμμάτων αυξάνει παραγοντικά [79]. Παρά την απλοποίηση αυτή όμως, η άθροιση όλων των επίπεδων διαγραμμάτων στον τετραδιάστατο χωροχρόνο παραμένει ακόμα ένα άλυτο πρόβλημα [80, 81, 82, 83, 84, 85].

Μία άλλη σημαντική απλοποίηση είναι το γεγονός ότι οι βρόχοι από εικονικά κουάρκ μπορούν να παραληφθούν. Αυτό το γεγονός που αποκαλείται χαρακτηριστικά "αποσβένουσα προσέγγιση" στην ορολογία του lattice (θα επανέλθω αργότερα) ή διερευνητική προσέγγιση στην ορολογία της θεωρίας χορδών, κάνει αισθητή την παρουσία της στα μεγάλα N και μάλιστα δεν προκαλεί κανένα από τα σημαντικά προβλήματα που προκαλούνται στο lattice για N που απειρίζεται όταν εφαρμόζεται η ίδια απλοποίηση εκεί (προβλήματα που περιλαμβάνουν την έλλειψη καλώς ορισμένου χώρου Hilbert, μεταξύ άλλων). Σε σχέση με την καταπίεση του φαινομένου της θάλασσας των κουάρκ θα αναφερθώ σε δύο παρατηρήσεις που υποδυκνείουν ότι η προσέγγιση του 't Hooft ίσως να είναι ποσοτικά ακριβής σε σχέση με τον πραγματικό κόσμο. Το πρώτο είναι η φαινομενολογική επιτυχία στη φασματοσκοπία του

μεντέλου των κουάρκ, ότι οι μάζες των αδρονίων που παρατηρούνται περιγράφονται αρκετά καλά με όρους συμμετρίας γεύσης, για κουάρκ σθένους φυσικά, και μη λαμβάνοντας υπόψη τα μη δέσμια κουάρκ. Το δεύτερο είναι η σημαντική επιτυχία της αποσβένουσας προσέγγισης στο lattice που δεν λαμβάνει υπόψη δυναμικά φαινόμενα όπως βρόχους φανταστικών φερμιονίων που υπεισέρχονται από την ορίζουσα του τελεστή *Dirac*.

Να σημειωθεί ότι τα δύο διαγράμματα στα δεξιά στην επάνω σειρά του σχήματος (1) μπορούν να σχεδιαστούν χωρίς διασταυρούμενες γραμμές (planar) στην επιφάνεια μιας διάτρητης σφαίρας και ενός διπλού τόρου αντίστοιχα. Αυτό είναι απόδειξη της γενικότερης ιδιότητας που κατατάσσει τα διαγράμματα Feynman στο όριο του 't Hooft, ότι το πλάτος \mathcal{A} μιας φυσικής διεργασίας μπορεί να εκφραστεί με δύο τρόπους, τόσο ως ανάπτυγμα δυνάμεων του λ όσο και δυνάμεων του $1/N$, όπου ο δεύτερος χαρακτηρισμός είναι τοπολογικής φύσεως. Η δύναμη $1/N$ που σχετίζεται με κάθε διάγραμμα σχετίζεται με έναν αριθμό "λαβών" (h) και έναν αριθμό "ακρότατων" (b) της πιο απλής Ρημμάνιας επιφάνειας στην οποία μπορεί να εγγραφεί το διάγραμμα χωρίς διασταυρούμενες γραμμές και ισοδυναμεί με το χαρακτηριστικό Euler:

$$\mathcal{A} = \sum_{h,b=0}^{\infty} N^{2-2h-b} \sum_{n=0}^{\infty} c_{h,b;n} \lambda^n \quad (5)$$

Καθότι για μεγάλο N οι βασικές συνεισφορές είναι τάξης $O(N^2)$ και παραπέμπει σε επίπεδα ($h = 0$) διαγράμματα χωρίς βρόχους κουάρκ ($b = 0$), το όριο του 't Hooft σε αυτή την περίπτωση αποκαλείται και "επίπεδο όριο". Προφανώς στη μελέτη των ποσοτήτων που περιλαμβάνουν βαθμωτά αναλλοίωτα διγραμμικά φερμιόνια, υπάρχει τουλάχιστον μία κλειστή γραμμή κουάρκ και επομένως σε αυτή την περίπτωση (κάτω σειρά διαγραμμάτων) η κύρια συνεισφορά είναι $b = 1, h = 0$ που είναι $O(N)$.

1.3 Φαινομενολογικές επιπτώσεις του ορίου για μεγάλο- N στα μεσόνια και τα γλουοσωμάτια

Κάτω από την παραδοχή ότι η θεωρία που εισήγαγε ο 't Hooft είναι μια κλειστή θεωρία (κεφάλαιο 2), οι κανόνες που εισήχθησαν στην προηγούμενη παράγραφο οδηγούν σε μία σειρά σημαντικών φαινομενολογικών συνεπειών, ειδικά στις ελαφρύτερες φυσικές καταστάσεις, τα μεσόνια και τα γλουοσωμάτια. Ας επιχειρήσουμε να αντικαταστήσουμε στη Λαγκρανζιανή πυκνότητα που εισάγαμε στην εξίσωση (2):

$$A_{\mu}^a(x) \rightarrow \frac{1}{g} A_{\mu}^a(x), \quad \psi_f(x) \rightarrow \sqrt{N} \psi_f(x) \quad (6)$$

έτσι ώστε ουσιαστικά καταφέρνουμε να εκφράσουμε την παλιά Λαγκρανζιανή \mathcal{L} ως προς τη νέα $\tilde{\mathcal{L}}$ στη μορφή $\mathcal{L} = N\tilde{\mathcal{L}}$ με:

$$\bar{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4\lambda}(F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}) + \sum_{f=1}^{n_f} \bar{\psi}_f(\gamma^\mu D_\mu - m_f)\psi_f \quad (7)$$

Εδώ μπορεί κανείς να σκεφτεί ότι η κβαντική θεωρία που καθορίζεται από το δυνατό path integral:

$$(\mathcal{Z}_0) = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ iN \int dt d^3x \bar{\mathcal{L}}[A, \psi, \bar{\psi}] \right\} \quad (8)$$

μειώνεται στο κλασσικό της όριο που διατηρείται ως το στατικό σημείο της $\bar{\mathcal{L}}$. Αυτό ωστόσο δεν συμβαίνει διότι άλλοι όροι αναδύονται από τη μέτρηση του πεδίου [86] που διαχωρίζουν τελικά το όριο για μεγάλο N από το κλασσικό όριο. Συναρτήσεις συσχέτισης βαθμωτά αναλλοίωτων τελεστών \mathcal{O}_a που σχηματίζονται από βαθμωτά πεδία και πιθανόν φερμιονικές συνεισφορές μπορούν να μελετηθούν προσθέτοντας όρους της μορφής $(NJ_a O_a)$ στο \mathcal{L} :

$$(\mathcal{Z}_0) = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ iN \int dt d^3x (\bar{\mathcal{L}}[A, \psi, \bar{\psi}] + J_a O_a) \right\} \quad (9)$$

από όπου έχουμε αθροιστικά:

$$\langle O_1(x_1) \cdots O_n(x_n) \rangle_c = (iN)^{-n} \frac{\delta}{\delta J_1(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J_n(x_n)} \ln \mathcal{Z}_J |_{J=0} \quad (10)$$

Η κύρια συνεισφορά όπως συζητήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο είναι για $O(N^2)$ στο όριο του 't Hooft για συνδεδεμένους γράφους γλουονίων ή $O(N)$ για φερμιονικούς διαδότες, σαν αποτέλεσμα για συναρτήσεις συσχέτισης με n -όρους η συνεισφορά προέρχεται από επίπεδα διαγράμματα αποτελούμενα αποκλειστικά από βρόχους γλουονίων με τάξη $O(N^{2-n})$ και $O(N^{1-n})$ για την περίπτωση που αναφερόμαστε σε συναρτήσεις συσχέτισης για κουάρκ.

Έστω \mathcal{G}_i αμοιγώς γλουονικός, βαθμωτά αναλλοίωτος Ερμιτιανός τελεστής, με κατάλληλους κβαντικούς αριθμούς για να περιγράψει ένα δοθέν γλουοσωμάτιο. Καθώς μια συνάρτηση συσχέτισης δύο όρων της μορφής $\langle \mathcal{G}_i \mathcal{G}_i \rangle$ είναι $O(1)$ στο μεγάλο N , ο τελεστής \mathcal{G}_i δημιουργεί μια κατάσταση γλουοσωματίου πλάτους τάξης μεγέθους 1. Επομένως αντιδράσεις γλουοσωματίων που περιλαμβάνουν διασπάσεις, σκεδάσεις κτλ. περιγράφονται από υψηλότερης τάξης συναρτήσεις συσχέτισης $\langle \mathcal{G}_i \cdots \mathcal{G}_n \rangle_c$ με $n \geq 3$ και συνεπώς καθότι γενικά είναι τάξης $O(N^{2-n})$, ως εκ τούτου καταπιέζονται τουλάχιστον κατά παράγοντα $1/N$ σε σχέση με την ελεύθερη περίπτωση.

Αντίστοιχα, οι καταστάσεις των μεσονίων μπορούν να περιγραφούν από βαθμωτά αναλλοίωτους Ερμιτιανούς τελεστές, με κατάλληλους κβαντικούς αριθμούς. Σε αυτή την

περίπτωση έχουμε συνάρτηση συσχέτισης για την πιο απλή περίπτωση $\langle \mathcal{M}_i \mathcal{M}_i \rangle_c$ και εν συνεχεία καταπιέζεται κατά ένα παράγοντα $1/N$ με τον τελεστή $\sqrt{n} \mathcal{M}_i$ να δίνει μεσόνιο με πλάτος $O(1)$. Στη διάσπαση του πιονίου για παράδειγμα η σταθερά διάσπασης f_π είναι σε όρους στοιχείων πίνακα που περιγράφουν την επικάλυψη μεταξύ των καταστάσεων του isospin και της κατάστασης του πιονίου:

$$\langle 0 | N \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 T_j \psi(x) | \pi_l(k) \rangle = -i f_\pi k_\mu \delta_{jl} \exp(-ikx) \quad (11)$$

ο παράγοντας N στον ορισμό είναι υποχρεωτικός για να εκφράσει αυτή την ποσότητα κανονικοποιημένη για πεδία κουάρκ, και κάνει την έκφραση ανάλογη του \sqrt{N} σε μεγάλα N .

Όπως είναι αναμενόμενο οι αντιδράσεις μεσονίου-μεσονίου περιγράφονται από συναρτήσεις συσχέτισης της μορφής:

$$N^{n/2} \langle \mathcal{M}_1 \cdots \mathcal{M}_n \rangle_c \quad (12)$$

όπου $n \geq 3$. Συνεπώς αναπτύσσονται σύμφωνα με τη σχέση $O(N^{1-\frac{n}{2}})$, επομένως συμπίπτουν για μεγάλο N . Τέλος οι αντιδράσεις μεσονίων-γλουοσωματίων περιγράφονται από τη συνάρτηση συσχέτισης $\langle \mathcal{G}_1 \sqrt{N} \mathcal{M}_1 \rangle_c$ ή μεγαλύτερης τάξης και συνεπώς ακολουθεί $O(N^{-1/2-n/2})$.

Συνοψίζοντας η προσέγγιση του 't Hooft για την QCD είναι μια θεωρία στην οποία το βασικό φάσμα αποτελείται από σταθερά, μη αντιδρόντα, γλουοσωματίδια και μεσόνια. Εξωτικές καταστάσεις όπως τετρακουάρκ απουσιάζουν στά μεγάλα N επειδή η μέγιστη συνεισφορά των διαδοτών τους προέρχεται από όρους που παραπέμπουν στη μετάδοση μεσονίων και γλουοσωματίων. Ακόμα οι αδρονικές αλληλεπιδράσεις καταπιέζονται κατά $1/\sqrt{N}$ έτσι ώστε καταλήγουμε σε ασθενώς συζευγμένα αδρόνια. Αξίζει να σημειωθεί ότι αν και η παράμετρος σύζευξης καταπιέζεται κατά $1/\sqrt{N}$, την ίδια στιγμή η παράμετρος που καθορίζει την ακρίβεια των αναπτυγμάτων για μεγάλο N είναι ανάλογη του N αν όχι ακόμα καλύτερη.

Συνδιάζοντας το γεγονός ότι στις χαμηλές ενέργειες το φάσμα της θεωρίας αποτελείται από μη-αντιδρώντα, απείρως περιορισμένα αδρόνια και στις υψηλές ενέργειες η θεωρία γίνεται ασυμπτωτικά ελεύθερη (εξ. 4), μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ο αριθμός των σταθερών καταστάσεων μεσονίων και γλουοσωματίων είναι άπειρος, καθότι οι συναρτήσεις συσχέτισης δύο σημείων στο χώρο των ορμών μπορούν να εκφραστούν σαν γραμμικός συνδιασμός αδρονικών διαδοτών με "αιχμηρούς" πόλους ανάλογους της έκφρασης $(p^2 - m^2)^{-1}$. Αν ο αριθμός των αδρονίων ήταν πεπερασμένος τότε θα ήταν αδύνατον να αναπαραχθεί η συναρτησιακή μορφή που αναμένεται για τη συσχέτιση των μεσονίων που περιλαμβάνει εξάρτηση αντίστοιχη με τον λογάριθμο του p^2 .

Κατά τα γνωστά, στην QCD για N αριθμό χρώματος και n_f αριθμό γεύσεων κουάρκ, ο τελεστής Dirac είναι $i\gamma^\mu D_\mu$ που αντιμετωπίζεται με τον μεταθέτη της χειραλικότητας γ_5 , επομένως για $n_f \geq 2$ η λαγκρανζιανή στην εξ. (2) είναι κλασικά αναλλοίωτη κάτω από γενική, μη-Αβελιανή συμμετρία χειρός $U_R(n_f) \times U_L(n_f)$. Αυτή η συμμετρία περιγράφει τις ανεξάρτητες στροφές των αριστερόστροφων και δεξιόστροφων όρων $\psi_{R,L} = P_{R,L} \psi$ των

πεδίων κουάρκ (και αντίστοιχα για το συζυγές $\bar{\psi}$) όπου οι δεξιόστροφες και οι αριστερόστροφες προβολές αντίστοιχα είναι:

$$P_{R,L} = \frac{\mathbb{1} \pm \gamma_5}{2} \quad (13)$$

η γενική συμμετρία $U_R(n_f) \times U_L(n_f)$ της κλασσικής λαγκρανζιανής για τα άμαζα κουάρκ μπορεί να εκφραστεί σε όρους διανύσματος (V) και άξονα (A) με μετασχηματισμούς όπως: $SU_V(n_f) \times U_V(1) \times SU_A(n_f) \times U_A(1)$.

Στο χβαντικό επίπεδο η $U_V(1)$ συμμετρία παραμένει ακριβής και αντιστοιχεί στην διατήρηση του βαρυονικού αριθμού B στην QCD. Επίσης η συμμετρία $SU_V(n_f)$ παραμένει εν ισχύ αλλά και στον πραγματικό κόσμο σπάει μόνο μερικώς από τις μικρές διαφορές στις μάζες των ελαφρών κουάρκ. Αυτή η συμμετρία εμφανίζεται στις κατάλληλες διαδικασίες εκφυλισμού για το ισοσπίν και την παραδοξότητα στο φάσμα των ελαφρών αδρονίων. Εν αντιθέσει η συμμετρία $SU_A(n_f)$ σπάει ακαριαία, το κενό της QCD χαρακτηρίζεται από μη αμελητέο όρο της συμμετρίας χειρός $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Κατ' αντιστοιχία, ένα $(n_f^2 - 1)$ ελαφρύ ψευδό Nambu-Goldstone μποζόνιο εμφανίζεται στο φάσμα. Εκφρασμένο είτε ως τρία πιόνια (εάν υποθέσουμε ότι $n_f = 2$ γεύσεις ελαφρών κουάρκ) ή ως τρία πιόνια μαζί με τέσσερα καόνια και το \mathbf{n} αν υποθέσουμε ότι το παράξενο κουάρκ είναι άμαζο.

Τέλος η συμμετρία $U_A(1)$ παρουσιάζει ενδιαφέρον καθώς σχετίζεται με το γνωστό και ως $U_A(1)$ πρόβλημα, στο οποίο η QCD δε χάνει τη συμμετρία αυτή στο κενό, και το φάσμα των ελαφρών αδρονίων θα πρέπει να απαρτίζεται από σχεδόν άμαζα ζεύγη αντίθετης ομοτιμίας, γεγονός που δε συμφωνεί με τα παρατηρησιακά δεδομένα. Από την άλλη εάν η συμμετρία έσπαγε δυναμικά, τότε θα έπρεπε να υπήρχε ένα ελαφρύ, ισομονόμετρο (isioscalar), μη-παράξενο, ψευδομονόμετρο μεσόνιο, αλλά τέτοιο σωματίδιο δεν παρατηρείται. Το ελαφρύτερο σωματίδιο που παρατηρείται είναι το \mathbf{n}' με μάζα 957 MeV πολύ βαρύτερο δηλαδή από τα πιόνια τα καόνια και το \mathbf{n} . Η λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι η ακόλουθη: η $U_A(1)$ σπάει καθολικά στο χβαντικό επίπεδο εξαιτίας της μη-αναλλοιωσιμότητας των path integrals στη μέτρηση των πεδίων κουάρκ [88, 89, 90]. Η ανωμαλία που προκύπτει είναι ανάλογη του g^2 δηλαδή καταπιέζεται με ρυθμό $1/N$ στο όριο του 't Hooft έτσι ώστε για αποσβένουσες μάζες κουάρκ και το \mathbf{n}' τείνει να γίνει άμαζο για μεγάλο- N . Ως συνέπεια το φάσμα της QCD κατά t'Hooft απαρτίζεται από άμαζα (ελαφρά) κουάρκ n_f και ελαφρά ψευδομονόμετρα μεσόνια n_f^2 καθώς ψευδό Nambu – Goldstone μποζόνια συνδέονται με το δυναμικό σπάσιμο των αξονικών συμμετριών.

Καθώς γενικά οι μάζες των άλλων αδρονίων διαχωρίζονται από αυτές με ένα μικρό χάσμα, οι χαμηλής ενέργειας QCD μπορούν να μοντελοποιηθούν από τη θεωρία διαταραχών της χειρός (χPT) [91, 92, 93, 94, 95] που είναι μία αποτελεσματική θεωρία που περιγράφει τα ελαφρά μεσόνια. Υποθέτοντας ότι η θεωρία έχει $n_f = 3$ ελαφρές γεύσεις κουάρκ, μπορούν να περιληφθούν αποτελεσματικά στους όρους ενός πεδίου $\mathcal{U}(x)$ που περιγράφεται ως:

$$\mathcal{U} = \exp(i\sqrt{2}\Phi/F) \quad (14)$$

όπου οι τιμές του Φ είναι γραμμικοί συνδιασμοί των πεδίων των μεσονίων [96]. Σύμφωνα με το συνήθη σχεδιασμό η λαγκρανζιανή \mathcal{L}_{eff} που περιγράφει το \mathcal{U} πρέπει να είναι συμβατή με τις γενικές συμμετρίες της QCD ακόμα μπορεί να περιλαμβάνει ζεύγη του Ερμιτιανού πίνακα για τα πεδία L_a , R_a , S και P , για να συνυπολογίζονται η μάζα των κουάρκ, ηλεκτρομαγνητικές και ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Καθορίζοντας την $\partial_a \mathcal{U} = \partial \mathcal{U} - i R_a \mathcal{U} + i \mathcal{U} L_a$ και $\tilde{\chi} = 2B_0(S + iP)$, είναι δυνατόν να οργανωθεί η πιο γενική έκφραση για το \mathcal{L}_{eff} σύμφωνα με τον αριθμό των παραγώγων που περιέχει. Η πιο απλοποιημένη μορφή σε παραγώγους και μάζες κουάρκ είναι:

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{F^2}{4} \text{Tr} \left(\tilde{\partial}^a \mathcal{U}^\dagger \tilde{\partial}_a \mathcal{U} + \tilde{\chi}^\dagger \mathcal{U} + \mathcal{U}^\dagger \tilde{\chi} \right), \quad (15)$$

και περιλαμβάνει δύο χαμηλής ενέργειας σταθερές. Την Φ που μπορεί να θεωρηθεί ως σταθερά διάσπασης του μεσονίου, ενώ B_0 είναι ανάλογος της συγκέντρωσης κουάρκ [97]. Να σημειώσω ότι $F^2 \sim f_\pi^2 = O(N)$, άρα η \mathcal{L}_{eff} είναι $O(N)$, και άρα για $N \rightarrow \infty$ [98, 99, 100, 101] η διαγραμματική προσέγγιση της θεωρίας γίνεται ακριβής. Ακόμα, καθώς ο ορισμός του \mathcal{U} σε όρους πεδίων μεσονίου περιέχει επίσης τον όρο $1/F$, η ανάπτυξη του \mathcal{U} παράγει αντιδράσεις μεσονίων που καταπιέζονται από δυνάμεις τάξης $N^{-1/2}$ στο όριο του 't Hooft. Έτσι για μεγάλο N η χPT μπορεί να θεωρηθεί ως ένας συνεπής συνδιασμός αναπτυγμάτων δυνάμεων $1/N$, των τετραγώνων των ορμών και των μαζών των κουάρκ [102, 103, 104].

Η ανάπτυξη της \mathcal{L}_{eff} με διόρθωση πρώτης προσέγγισης περιλαμβάνει άλλες 10 χαμηλής ενέργειας σταθερές. Οι αριθμητικές τους τιμές που προσδιορίζονται χρησιμοποιώντας πειραματικά αποτελέσματα από διάφορες διασπάσεις [105, 106] συμφωνούν με τις προβλέψεις των υπολογισμών για μεγάλο N που προβλέπουν κάποιοι από αυτούς να ακολουθούν $O(N)$ και κάποιοι άλλοι $O(1)$. Συνδιάζοντας τη χειραλική θεωρία διαταραχών με τις ιδιότητες για μεγάλο N είναι εφικτό να διερευνηθεί η φύση των διαφορετικών μεσονίων. Ακόμα το όριο για μεγάλο N επιτρέπει καλύτερη συμφωνία των προβλέψεων της θεωρίας διαταραχών της QCD στις υψηλές ενέργειες με προβλέψεις της χPT για τις χαμηλές ενέργειες [107, 108]. Άλλες επιπτώσεις του μεγάλου N που σχετίζονται με τα μεσόνια μπορούν να προκύψουν από τις ηλεκτρασθενείς διεργασίες στις χαμηλές ενέργειες [109, 110, 111, 112, 113, 114]. Υπάρχει ακόμα ένας αριθμός εργασιών [115, 116, 117] που πραγματεύονται την αίσθηση ότι η QCD στα μεγάλα N περιέχει μία θεωρητική επιβεβαίωση για υπολογισμούς διαφόρων φυσικών ποσοτήτων στο πλαίσιο της κυριαρχίας του μοντέλου των διανυσματικών μεσονίων [118]. Τέλος, στη βιβλιογραφία υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός εργασιών που μελετούν τις ιδιότητες των μεσονίων κάνοντας χρήση ολογραφικών μεθόδων [119], όπως θα αναφερθώ παρακάτω.

1.4 Φαινομενολογικές επιπλοκές του μεγάλου N στα βαρυόνια

Οι βασικές ιδιότητες των βαρυονίων στο όριο του 't Hooft είναι γνωστές εδώ και

τρεις δεκαετίες [120]. Τα βαρυόνια χαρακτηρίζονται ως τελείως αντισυμμετρικές, ά-χρωμες καταστάσεις αποτελούμενες από N κουάρκ και επομένως, σε αντίθεση με τα μεσόνια, τα διαγράμματα *Feynman* που τα αναπαριστούν εξαρτώνται από το N . Άλλη διαφορά σε σχέση με τα μεσόνια είναι ότι οι βαρυονικές μάζες είναι ανάλογες του $O(N)$ διότι τα βαρυόνια δέχονται συνεισφορές από τα κουάρκ που τα αποτελούν, από τις κινητικές τους ενέργειες (και τα δύο ανάλογα του N) και από την ισοδύναμη ενέργεια που σχετίζεται με αντιδράσεις κουάρκ-κουάρκ. Για κάθε ζεύγος κουάρκ η δύναμη της αλληλεπίδρασης είναι ανάλογη του g^2 δηλαδή ανάλογη του N^{-1} , ενώ ο αριθμός των διαφορετικών ζευγών κουάρκ είναι ανάλογος του N^2 άρα το γινόμενο τους είναι $O(N)$.

Για να πάρουμε μία ποσοτική εικόνα της θεμελιώδους κατάστασης της ενέργειας των βαρυονίων στο όριο του 't Hooft, μπορούμε να μελετήσουμε τη Χαμιλτονιανή προσέγγιση για το βαρυόνιο στο μεγάλο N και να επιδιώξουμε μια προσεγγιστική λύση της μορφής Hartree-Fock που να βασίζεται στην ιδέα ότι το συνολικό δυναμικό που "αισθάνεται" κάθε κουάρκ μπορεί να θεωρηθεί ως υπόβαθρο, που προκύπτει από την αλληλεπίδραση όλων των άλλων κουάρκ εντός του βαρυονίου. Παρότι αυτή η προσέγγιση δεν οδηγεί σε ακριβή αναλυτική λύση για το φάσμα των βαρυονίων στο μεγάλο N αποκαλύπτει ότι παρότι η μάζα του βαρυονίου είναι $O(N)$ η κατανομή του φορτίου είναι ανεξάρτητη του αριθμού των χρωμάτων στο όριο του 't Hooft.

Τα επιχειρήματα που βασίζονται στους κανόνες καταμέτρησης στα μεγάλα N δείχνουν επίσης ότι το πλάτος της σκέδασης βαρυονίου-βαρυονίου ή αντιβαρυονίου-βαρυονίου ακολουθεί την $O(N)$, άρα είναι της ίδιας τάξης όπως η βαρυονική μάζα. Η σκέδαση βαρυονίου-μεσονίου, αντίθετα, είναι $O(1)$ επομένως η διαδικασία αυτή δεν επηρεάζει την κίνηση του βαρυονίου αλλά μόνο αυτή του μεσονίου του οποίου η τάξη είναι επίσης $1/N$.

Τέλος, υπάρχουν φυσικές διεργασίες που περιλαμβάνουν βαρυόνια τα οποία απουσιάζουν -από όλες- τις τάξεις του αναπτύγματος για μεγάλο- N . Ένα παράδειγμα είναι η παραγωγή ζεύγους βαρυονίου-αντιβαρυονίου από υψηλής ενέργειας αλληλεπιδράσεις ζευγών λεπτονίου-αντιλεπτονίου. Αυτή η διαδικασία εξελίσσεται μέσω ενός ενδιάμεσου φανταστικού φωτονίου το οποίο με τη σειρά του δημιουργεί το ζεύγος κουάρκ-αντικουάρκ. Επομένως προκειμένου να δημιουργηθεί το ζεύγος βαρυονίου-αντιβαρυονίου στην τελική κατάσταση πρέπει αυτή η διαδικασία να επαναληφθεί N φορές και η πιθανότητα αυτό να συμβεί είναι e^{-N} . Αυτή η εξάρτηση από το N δε μπορεί να φανεί ποτέ στο ανάπτυγμα δυνάμεων N^{-1} , άρα η φυσική διαδικασία αυτή απουσιάζει από όλες τις τάξεις της QCD μεγάλου N . Όμοια, οι διεργασίες εξαύλωσης βαρυονίου-αντιβαρυονίου σε ζεύγος λεπτονίων και σκέδασης λεπτονίου-βαρυονίου που είναι επίσης εκθετικά συμπίεσιμες κατά N ως αντισυμμετρικές του προηγούμενου παραδείγματος.

Τα παραπάνω αποκαλύπτουν μία ενδιαφέρουσα αναλογία [121] μεταξύ του αναπτύγματος $1/N$ και του συνήθους αναπτύγματος της ασθενούς σύζευξης για την κβαντική ηλεκτροδυναμική (QED), με τα μεσόνια και τα βαρυόνια να παίζουν ρόλους ανάλογους των ηλεκτρονίων και των 't Hooft-Polyakov μονόπολων αντίστοιχα. Όντως τα ηλεκτρόνια είναι οι φυσικές καταστάσεις στην QED και οι αλληλεπιδράσεις τους μπορούν επιτυχώς να μελετηθούν σε ένα ανάπτυγμα διαταραχών σε δυνάμεις της $\alpha = e^2/(4\pi)$, και οι μάζες τους είναι ανεξάρτητες του e δηλαδή ακολουθούν $O(e^0)$. Τα μονόπολα 't Hooft-Polyakov από την άλλη δεν εμφανίζονται ως στοιχειώδη αντικείμενα ή σαν απλές δέσμιες καταστάσεις στη θεωρία, ούτε εμφανίζονται στα διαγράμματα Feynman αλλά σαν συγκεκριμένες τοπολογικές λύσεις. Οι μάζες τους είναι αντίστροφα ανάλογες του α_{QED} και για μικρό α_{QED} η δομή τους μπορεί να μελετηθεί από κλασικές εξισώσεις (στις οποίες το α_{QED} απαλείφεται

δίνοντας αποτελέσματα για το μέγεθος και τη δομή των μονόπολων, ανεξάρτητα της σταθεράς). Ακόμα, τόσο η σκέδαση μεταξύ μονόπολων όσο και η σκέδαση ενός ηλεκτρονίου εκτός του μονοπόλου είναι διεργασίες καλώς-ορισμένες με μη-μηδενικά όρια για $\alpha_{QED} \rightarrow 0$. Διαδικασίες όπως η παραγωγή ζευγών μονοπόλου-αντιμονοπόλου μέσω εξαύλωσης ζεύγους ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου δεν περιγράφονται από καμίας τάξης ανάπτυγμα της QED για την ασθενή σύζευξη. Συνεπώς όλα τα παραπάνω φαινομενολογικά στοιχεία υποδηλώνουν ποιτικές ομοιότητες με την περιγραφή των μεσονίων και των βαρυονίων στο ανάπτυγμα $1/N$.

Μία ενδιαφέρουσα πρόβλεψη για το φάσμα των βαρυονίων διαφορετικού spin J προτάθηκε για πρώτη φορά σε σχέση με το μοντέλο *Skyrme*. Ο "υπέρλεπτος διαχωρισμός" μεταξύ των μαζών αυτών των καταστάσεων πρέπει να περιγραφούν σε όρους του φάσματος των στρωφών:

$$M = c_1 N + c_2 \frac{J(J+1)}{N} + O(1/N^2) \quad (16)$$

Άλλη σημαντική ιδιότητα του μεγάλου N στη φαινομενολογία των βαρυονίων που βρέθηκε στα 1980's [122, 123] είναι ο καθορισμός της δομής ομάδας βαρυονίων και η σχέση της με το $SO(3)$ χειραλικό μοντέλο και με το μοντέλο κουάρκ [124-129]. Τα βαρυόνια για μεγάλο N μπορούν να θεωρηθούν σαν χειραλικές "ατέλειες" του μοντέλου *Nambu–Jona–Lasinio* [130-131].

Αργότερα έγινε πιο φανερό, ότι συνδιάζοντας τους κανόνες υπολογισμού για μεγάλο N με τις συνθήκες που εξασφαλίζουν μοναδιαίους τελεστές, είναι εφικτό να εξάγουμε ποσοτικές προβλέψεις για αρκετά βαρυονικά σωμάτια και να οργανώσουμε τα αναπτύγματα που τα περιγράφουν με συστηματικό τρόπο [130-134]. Αυτή η δυνατότητα προκύπτει από το γεγονός ότι μια κοινή $SU(2n_f)$ συμμετρία του spin με τη γεύση αναδύεται για τα βαρυόνια στα μεγάλα N .

Ένας απλός τρόπος για να δείξουμε πως προκύπτουν αυτές οι προβλέψεις είναι ο ακόλουθος. Σε πρώτη τάξη, η σύζευξη του μεσονίου σε βαρυόνιο γίνεται με την εισαγωγή ενός φερμιονικού διγραμμικού σε μία από τις γραμμές κουάρκ του βαρυονίου, κάτι το οποίο μπορεί να γίνει με N διαφορετικούς τρόπους. Όπως είπαμε και στην προηγούμενη παράγραφο τα φερμιονικά διγραμμικά δημιουργούν μεσόνια με πλάτος $O(N^{1/2})$, και κατά συνέπεια η σύζευξη βαρυονίου-μεσονίου θα πρέπει να ακολουθεί τάξη $O(N^{1/2})$. Η διαδικασία σκέδασης βαρυονίου-μεσονίου όμως μπορεί να προκύψει από την είσοδο δύο φερμιονικών διγραμμικών στις γραμμές που απεικονίζουν το ζεύγος κουάρκ του βαρυονίου. Αν εισαχθούν στην ίδια γραμμή τότε η διαδικασία μπορεί να συμβεί με N διαφορετικούς τρόπους, εναλλακτικά υπάρχουν $O(N^2)$ πιθανότητες να εισαχθούν σε διαφορετικές γραμμές, αλλά τότε προκειμένου να μεταφέρεται ενέργεια από το εισερχόμενο μεσόνιο στο εξερχόμενο, ένα γλουόνιο θα πρέπει να ανταλλάσσεται μεταξύ των δύο βαρυονικών χβαντικών γραμμών και αυτό εισάγει έναν επιπλέον παράγοντα g^2 και μειώνει το όλο πλάτος της διαδικασίας κατά ένα παράγοντα τάξης N . Τέλος λαμβάνοντας υπόψη ότι κάθε ζεύγος βαρυονίου-μεσονίου είναι $O(N^{1/2})$ τελικά παίρνουμε για την όλη διαδικασία σκέδασης βαρυονίου-μεσονίου πλάτος $O(1)$.

Από τη σκοπιά της κινηματικής, κατά τη σκέδαση ενός μεσονίου του οποίου η μάζα είναι $O(1)$ από ένα βαρυόνιο του οποίου η μάζα είναι $O(N)$ το βαρυόνιο μπορεί να θεωρηθεί στατικό, και η διαδικασία μπορεί να ερμηνευθεί ως απορρόφηση ενός εισερχόμενου μεσονίου,

ακολουθούμενη από την εκπομπή ενός σχεδαζόμενου μεσονίου. Καθώς η σύζευξη του βαρυονίου τόσο με το εισερχόμενο όσο και με το εξερχόμενο μεσόνιο είναι τάξης $O(N^{1/2})$ το πλάτος της συνολικής διαδικασίας πρέπει να είναι ανάλογο του N . Αυτό ωστόσο θα παραβίαζε τη μοναδικότητα του τελεστή και θα ήταν ασύμβατο με το γεγονός ότι η σκέδαση βαρυονίου-μεσονίου ακολουθεί τάξη $O(1)$. Το παράδοξο μπορεί να επιλυθεί αν θεωρήσουμε ότι υπάρχουν αλληλοαναιρέσεις μεταξύ των διαγραμμάτων σκέδασης βαρυονίου-μεσονίου και αυτό οδηγεί σε ένα σύνολο συνθηκών συμβατότητας για τις αλληλεπιδράσεις βαρυονίου-μεσονίου για μεγάλα N [135-137].

Η διαδικασία σκέδασης πιονίου-νουκλεονίου σε χαμηλές ενέργειες στο χειραλικό όριο, μας δίνει ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα, την απορρόφηση ενός πιονίου από ένα στατικό νουκλεόνιο, $\mathcal{N} + \pi \rightarrow \mathcal{N}'$, όπου μπορεί να περιγραφεί από τη φόρμουλα:

$$cN \frac{\partial_i \pi}{f_\pi} (X^{ia})_{\mathcal{N}\mathcal{N}'}, \quad \mu\epsilon: \quad (X^{ia})_{BB'} = \frac{\langle B' | (\bar{\psi} \gamma^i \gamma_5 \tau^a \psi) | B \rangle}{cN}, \quad (17)$$

όπου ο συνολικός παράγοντας N , μαζί με την τυχαία αλλά εξαρτώμενη από το N σταθερά κανονικοποίησης c , έχει εξαχθεί από το ισοδιανυσματικό βαρυονικό ονικό ρεύμα, έτσι ώστε το X^{ia} να έχει πεπερασμένο όριο για $N \rightarrow \infty$. Για μεγάλο N οι πρώτης τάξης συνεισφορές για τη σκέδαση βαρυονίου-πιονίου προέρχονται από τη διαφορά των δύο τριεπίπεδων διαγραμμάτων, δηλαδή ένα νουκλεόνιο είτε μπορεί να μεταβεί στην διεγερμένη κατάσταση \mathcal{N}' πρώτα μέσω της απορρόφησης ενός εισερχόμενου πιονίου και μετά διάσπαση πίσω στη βασική κατάσταση μέσω εκπομπής εξερχόμενου πιονίου, είτε ανάποδα. Απαιτώντας το συνολικό πλάτος της σκέδασης να είναι τάξης $O(1)$, καταλήγουμε στον εθαναγαχασμό:

$$N[X^{ia}, X^{jb}] \leq O(1) \quad (18)$$

Αναπτύσσοντας τον τελεστή X^{ia} σε δυνάμεις του $1/N$:

$$X^{ia} = X_0^{ia} + \frac{1}{N} X_1^{ia} + \frac{1}{N^2} X_2^{ia} + \dots \quad (19)$$

όπου η προηγούμενη ανισότητα επιβάλλει περιορισμούς στους διαφόρους όρους του αναπτύγματος και συγκεκριμένα στον πρώτο όρο πρέπει να έχουμε:

$$[X_0^{ia}, X_0^{ja}] = 0 \quad (20)$$

όπου η τελευταία εξίσωση μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο αν εκτός του νουκλεονίου υπάρχουν και ενδιάμεσες καταστάσεις με όμοια μάζα. Καθώς το πiónιο ζευγαρώνοντας με το νουκλεόνιο μπορεί επίσης να παράξει βαρυόνιο με σπιν και ισοσπίν ίσα με $3/2$, δηλαδή είναι Δ βαρυόνιο, οι συνθήκες για μεγάλο N επιβάλλουν ένα περιορισμό που συσχετίζει το $g_{\pi NN}$ με το $g_{\pi N\Delta}$. Το ίδιο επιχείρημα μπορεί να εφαρμοστεί στη διαδικασία σκέδασης $\Delta + \pi \rightarrow \Delta + \pi$, υποδεικνύοντας την ύπαρξη (τουλάχιστον για μεγάλο N) ενός βαρυονίου με την ίδια μάζα όπως τα N και Δ και τους ίδιους χβαντικούς αριθμούς $J = I = 5/2$ και τοποθετώντας μια σταθερά μεταξύ των αντίστοιχων συζεύξεων. Το συμπέρασμα είναι ότι η συνθήκη συμβατότητας της εξίσωσης (20) υπονοεί την ύπαρξη ενός άπειρου αριθμού εκφυλισμένων βαρυονίων με $J = I = k + 1/2, \forall k \in \mathbb{N}$ και καθορίζει τις συζεύξεις τους με το πiónιο, πέραν της σταθεράς κανονικοποίησης c .

Η εξίσωση (20) μπορεί να θεωρηθεί και ως υποάλγεβρα μίας $su(4)$ άλγεβρας σπιν-γέυσης (ή $su(2n_f)$ στην περίπτωση όπου έχουμε n_f γεύσεις ελαφρών κουάρκ). Ως τελεστές X_0^{pa} μπορούν να θεωρηθούν στο μεγάλο N οι γεννήτορες $su(4)$ που αναμειγνύουν το σπιν με την γέυση. Να σημειωθεί ότι η ανάδειξη μίας τέτοιας συμμετρίας, αναμειγνύοντας εσωτερικούς και λορεντζιανούς βαθμούς ελευθερίας, είναι εφικτός επειδή στο όριο για μεγάλο N τα βαρυόνια γίνονται απείρως βαριά και εξ' αυτού στατικά. Οι μη-αναγώγιμες αναπαραστάσεις της άλγεβρας μπορούν να κατηγοριοποιηθούν χρησιμοποιώντας στάνταρ τεχνικές για επαγώμενες αναπαραστάσεις [138].

Πιο γενικά, καταστάσεις συμβατές με την εξίσωση (18) μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να οργανωθεί συστηματικά το ανάπτυγμα $1/N$ με θεωρητικές μεθόδους ομάδων και ταυτότητες τελεστών και να φιξαριστούν περιορισμοί στις μικρότερης τάξης διορθώσεις. Ειδικότερα για $n_f = 2$ μπορούμε να βρούμε ότι οι πρώτης τάξης διορθώσεις στη μάζα των μικρού σπιν βαρυονίων καθώς και στα αξονικά ζεύγη είναι $O(N^{-2})$ σε σχέση με το βασικό όρο. Αυτή η μέθοδος μπορεί να επεκταθεί για $n_f = 3$ ελαφρές γεύσεις και επιτρέπει να εξαχθούν προβλέψιμες θεωρητικές εκτιμήσεις για ένα σύνολο παρατηρήσεων στις οποίες περιλαμβάνονται αξονικές συζεύξεις [135, 136], μάζες [137-140], μάζες διεγερμένων καταστάσεων [144-152], τις συζεύξεις τους, και τις διασπάσεις αλλά και αυτές βαρυονίων που περιέχουν βαριά κουάρκ [153-178].

1.5 Τοπολογικές ιδιότητες της QCD για μεγάλο N

Διάφοροι τύποι βαθμωτών πεδίων, χαρακτηρίζονται από μη τετριμμένες τοπολογικές ιδιότητες, που πιστεύεται ότι παίζουν σημαντικό ρόλο στην κατανόηση της δομής του κενού στην QCD και σε άλλες θεωρίες πεδίου, περιλαμβανομένων των Αβελιανών μονόπολων [138], κεντρικών στροβιλισμών [139-142], ψευδοσωματιδίων και βιονίων [143-147]. Γενικά οι αναλυτικές περιγραφές του τρόπου με τον οποίο αυτά τα αντικείμενα επηρεάζουν τα δυναμικά, περιορίζονται μέχρι σήμερα σε ένα σύνολο ημικλασικών προσεγγίσεων.

Τα τοπολογικά αντικείμενα τα οποία έχουν τις πιο ενδιαφέρουσες ιδιότητες για μεγάλο N είναι τα ψευτοσωματίδια. Είναι λύσεις των Ευκλείδιων εξισώσεων κίνησης για πεπερασμένη δράση, που μπορούν να θεωρηθούν ως φαινόμενα "σήραγγος" μεταξύ των τοπολογικά ανισοδύναμων κλασικών κενών της θεωρίας, που κατατάσσονται από έναν δείκτη *Pontryagin* παίρνοντας τιμές στην τρίτη ομοιοτοπική ομάδα της βαθμίδας: $\pi_3(SU(N)) = \mathbb{Z}$. Η σχέση τους στο όριο του 't Hooft έχει μελετηθεί από τη δεκαετία του '70 [148, 149,

150] και ακόμα είναι σημείο ενδιαφέροντος [151].

Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 1.2 στην QCD με n_f άμαζα κουάρκ, η γενική Αβελιανή αξονική συμμετρία, παρουσιάζει ανωμαλίες, εξαιτίας της μη-αναλλοιωτότητας στη μέτρηση του φερμιονίου (εναλλακτικά μπορούμε να προσεγγίσουμε την αιτία της $U_A(1)$ ανωμαλίας, με ανάλυση διαταραχών, που δείχνει ότι η ανωμαλία προκύπτει από την υπεριώδη απόκλιση ενός τριγωνικού διαγράμματος μονού-βρόγχου για φανταστικά κουάρκ). Κατ' επέκταση η διατήρηση της $U_A(1)$ παραβιάζεται:

$$\partial_a j_A^a(x) = -2n_f q(x), \quad (21)$$

από έναν όρο ανάλογο της τοπολογικής πυκνότητας $q(x)$:

$$q(x) = \frac{g^2}{16\pi^2} \text{Tr} (\bar{F}_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)), \quad \mu\epsilon: \quad \bar{F}_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}(x). \quad (22)$$

Να σημειωθεί ότι η $q(x)$ μπορεί να γραφεί ως η απόκλιση του ρεύματος *Chern* $K^a(x)$:

$$q(x) = \partial_\mu K^\mu(x), \quad \mu\epsilon: \quad K^\mu(x) = \frac{g^2}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu^a \left(\partial_\rho A_\sigma^a - \frac{g}{3} f^{abc} A_\rho^b A_\sigma^c \right), \quad (23)$$

παρότι η $q(x)$ δίδεται από την απόκλιση του ρεύματος η χωροχρονική ολοκλήρωση, δηλαδή το "τοπολογικό ρεύμα" Q , μπορεί να πάρει μη-αποσβένουσες, ακέραιες τιμές λόγω της παρουσίας των ψευδοσωματιδίων. Γενικά η τιμή Q ενός δοθέντος βαθμωτού πεδίου είναι ίση με το δείκτη του τελεστή *Dirac*, δηλαδή, της διαφοράς μεταξύ του αριθμού των αριστερόστροφων έναντι των δεξιόστροφων "μηδενοδομών" του τελεστή του *Dirac* [151-155].

Στο όριο του 't Hooft το δεξιό μέλος της εξίσωσης (21) καθώς είναι ανάλογο του g^2 καταπιέζεται κατά ένα παράγοντα ανάλογο του $O(1/N)$ ως συνέπεια το m_n^2 πρέπει να μειώνεται ακολουθώντας $O(1/N)$ για $N \rightarrow \infty$. Επομένως στο όριο του 't Hooft περιμένουμε ότι το φάσμα του μεσονίου θα περιέχει το n_f^2 -έναντι του $(n_f^2 - 1)$ - για το άμαζο *Nambu – Goldstone* μποζόνιο.

Μελετώντας τις ταυτότητες *Ward – Takahashi* για $j_A^a(x) + 2n_f K^a(x)$ μπορούμε να εξάγουμε την *Witten – Veneziano* φόρμουλα [156, 157]:

$$m_n^2 + m_{n'}^2 = 2m_K^2 + \frac{4n_f \chi_{topol}}{f_\pi^2} \quad (24)$$

συνδέοντας την ψευδο-αναλλοίωτη μάζα του μεσονίου, την σταθερά διάσπασης του πιονίου και την τοπολογική ευαισθησία χ_{topol} που ορίζεται ως:

$$\chi_{topol} = -i \int d^4x \langle 0 | \mathcal{T} \{ q(x) q(0) \} | 0 \rangle, \quad (25)$$

όπου το \mathcal{T} υποδηλώνει χρονική σειρά.

Συνδυάζοντας τη *Witten – Veneziano* φόρμουλα της εξίσωσης (24) με την προσδοκία ότι το τετράγωνο της μάζας n' σβήνει ανάλογα του $1/N$ στο όριο του 't Hooft και με το γεγονός ότι το f_π ακολουθεί $N^{1/2}$ για $N \rightarrow \infty$, καταλήγουμε ότι η τοπολογική ευαισθησία πρέπει να έχει ένα μη-αποσβένον όριο, π.χ. $O(1)$ στο μεγάλο N . Τα παραπάνω είναι σε συμφωνία με την παραδοσιακή εικόνα του κενού στην QCD σαν ένα ημικλασσικό αέριο αραιών ψευδοσωματιδίων, σύμφωνα με την οποία η πιθανότητα ύπαρξης φαινομένων σήραγγος μεταξύ τοπολογικά διαφορετικών κενών θα πρέπει να ακολουθούν $O(\exp(-8\pi/g^2))$. Συγκεκριμένα η πυκνότητα d των ψευδοσωματιδίων μικρού μεγέθους ρ αναμένεται να είναι ανάλογη του [158, 159]:

$$d(\rho) \propto \exp \left[-\frac{8\pi^2 N}{\lambda(\rho)} \right], \quad (26)$$

δηλαδή να είναι εκθετικά φθίνουσα κατά N στο όριο 't Hooft.

Είναι ενδιαφέρον να θεωρήσουμε τα θέματα που σχετίζονται με τα τοπολογικά χαρακτηριστικά της QCD για μεγάλο N στο πλαίσιο της γενίκευσης της θεωρίας. Στο καθιερωμένο πρότυπο δεν υπάρχει κάποια θεμελιώδης συμμετρία που να απαγορεύει έναν όρο ανάλογο της τοπολογικής πυκνότητας $q(x)$ στη Λαγρανζιανή της QCD:

$$\mathcal{L}_\theta = -\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) + \sum_{f=1} n_f \bar{\psi}_f (i\gamma^a D_a - m_f) \psi_f - \theta q(x) \quad (27)$$

έτσι ώστε το χ_{topol} να μπορεί να εκφραστεί με όρους της δεύτερης παραγωγού της αντίστοιχης αποτελεσματικής δράσης σε σχέση με το θ .

Καθώς η τοπολογική πυκνότητα φορτίου είναι ψευδοαναλλοιώτη σπάει τις συμμετρίες της διακριτής ομοτιμίας (P) και της χρονικής-αντιστροφής (T). Για άμαζα κουάρκ ο όρος θ στη Λαγρανζιανή της QCD μπορεί να επαναπορροφηθεί μέσω του επανακαθορισμού των φερμιονικών πεδίων από μια γενική $U_A(1)$ στροφή. Για έμαζα κουάρκ ωστόσο μια τέτοια περιστροφή θα έκανε τις μάζες των κουάρκ περίπλοκες οδηγώντας σε φαινομενολογικές συνέπειες. Πιο συγκεκριμένα, αυτό θα εισήγαγε μια μη-αποσβένουσα ηλεκτρική διπολική ροπή για το νετρόνιο, ανάλογη του θ . Πειραματικά αποτελέσματα αυτής της ποσότητας ωστόσο [160, 161], δηλώνουν με σαφήνεια ότι αν δεν αποσβένει πλήρως η σταθερά θ , τότε σε κάθε περίπτωση θα πρέπει να είναι εξαιρετικά μικρή, ήτοι $|\theta| \leq 10^{-10}$. Αυτό το χαρακτηριστικό του θ συνήθως αποκαλείται "ισχυρό CP πρόβλημα" στο καθιερωμένο πρότυπο.

Εάν η Λαγρανζιανή περιέχει τον όρο θ όπως στην εξίσωση (27) τότε η κβάντωση του Q σε ακέραιες μονάδες υποδηλώνει ότι η ενεργειακή πυκνότητα στο κενό είναι περιοδική

κατά θ με περίοδο 2π . Ακόμα, οι κανόνες υπολογισμού για μεγάλο N , όπως αυτές συζητήθηκαν στην παράγραφο 2.1 δηλώνουν ότι η ενεργειακή πυκνότητα στο κενό θα πρέπει επίσης να είναι $O(N^2)$ για μεγάλο N . Τέλος η εξίσωση (26) δείχνει ότι στο όριο του 't Hooft η φυσική μεταβλητή είναι η θ/N που υποδηλώνει την εξάρτηση από το θ ποσοτήτων όπως η τάση χορδής (*stringtension*) και το χάσμα της μάζας (*mass gap*), που πρέπει να καταπιέζονται κατά $1/N^2$ στο όριο του 't Hooft. Ένας δυνατός τρόπος να συμβιβάσουμε αυτά τα ευρήματα είναι να υποθέσουμε ότι η βασική κατάσταση ενεργειακής πυκνότητας \mathcal{E} δίνεται από ένα ελάχιστο σύνθετο κλάσμα της παραμέτρου θ/N :

$$\mathcal{E}(\theta) = N^2 \min_{0 \leq k < N} f\left(\frac{\theta + 2\pi k}{N}\right). \quad (28)$$

Το χάσμα μεταξύ των καταστάσεων που παραπέμπουν σε διαφορετικές τιμές του k , αναμένεται να είναι ανάλογο του N , έτσι ώστε τα φαινόμενα σήραγγος να φθίνουν για μεγάλο N ούτως ώστε οι διαφορετικές ενεργειακές καταστάσεις να παραμένουν σταθερές και να μην εκφυλίζονται [162-165]. Επιπλέον για $N \gg 1$ οι ενεργειακές πυκνότητες που σχετίζονται με τις χαμηλότερες δυνατές τιμές του k στο $\theta = 0$, να μπορούν να εκφραστούν ως:

$$\mathcal{E}(0) + 2\pi^2 k^2 \chi_{topol}, \quad (29)$$

ώστε το χάσμα, σε σχέση με την βασική ενεργειακή κατάσταση, να είναι ανεξάρτητο του N . Καθώς η ουσιαστική παράμετρος κλίμακας της θεωρίας για μεγάλο N αναμένεται να είναι η θ/N , συνεπάγεται ότι, η εξάρτηση ως προς το θ ποσοτήτων όπως η ενεργειακή πυκνότητα ανά μονάδα επιφάνειας που διαχωρίζει διαφορετικά κενά ή το χάσμα της μάζας πρέπει να καταπιέζονται ακολουθώντας $1/N^2$ στο όριο του 't Hooft.

Να σημειωθεί τέλος, ότι για κάθε N η θεωρία δεν είναι μόνο *CP*-αναλλοίωτη για $\theta = 0$ αλλά και για $\theta = \pi$. Στην τελευταία περίπτωση εάν δύο εκφυλισμένα κενά που σπάνε τη *CP* υπάρχουν, τότε η συμμετρία μπορεί να σπάει αυθόρμητα, κάτι που δεν μπορεί να συμβαίνει όταν $\theta = 0$ διότι παραβιάζεται η συνθήκη του θεωρήματος *Vara – Witten* [165-171].

1.6 Θεωρίες μεγάλου N για πεπερασμένη θερμοκρασία και/ή πυκνότητα

Η προσοχή αυτής της παραγράφου θα επικεντρωθεί στην QCD για πεπερασμένη θερμοκρασία και/ή στην καθαρή πυκνότητα του βαρυονικού αριθμού σε συνθήκες θερμοδυναμικής ισορροπίας, (που είναι σχετική με την περιγραφή συγκρούσεων βαρέων ιόντων) και σε περιπλοκές που μπορούν να προκύψουν από τις ιδιότητές της για μεγάλο N .

Πρώτα απ' όλα εάν το όριο για μεγάλο N της QCD περιορίζεται σε μηδενικές ή χαμηλές θερμοκρασίες και πυκνότητες, τότε το φάσμα των φυσικών καταστάσεων αποτε-

λείται από μηδενικού σπιν καταστάσεις, δηλαδή μεσονία, γλουοσωμάτια και βαρυόνια. Ο αριθμός τους είναι $O(1)$ για $N \rightarrow \infty$, και οι μάζες των μεσονίων και γλουοσωματίων είναι επίσης $O(1)$ ενώ, οι μάζες των βαρυονίων είναι $O(N)$. Επιπλέον, οι αλληλεπιδράσεις μεσονίου-μεσονίου ακολουθούν $O(1/N)$ ενώ μεσονίου-γλουοσωματίου και γλουοσωματίου-γλουοσωματίου καταπιέζονται ακόμα περισσότερο, ακολουθώντας βήμα τάξης $O(1/N^2)$. Στα συνέπεια αυτών των ιδιοτήτων, οι ιδιότητες σε συνθήκες θερμοδυναμικής ισορροπίας για μεγάλο N αναμένεται να ακολουθούν βήμα $O(1)$ και να περιγράφονται με όρους ενός αερίου μη-αλληλεπιδρόντων μεσονίων και γλουοσωματίων. Εξ' αυτού στο θερμοδυναμικό όριο η πίεση p για μία πεπερασμένη θερμοκρασία T μπορεί να γραφεί ως:

$$p = - \sum_s \frac{n_s T}{2\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 \ln \left(1 - e^{-\sqrt{M_s^2 + q^2}/T} \right) = \sum_s \frac{n_s M_s^4}{2\pi^2} \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{T}{k M_s} \right)^2 K_2 \left(k \frac{M_s}{T} \right), \quad (30)$$

όπου η άθροιση έχει γίνει πάνω σε καταστάσεις μεσονίων και γλουοσωματίων με τον δείκτη s να υποδηλώνει είδη σωματιδίων με μάζα M_s , σπιν J_s , ισοσπίν I_s και $n_s = (2I_s + 1)(2J_s + 1)$ φυσικούς βαθμούς ελευθερίας. Να σημειωθεί ότι η εξίσωση δεν περιλαμβάνει βαρυονικές καταστάσεις, καθώς οι μάζες τους ακολουθώντας $O(N)$ οδηγούν τη συνεισφορά τους στις ποσότητες της θερμοδυναμικής ισορροπίας να φθίνουν εκθετικά κατά e^{-N} .

Από την άλλη, εξαιτίας της ασυμπτωτικής ελευθερίας [172, 173] στο όριο για $T \rightarrow \infty$ η θερμοδυναμική των μη Αβελιανών θεωριών πεδίου περιγράφεται σε όρους ενός αερίου αποτελούμενου από ελεύθερα, άμαζα κουάρκ και γλουόνια. Καθώς ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας των γλουονίων είναι $O(N^2)$ ενώ των κουάρκ είναι $O(n_f N)$, δηλαδή ανάλογος του N , τελικά στο όριο η πίεση ακολουθεί $O(N^2)$ αναλυτικότερα:

$$p = \frac{\pi^2 T^4}{180} [4(N^2 - 1) + 7Nn_f] \quad (31)$$

Προσεγγιστικά η θερμοδυναμική μίας μη-δέσμιας μη-Αβελιανής θεωρίας βαθμίδας σε όρους ενός σχετικιστικού αερίου ελεύθερων κουάρκ και γλουονίων, είναι ακριβής σε επαρκώς υψηλές θερμοκρασίες, όπου η φυσικά κινούμενη σύζευξη γίνεται ασήμαντη. Σε χαμηλότερες θερμοκρασίες, αλλά ακόμα σε πλασματώδη κατάσταση, η φυσική σύζευξη γίνεται πεπερασμένη έτσι ώστε οι διορθώσεις στο όριο των *Stefan – Boltzmann* μπορεί να εκφραστεί σε όρους αναπτύγματος θερμικής ασθενούς σύζευξης [174-180]. Είναι σημαντικό να τονιστεί, ότι σε ακόμα υψηλότερες θερμοκρασίες και για οποιονδήποτε αριθμό χρωμάτων, το πλάσμα διατηρεί κάποιες ιδιότητες της μη-διαταραγμένης κατάστασης. Ειδικότερα οι χαμηλής συχνότητας κατηγορίες είναι ισχυρά συζευγμένες για όλες τις θερμοκρασίες. Μέσω διαστατικής ελάττωσης [179, 180], οι μακρού μήκους κύματος βαθμοί ελευθερίας μίας μη-δέσμιας κατάστασης, μίας $SU(N)$ βαθμωτής θεωρίας σε υψηλές θερμοκρασίες, μπορεί να χαρτογραφηθεί ως μία δέσμια $SU(N)$ θεωρία σε τρεις διαστάσεις, πιθανόν, συνοδευόμενη από ένα συζηγές μονόμετρο πεδίο [181, 182, 183, 184]. Η τελευταία θεωρία είναι γνωστή

ως "ηλεκτροστατική QCD" (EQCD), και καλύπτει τη φυσική στις "μαλακές" κλίμακες $O(gT)$, ενώ η προηγούμενη θεωρία ονομάζεται "μαγνητοστατική" QCD" (MQCD) και περιγράφει τα φαινόμενα για "υπερμαλακές" κλίμακες ανάλογες του $O(g^2T)$.

Η μη-δέσμια κατάσταση στις υψηλές θερμοκρασίες, αναμένεται να διαχωρίζεται από τη χαμηλής θερμοκρασίας δέσμια κατάσταση, κατά μία μη-δέσμια μετάβαση που λαμβάνει χώρα σε μία πεπερασμένη θερμοκρασία T_c [181, 182, 183]. Στην $SU(N)$ Yang – Mills θεωρία, η βασική ερμηνεία της μη-δέσμιας μετάβασης είναι σε όρους αυθόρμητης κατάρρευσης της γενικής \mathbb{Z}_N συμμετρίας που συνδέεται με το κέντρο της ομάδας βαθμίδας. Στον Ευκλείδιο φορμαλισμό της θερμικής θεωρίας πεδίου, τα μποζονικά πεδία υπακούουν περιοδικές συνοριακές συνθήκες παράλληλα και τα δυναμικά Yang – Mills είναι αναλλοίωτα εάν οι θεωρίες πεδίου ικανοποιούν περιοδικές συνοριακές συνθήκες, μέχρι του σημείου ενός γενικού μετασχηματισμού στο κέντρο της θεωρίας βαθμίδας. Η προκύπτουσα ιεράρχηση είναι η γραμμή Wilson που ακολουθεί τη συμπυκνωμένη Ευκλείδια φορά του χρόνου [185, 186]:

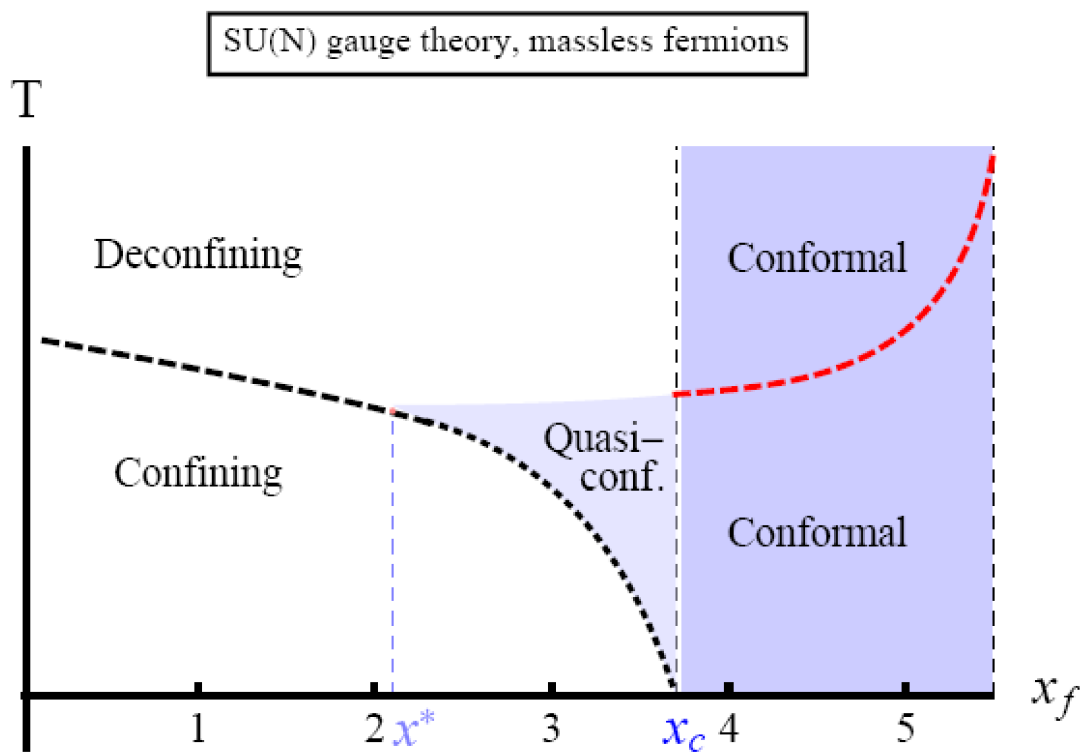
$$L(\vec{x}) = \frac{1}{N} \text{Tr} \left[\mathcal{P} \exp \left(ig \int_0^{1/T} d\tau A_\tau(\vec{x}, \tau) \right) \right] \quad (32)$$

όπου το \mathcal{P} καθορίζει τη διάταξη των δυνατών διαδρομών. Στο θερμοδυναμικό όριο (δηλαδή για άπειρο όγκο), η θερμική γραμμή Wilson καθορίζεται από την παραπάνω εξίσωση και παρουσιάζει μειούμενες αναμενόμενες τιμές στη δέσμια κατάσταση σε χαμηλή θερμοκρασία, ενώ αποκτά μη-μηδενική τιμή για υψηλές θερμοκρασίες. Γενικά, ο βρόχος Polyakov της ελεύθερης ενέργειας εξαρτάται από την αναπαράσταση του χρώματος. Έχουμε θεωρητικές προβλέψεις για την εξάρτηση αυτή και έχει μελετηθεί αναλυτικά, χρησιμοποιώντας θεωρία πλέγματος (lattice) για τους βρόχους Πολιάκοφ σε ισχυρή σύζευξη, καταλήγουμε ότι στους βρόχους Polyakov η ελεύθερη ενέργεια είναι ανάλογη της ιδιοτιμής της τετραγωνικής Casimir της αναπαράστασης. Αυτό το μοντέλο οδηγεί επίσης στην πρόβλεψη ότι όταν πλησιάσουμε στη μη δέσμια θερμοκρασία από πάνω, τότε ο βρόχος Polyakov τείνει να παίρνει τιμή $1/2$ για μεγάλο N .

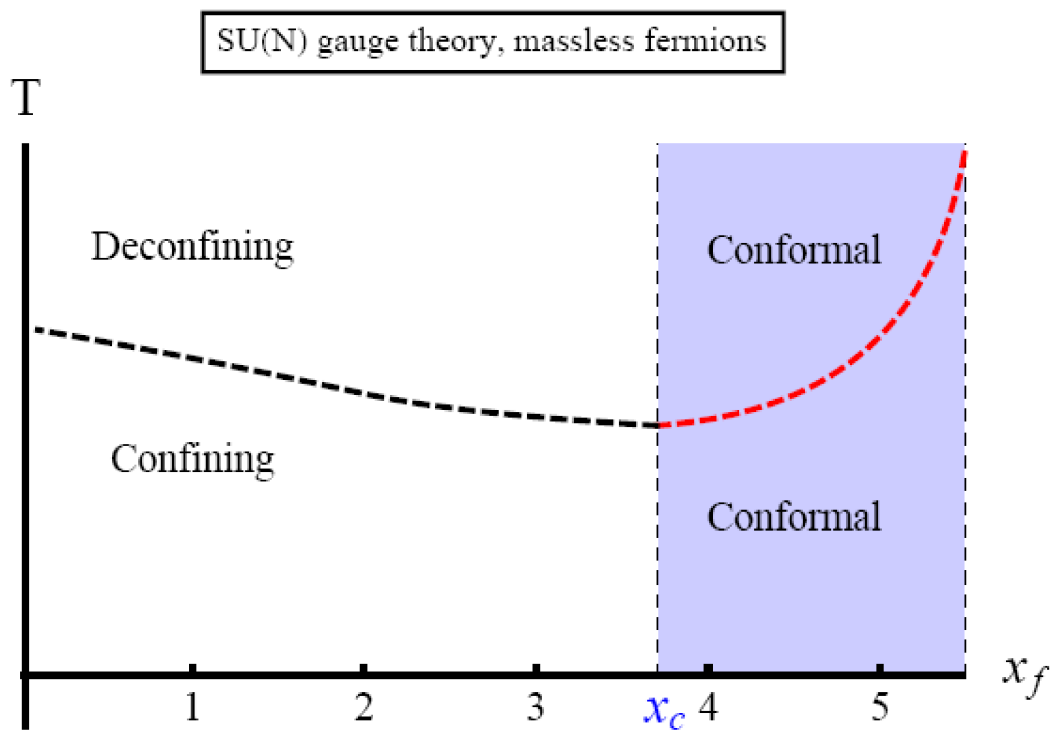
Παρότι στη QCD με $N = 3$ αριθμό χρωμάτων η κεντρική συμμετρία σπάει ρητά από τα κουάρκ στο όριο 't Hooft η θεωρία γίνεται αποσβένουσα και ως συνέπεια, η πεπερασμένη θερμοκρασίας αποδέσμευση στο μεγάλο N αναμένεται να είναι μία ουσιαστική μετάβαση. Συγκεκριμένα, επιχειρήματα που βασίζονται στη διαφορά του αριθμού των βαθμών ελευθερίας στις δύο φάσεις, συνειγορούν ότι η μετάβαση στο μεγάλο N πρέπει να είναι πρώτης τάξης με την κρυμμένη θερμότητα να ακολουθεί $O(N^2)$, αλλά η πιθανότητα και δεύτερης τάξης μετάβαση έχει επίσης συζητηθεί [187]. Πρόσφατα παρουσιάστηκε και αναλυτική μελέτη για τη φάση μετάβασης, για πεπερασμένη θερμοκρασία αποδέσμευσης στην απλή θεωρία Yang – Mills για απλές θεωρίες βαθμίδας, και την εξάρτηση της μεταβλητής θ από την κρίσιμη θερμοκρασία. Μελετώντας τη συσχέτιση μεταξύ των διαταραγμένων και των μη-διαταραγμένων αποτελεσμάτων, πρόσφατες εργασίες καταλήγουν ότι η μετάβαση είναι πρώτης τάξης για όλα τα $SU(N \leq 3)$ και δεύτερης τάξης για την ομάδα $SU(2)$ και ότι η T_c μειώνεται όταν η θ αυξάνεται.

Πέραν της αποδέσμευσης, άλλο σημαντικό φαινόμενο στην QCD για πεπερασμένη θερμοκρασία είναι η αποκατάσταση της συμμετρίας χειρός [188], που ανάλογα με τα δυναμικά του μοντέλου, μπορεί να παρουσιαστεί στην ίδια θερμοκρασία με την αποδέσμευση ή σε

υψηλότερη. Όπως είπαμε στην παράγραφο [1.2] με άμαζα κουάρκ n_f η $SU(n_f)$ σπάει ακαριαία από την ύπαρξη μίας μη-εκλειπούσας συμπύκνωσης κουάρκ ενώ η $U_A(1)$ σπάει ρητά από μία ανωμαλία, η οποία όμως καταπιέζεται στο όριο του 't Hooft. Σε υψηλές θερμοκρασίες και οι δύο συμμετρίες αναμένεται να αποκαθίστανται, όπου η αποκατάσταση της $U_A(1)$ μπορεί να καταλύει και την παρουσία φαινομένων σχετικών με την ομοτιμία και την παραβίαση της CP . Τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του διαγράμματος φάσης σε πεπερασμένη θερμοκρασία για $SU(N)$ θεωρίες με n_f γεύσεις άμαζων κουάρκ εικονίζονται στα σχήματα (2) και (3) που δείχνουν πιθανές φάσεις της $SU(N)$ σε συνάρτηση της θερμοκρασίας, όπου $\chi_f \equiv N_f/N_c$. Το σχήμα (2) αντιστοιχεί σε θεωρίες με "βηματική" συμπεριφορά ενώ το σχήμα (3) σε μη-βηματική συμπεριφορά. Με άλλα λόγια αυτά τα διαγράμματα αντιστοιχούν σε θεωρίες όπου ο μηδενισμός της β -συνάρτησης στο κάτω όριο του σύμμορφου παραθύρου είναι πρώτης ή δεύτερης τάξης. Και στις δύο περιπτώσεις για μικρό χ_f οι φάσεις της πεπερασμένης θερμοκρασίας είναι ανάλογες μίας QCD θεωρίας ενώ εντός του σύμμορφου παραθύρου δηλαδή για ($\chi_f > \chi_c$) υπάρχει μία μετάβαση φάσης μεταξύ δύο διαφορετικών φάσεων.



Σχήμα 2



Σχήμα 3

1.7 Ο ρόλος του μεγάλου N στην αντιστοιχία θεωριών βαθμίδας με τη θεωρία χορδών

Μία επέκταση ανάλογη της εξίσωσης (5) παρουσιάζεται και στη θεωρία χορδών, με τη σύζευξη g_s να αντικαθιστά το $1/N$ ως παράμετρος του αναπτύγματος των τοπολογικών σειρών. Έτσι τα επίπεδα και μη επίπεδα διαγράμματα που συνεισφέρουν στην εξίσωση (5) μπορεί να ερμηνευτεί ότι ορίζονται στον πραγματικό χώρο και όχι στον εσωτερικό χώρο της θεωρίας, οπότε μπορούμε να φανταστούμε ότι ενώ το διαταραγμένο ανάπτυγμα αναπτύσσεται σε μια σειρά διαγραμμάτων, τα οποία για κάθε πεπερασμένο όρο παραπέμπουν στο σχήμα "φαροκόκκαλου", σε έναν πλήρως μη-διαταραγμένο προσανατολισμό της θεωρίας, οι τρύπες μπορεί να κλείσουν και οι επιφάνειες των διαγραμμάτων *Feynman* μπορεί να μετατραπούν σε πραγματικές επιφάνειες ή επιφάνειες συνδεδεμένες με χορδές. Αυτή η παρατήρηση οδήγησε σε υποθέσεις ότι η θεωρία χορδών, μπορεί να οδηγήσει σε επαναφορμαλισμό της μη-Αβελιανής θεωρίας βαθμίδας, ένα ενδεχόμενο που και ο ίδιος ο 't Hooft θίγει στην πρωταρχική του εργασία. Πιο πρόσφατα, η ιδέα επανήλθε ξανά στα πλαίσια της ολογραφικής αντιστοιχίας, δηλαδή της υποτιθέμενης δυϊκότητας μεταξύ των θεωριών βαθμίδας και της θεωρίας χορδών στις περισσότερες διαστάσεις.

Για μία πρώτη ιδέα, για το πως η δυϊκότητα βαθμίδας/βαρύτητας αναδύεται και για το ρόλο του μεγάλου N σε αυτή, ας δούμε το παράδειγμα που συνδέει την $\mathcal{N} = 4 U(N)$ θεωρία *Yang – Mills* με την IIB θεωρία υπερχορδών σε δέκα διαστάσεις. Η παλιά θεωρία είναι η μαξιμαλιστική υπεσυμμετρική μη-Αβελιανή θεωρία βαθμίδας, στις τέσσερις διαστάσεις με τέσσερα υπερφορτία. Πεδιακά περιλαμβάνει το βαθμωτό πεδίο A_μ , τέσσερα φερμιόνια *Weyl* στην θεμελιώδη αναπαράσταση της \mathcal{R} -συμμετρίας, και έξι πραγματικά μονόμετρα πεδία στην αντισυμμετρική αναπαράσταση της $SU(4)$. Όλα αυτά τα πεδία μετασχηματίζονται στην αντίστροφη αναπαράσταση της ομάδας της βαθμίδας. Η θεωρία είναι αναλλοίωτη κάτω από σύμορφους μετασχηματισμούς, σα συνέπεια η θεωρία είναι βηματικά αναλλοίωτη και δεν επανακανονικοποιείται. Η IIB θεωρία υπερχορδών είναι χειραλικά υπεσυμμετρική θεωρία στις δέκα διαστάσεις με τριανταδύο υπερφορτία. Το φάσμα της περιλαμβάνει $D3$ βράνες που είναι $3+1$ -διάστατα υπερεπίπεδα στα οποία ανοικτές χορδές καταλήγουν, αλλά μπορούν επίσης να θεωρηθούν ως τοπολογικές λύσεις στο όριο της υπερβαρύτητας στη θεωρία τύπου IIB. Συγκεκριμένα ένα πακέτο N εφαπτόμενων $D3$ -βράνων είναι μια λύση της υπερβαρύτητας για την μετρική:

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^4}{r^4}}} (-dt^2 + dx^2) + \sqrt{1 + \frac{R^4}{r^4}} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (33)$$

όπου t είναι ο χρόνος, \mathbf{x}^i είναι οι χωρικές συντεταγμένες της βράνης ενώ r είναι η εγκάρσια απόσταση από τις βράνες, και το R σχετίζεται με τη σύζευξη του string (g_s) και με το μήκος (l_s) μέσω της $R^4 = 4\pi g_s N l_s^4$. Για πολύ μεγάλη απόσταση από τις βράνες δηλαδή $R \ll r$, η μετρική της εξίσωσης (33) εμπίπτει σε έναν $9+1$ -διάστατο χωροχρόνο *Minkowski*. Στο αντίθετο όριο για $R \gg r$, εισάγοντας την παράμετρο $z = R^2/r$ η γεωμετρία του χωροχρόνου ελαττώνεται στο:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (-dt^2 + d\mathbf{x}^2 + dz^2) + R^2 d\Omega_5^2, \quad (34)$$

που είναι το αποτέλεσμα του 5-διάστατου (AdS) χωροχρόνου επί την πενταδιάστατη σφαίρα $AdS_5 \times S^5$. Οι D_3 βράνες φορτίζονται από το αντισυμμετρικό πεδιακό τελεστή, και η ροή της έντασης του πεδίου εντός της S^5 σφαίρας, είναι ίση με το N δηλαδή καταμετρά τον αριθμό των $D3$ βρανών. Η αντιστοιχία βαθμίδας/χορδής αναδύεται ως μορφή της κλειστής/ανοικτής δυϊκότητας. Προκύπτει ότι τα χαμηλής ενέργειας δυναμικά του συστήματος, μπορούν να περιγραφούν τόσο σε όρους της *Dirac – Born – Infeld* χαμηλής ενέργειας δράση για ανοικτές χορδές, όσο και σε όρους βαρυτικών διεγέρσεων, δηλαδή κλειστές χορδές που διαδίδονται στον χωροχρόνο. Συγκεκριμένα, η περιγραφή σε όρους ανοικτών χορδών είναι πιο φυσιολογική όταν η $g_s N$ είναι μικρή έτσι ώστε ο χωροχρόνος να είναι σχεδόν επίπεδος. Αντίθετα όταν ο όρος είναι μεγάλος, ο χωροχρόνος είναι αρκετά καμπυλωμένος και τα χαμηλής ενέργειας δυναμικά, μπορούν να περιγραφούν ως μία υπερβαρυτική θεωρία στον αντι-*de Sitter* χωροχρόνο.

Οι παράμετροι των δύο θεωριών σχετίζονται. Συγκεκριμένα ο αριθμός των φορτίων χρώματος και η κατά 't Hooft σύζευξη στη θεωρία βαθμίδας από τη μία, το μήκος χορδής l_s , η σύζευξη, καθώς και η χωροχρονική ακτίνα R από την άλλη, συνδέονται ως εξής:

$$\lambda = \frac{R^4}{l_s^4}, \quad \frac{\lambda}{N} = 4\pi g_s \quad (35)$$

Ως συνέπεια της δεύτερης σχέσης το μεγάλο N της θεωρίας βαθμίδας, αντιστοιχεί στο όριο στο οποίο τα φαινόμενα βρόχων στη θεωρία χορδών γίνονται ασήμαντα, δηλαδή στο κλασσικό όριο χορδών. Εάν επιπλέον η σύζευξη 't Hooft της θεωρίας βαθμίδας είναι μεγάλη, τότε η θεωρία χορδών μειώνεται στο κλασσικό βαρυτικό όριο.

Η αντιστοιχία βαθμίδας/χορδών που συζητάμε συνδέει τις συμμετρίες στις δύο θεωρίες με μη τετριμμένο τρόπο:

1. η \mathcal{R} -συμμετρία της θεωρίας βαθμίδας στην $SU(4)$ είναι ισομορφική με την $SO(6)$ συμμετρία της πεντα-διάστατης σφαίρας S^5
2. η σύμμορφη αναλλοίωτη ομάδα της θεωρίας βαθμίδας είναι ισομορφική με την $SO(2, 4)$ που είναι η ομάδα συμμετρίας της AdS_5 .

Συγκεκριμένα ο τελευταίος ισομορφισμός, σχετίζεται με την φυσική ερμηνεία της ακτινικής συντεταγμένης του AdS_5 χωροχρόνου, που αντιστοιχεί στην αναρρίχηση της ενέργειας της δυϊκής θεωρίας βαθμίδας.

Η αντιστοιχία μπορεί να φορμαλιστεί σε έναν πιο ακριβή μαθηματικά τρόπο, με την συσχέτιση του γεννήτορα των συναρτήσεων *Green* στη θεωρία βαθμίδας, με την ελάχιστη δράση στην υπερβαρύτητα, με κατάλληλη επιλογή συνοριακών συνθηκών. Αυτό σημαίνει ότι η παραμόρφωση της θεωρίας πεδίου εξαιτίας ενός όρου της μορφής:

$$\int d^D x \mathcal{O}(x) \mathcal{J}(x) \quad (36)$$

όπου \mathcal{O} είναι ο τοπικός βαθμωτά αναλλοίωτος τελεστής. Μπορεί να απεικονιστεί σε μια διπλή χορδή με πεδίο όγκου \mathcal{J} που μειώνει το J στο σύνορο ενός $(D+1)$ -διάστατου χώρου (σχήμα 4):

$$\left\langle \mathcal{T} \exp \int d^D x \mathcal{O}(x) \mathcal{J}(x) \right\rangle = \exp \{-S_{\text{sugra}}[\mathcal{J}(x, r)]\}, \quad (37)$$

όπου S_{sugra} υποδηλώνει την μη-σχετικιστική κινηματικά υπερβαρυτική δράση, και:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{J}(x, r) = r^{\Delta-D} J(x). \quad (38)$$

Για αυτό το λόγο, η δυϊκότητα βαθμίδας/χορδής αποκαλείται επίσης "ολογραφική αντιστοιχία" καθώς συνδέει την περιγραφή των δυναμικών εντός ενός όγκου, με την πληροφορία που κρύβεται στο σύνορό του. Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε συσχετισμούς σύνθετων τελεστών στη θεωρία πεδίου, απεικονίζοντάς τους σε ολοκληρωτικά στον χώρο AdS

Η κατασκευή που περιγράφεται, παραπάνω μπορεί να επεκταθεί και για πεπερασμένη θερμοκρασία, μέσω περιστροφών *Wick* και επανασυμπύκνωσης της τελικής Ευκλείδιας φοράς του χρόνου. Σε αυτή την περίπτωση, η ασυμπτωτική συνοριακή γεωμετρία είναι $S^3 \times S^1$, και σε συνέχεια με την τελική (κατόπιν της περιστροφής κατά *Wick*) AdS μετρική, υπάρχει και άλλη υπερβαρυτική λύση, που περιγράφει μια $AdS-Schwarzschild$ μαύρη τρύπα:

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} [f(r)d\tau^2 + d\mathbf{x}^2] + \frac{R^2}{r^2} \left[\frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\Omega_5^2 \right], \quad f(r) = 1 - \frac{r_H^4}{r^4}, \quad (39)$$

όπου το τ αντιστοιχεί σε Ευκλείδιο χρόνο. Η συνάρτηση επιμερισμού της θεωρίας κυριαρχείται τότε από τη λύση με τη μικρότερη Ευκλείδια δράση. Να σημειωθεί ότι τότε η "μαυριδερή" συνάρτηση $f(r)$ είναι μονοτονική και τείνει στη μονάδα για $r \rightarrow \infty$ και σβήνει για $r = r_H$, που εκφράζει το σημείο στο οποίο βρίσκεται ο ορίζοντας γεγονότων της μαύρης τρύπας. Η θερμοκρασία *Hawking* του ορίζοντα είναι $T = r_H/(\pi R^2)$, και αντιστοιχεί στη θερμοκρασία της δυϊκής θεωρίας βαθμίδας. Γνωστά αποτελέσματα υπάρχουν για μεγάλο N $\mathcal{N} = 4$ για την *Yang - Mills* θεωρία σε πεπερασμένη θερμοκρασία, χρησιμοποιώντας ολογραφική αντιστοιχία συμπεριλαμβάνοντας την τιμή της πυκνότητας της εντροπίας σε ισχυρή σύζευξη:

$$\frac{s}{s_0} = \frac{3}{4} + \frac{45}{32} \zeta(3) (2\lambda)^{-3/2} + \dots \quad (40)$$

όπου $s_0 = \pi^2 N^2 T^3 / 2$ είναι η εντροπία για το ελεύθερο $\mathcal{N} = 4$ πλάσμα και η αναλογία μεταξύ της ταχύτητας η και της πυκνότητας εντροπίας:

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi}. \quad (41)$$

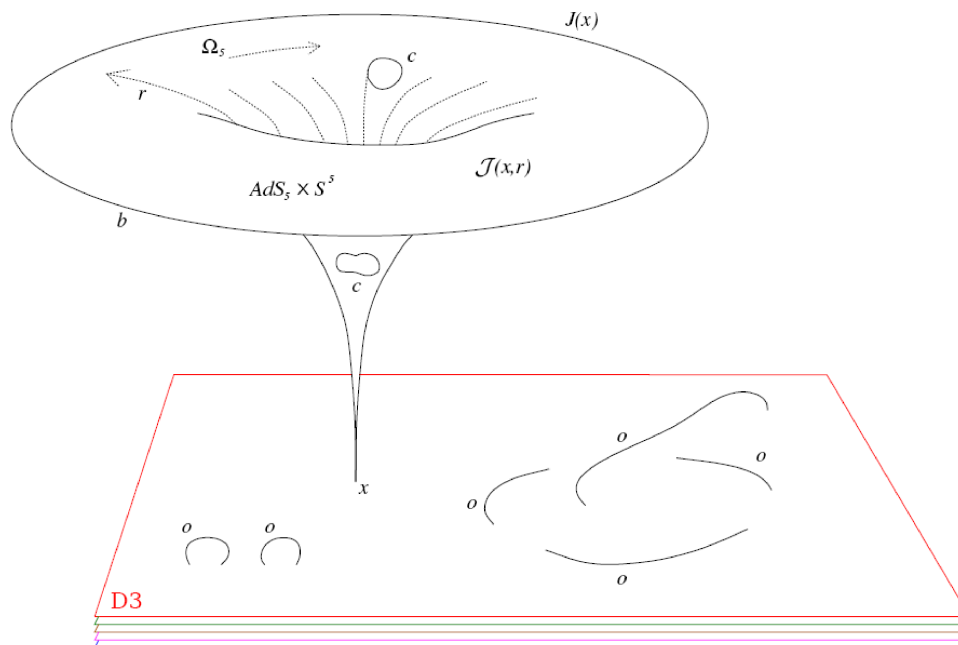
Παρότι η θεωρία για $\mathcal{N} = 4$ περιέχει μόνο πεδία στην αντίστροφη απεικόνιση της ομάδας της βαθμίδας, είναι δυνατό να μελετηθεί ουσιαστικά. Για τη θ. χορδών αυτό μπορεί να γίνει με την εισαγωγή n_f $D7$ -βράνων που αντιπροσωπεύουν τις βράνες των διαφόρων γεύσεων των κουάρκ. Τότε η θεωρία παρουσιάζει μειωμένη υπερσυμμετρία, και το φάσμα της περιλαμβάνει ανοικτές χορδές, που περιγράφονται από βράνες $D3$ έως $D7$ και αντιστοιχούν στα έμαζα κουάρκ και ανοικτές χορδές, με τα άκρα τους να βρίσκονται αποκλειστικά σε $D7$ βράνες που αντιστοιχούν στα μεσόνια της θεωρίας.

Άλλο θέμα είναι ότι η αντιστοιχισή βαθμίδας/χορδής, έχει επεκταθεί σε θεωρίες βαθμίδας ποιοτικά εγγύτερα στην QCD , περιλαμβάνοντας και μη-υπερσυμμετρικές θεωρίες με γραμμικά αυξανόμενο δέσμιο δυναμικό, σε μία προσέγγιση που στη βιβλιογραφία αποκαλείται "από πάνω προς τα κάτω" προσέγγιση. Η αντίστροφη "από κάτω προς τα πάνω" προσπαθεί να αναπαράγει τα βασικά χαρακτηριστικά των θεωριών της QCD κατασκευάζοντας ένα κατάλληλο πεντα-διάστατο βαρυτικό περιβάλλον για το δυϊκό μοντέλο.

Αυτά τα μοντέλα βαθμίδας/πεδίου, επιτρέπουν να πάρουμε μη-διαταραγμένη πληροφορία για το ισχυρά σύζευγμένο καθεστώς μίας θεωρίας πεδίου, μελετώντας κατάλληλο όριο για το δυϊκό μοντέλο χορδών. Ωστόσο παρότι και οι δύο προσεγγίσεις της παραπάνω παραγράφου έχουν επιφέρει κάποια αποτελέσματα, μία πλήρως ολομογραφική δυϊκή QCD απουσιάζει. Τα βασικά προβλήματα των ολογραφικών μοντέλων, οφείλονται στην κλασική υπερβαρυτική προσέγγιση, και περιλαμβάνουν την έλλειψη ικανοποιητικής περιγραφής της ασυμπτωτικής ελευθερίας και συγκεκριμένες διαφορές μεταξύ των τυπικώς δυναμικά παραγόμενων κλιμάκων μάζας (το γνωστό πρόβλημα του χάσματος μάζας), και της δύναμης μεταξύ των χρωμάτων σε ασυμπτωτικά μεγάλες διαστάσεις. Για την ακρίβεια η βασική δυσκολία είναι η επίδραση των μη-αμελητέων α' διορθώσεων που ευθύνονται για το πεπερασμένο της φυσικής σύζευξης στη δυϊκή θεωρία βαθμίδας. Όπως η εξίσωση (35) δείχνει σε σταθερή τιμή σύζευξης 'tHooft η σταθερά σύζευξης της θεωρίας χορδών είναι αντίστροφα ανάλογη του αριθμού των χρωμάτων της θεωρίας βαθμίδας, έτσι ώστε οι κβαντικές διορθώσεις της θεωρίας χορδών να ελαττώνονται για μεγάλο N . Επιπλέον εάν στο όριο αυτό η σύζευξη 'tHooft είναι μεγάλη, τότε το μήκος l_s της χορδής γίνεται αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα του διαστήματος στο οποίο η θεωρία ορίζεται, και τελικώς η θεωρία χορδών ουσιαστικά μειώνεται σε κλασική βαρύτητα για κατάλληλο χωροχρόνο μεγαλύτερων διαστάσεων. Αυτή η αντιστοιχία αποκαλείται στη βιβλιογραφία συχνά και ως "βαθμίδας/βαρύτητας".

Τέλος, το όριο για μεγάλο N διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο επίσης στην ολοκληρωσιμότητα της $\mathcal{N} = 4$ θεωρίας $Yang - Mills$. Ο επίπεδος τομέας της θεωρίας μπορεί να επιλυθεί (όπου λέγοντας επιλυθεί εννοούμε ότι οι διαστάσεις των παραμέτρων ανάπτυξης των τοπικών τελεστών, μπορούν να εκφραστούν αναλυτικά ως συνάρτηση της σταθεράς σύζευξης), με όρους ενός συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων που μπορούν να προκύψουν

ως συγκεκριμένο όριο των ολοκληρωτικών εξισώσεων που εξάγονται από το θερμοδυναμικό συναρτησιακό *Bethe* [189, 190, 191, 192].



Σχήμα 4: Μια απλοϊκή γραφική αναπαράσταση της αντιστοιχίας βαθμίδας/χορδών. Το σχήμα παρουσιάζει ένα σετ εφαπτόμενων *D3*-βρανών που υποστηρίζουν διεγέρσεις που περιγράφονται από ανοικτές χορδές (*o*) που περιγράφουν αλληλεπιδράσεις βαθμίδας. Οι *D3*-βράνες είναι βαριά αντικείμενα και έτσι καμπυλώνουν τις έξι επιπλέον χωροχρονικές διαστάσεις στις οποίες και ορίζονται. Για να γίνει πιο παραστατική η αναπαράσταση, παρουσιάζει μόνο ένα σχέδιο των επιπλέον διαστάσεων σε ένα δοθέν σημείο *x* των βρανών. Ξεκινώντας από αυτό το σημείο *x* η μετρική της εξίσωσης (33) δείχνει ότι σε μικρή απόσταση *ρ* από τις βράνες ($r \ll R$) η γεωμετρία του δεκαδιάστατου χωροχρόνου είναι περίπου αυτή του πεντα-διάστατου αντί-*de Sitter* (AdS_5) χωροχρόνου επί την πεντα-διάστατη σφαίρα (S^5) που στο σχήμα συμβολίζεται ως Ω_5 , ενώ για ($R \ll r$) τείνει στο δεκα-διάστατο χωροχρόνο *Minkowski*. Οι βαρυτικές διακυμάνσεις σε αυτό το χώρο περιγράφονται από κλειστές χορδές (*c*). Το σύνορο (*b*) του χωροχρόνου είναι (AdS_5) και λαμβάνεται για $r \rightarrow \infty$ που είναι σύμμορφα ισοδύναμο με τον τετραδιάστατο χώρο *Minkowski*. Η ολογραφική αντιστοιχία εκφράζεται από την εξίσωση (37) και δηλώνει ότι η εξίσωση διαμέρισης στη θεωρία χορδών με ένα χωρικό πεδίο \mathcal{J} που καταλήγει σε J στο σύνορο (μέχρι ενός παράγοντα βήματος που εκφράζεται από την εξ. (38)), είναι ισοδύναμη με τον γεννήτορα μίας θεωρίας βαθμίδας που ορίζεται στον τετρα-διάστατο χώρο *Minkowski* με το J να συζεύεται με τον βαθμωτά-αναλλοίωτο τελεστή \mathcal{O} όπως στην εξ. (36).

Κεφάλαιο 2

SU(N) θεωρίες βαθμίδας στο lattice

Για ενέργειες μεγαλύτερες του ενός GeV η QCD είναι διαταραγμένη. Εξαιτίας αυτού μια διαταραχή ανάλογη της $a_s = g^2/(4\pi)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσει φυσικές ποσότητες. Αυτή η μέθοδος είναι επιτυχής στην ερμηνεία πειραματικών δεδομένων, και είναι βασικό θεωρητικό εργαλείο για την ανάλυση δεδομένων από το LHC . Ωστόσο όταν η ενέργεια είναι μικρότερη από $1 GeV$ τότε η a_s μειώνεται αρκετά και το ανάπτυγμα της θεωρίας διαταραχών δεν είναι πλέον κατάλληλο για υπολογισμούς. Έτσι προκειμένου να εξαχθούν από βασικές αρχές φαινόμενα που δεν προσεγγίζονται από τη θεωρία διαταραχών, χρειαζόμαστε μια διαφορετική προσέγγιση. Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάστηκε το ανάπτυγμα για μεγάλο N ως ένας πιθανός τρόπος για τη συστηματική μελέτη της μη-διαταραγμένης QCD και την δυϊκότητα βαθμίδας-βαρήςτητας, ως έναν τρόπο να υπολογιστούν χαρακτηριστικά στη n -οστή δύναμη του αναπτύγματος, που αντιστοιχεί στο όριο $N \rightarrow \infty$ της θεωρίας. Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε μια συμπληρωματική θεωρία που βασίζεται σε αριθμητικούς υπολογισμούς με χρήση τεχνικών *Monte Carlo*, αφού πρώτα διακριτοποιεί το χωροχρόνο σε ένα είδος πλέγματος. Όταν πάρουμε το συνεχές όριο, αριθμητικά αποτελέσματα για τη μέθοδο του πλέγματος μπορούν να συγκριθούν με τις παρατηρήσεις για την QCD . Τεχνικές πρόοδοι στο αντικείμενο της βαθμωτής θεωρίας πλέγματος οδήγησαν στη διαπίστωση ότι, από υπολογιστικής πλευράς η QCD είναι η σωστή θεωρία για την περιγραφή των ισχυρών αλληλεπιδράσεων, αλλά και ενίσχυσαν το κύρος της μεθόδου του πλέγματος. Η πρόοδος στο αντικείμενο προώθησε ακόμη περισσότερο την ανάπτυξη της θεωρητικής κατανόησης των θεωριών βαθμίδας. Μεταξύ άλλων, αριθμητικές μελέτες του ορίου *'t Hooft* για μεγάλο N έχουν προσδώσει ένα μεγάλο αριθμό ποσοτικών αποτελεσμάτων, που με τη σειρά τους βοηθούν στην κατανόηση της θεωρίας και ταυτόχρονα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ενίσχυση των αναλυτικών προσεγγίσεων.

Στις επόμενες παραγράφους, θα επιχειρήσω να σκιαγραφήσω τα βασικά εννοιολογικά βήματα που απαιτούνται για την κατανόηση των αριθμητικών αποτελεσμάτων. Θα συζητήσω τη διακριτοποίηση του ελεύθερου μονόμετρου πεδίου και κάποιες γενικές πτυχές της ανάκτησης του συνεχούς ορίου. Την κατασκευή μεταβλητών πλέγματος για τα βαθμωτά πεδία, με τρόπο ώστε, η βαθμωτή αναλλοιωσιμότητα να διατηρείται στο διακριτό χωροχρόνο. Θα συζητήσω τέλος, πώς συνεχής φυσική για μεγάλο N εξάγεται από αριθμητικές προσομοιώσεις.

2.1 Το ελεύθερο μονόμετρο πεδίο

2.1.1 Η μέθοδος των δυνατών διαδρομών

Η προσέγγιση του πλέγματος, στηρίζεται στην κβάντωση των δυνατών διαδρομών. Ας θεωρήσουμε μια ελεύθερη μονόμετρη θεωρία που περιγράφεται από τη λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L}(\phi(x)) = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi(x)^2, \quad (42)$$

όπου ϕ είναι το μηδενικό σπιν μονόμετρο πεδίο μάζας m . Ο ευκολότερος τρόπος να κβαντωθεί αυτή η θεωρία είναι να χρησιμοποιηθεί η "κανονική" προσέγγιση. Με $x = (x_0, \vec{x})$, όπου x_0 να είναι ο προσωρινός όρος και \vec{x} είναι ο χωρικός όρος για το τετραδιάνυσμα x . Προσδιορίζουμε την ορμή $\Pi(x)$ ως:

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x))}{\partial_0 \phi(x)} \quad (43)$$

και επιβάλλουμε, τις συνήθειες ίσου-χρόνου ($x_0 = \psi_0$) σχέσεις επικοινωνίας:

$$[\phi(x), \Pi(y)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (44)$$

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\Pi(x), \Pi(y)] = 0. \quad (45)$$

Αυτή η προσέγγιση οδηγεί στο χώρο *Fock* στον οποίο οι βασικές καταστάσεις είναι πολύ-σωματιδιακές καταστάσεις, που χαρακτηρίζονται από την ορμή κάθε ξεχωριστού σωματιδίου. Εάν τώρα θεωρήσουμε μια αλληλεπίδραση που μπορεί να γραφεί ως $V(\phi) = \alpha f(\phi)$, με f ένα πολυωνυμικό με βαθμό k , για μικρό α μπορούμε να ξεκινήσουμε από την κανονική κβάντωση και να αντιμετωπίσουμε το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης, με τη μέθοδο των διαταραχών στο α . Είναι τότε εφικτό να υπολογίσουμε συστηματικά την συνάρτηση συσχέτισης, για ένα οποιοδήποτε πλήθος σημείων n :

$$\mathcal{C}_n(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)) = \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle \quad (46)$$

ως μία σειρά δυνάμεων του α . Καθώς όλα μπορούν να εκφραστούν χρησιμοποιώντας την \mathcal{C}_n όλες οι φυσικές διαδικασίες μπορούν να εκφραστούν με αυτό τον τρόπο. Η βασική φυσική υπόθεση που τονίζει το ανάπτυγμα της θεωρίας διαταραχών, είναι ότι πολυσωματιδιακές καταστάσεις καλά καθορισμένων ορμών, δίνουν μια καλή προσέγγιση των ιδιοκαταστάσεων της θεωρίας αλληλεπίδρασης, με διορθώσεις που μπορούν να αντιπροσωπευτούν από συστηματικά αναπτύγματα δυνάμεων του α . Ωστόσο στην κβαντική θεωρία πεδίου, το α δεν είναι σταθερό αλλά εξαρτάται από την ορμή. Συνεπώς, προκειμένου ο υπολογισμός να είναι σωστός, το α θα πρέπει να παραμένει μικρό για το σχετικό φάσμα των ενεργειών.

Μία εναλλακτική προσέγγιση για τον υπολογισμό της συνάρτησης συσχέτισης είναι η ολοκλήρωση διαδρομών. Σε αυτό το φορμαλισμό δίνονται από:

$$\mathcal{C}_n(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)) = \frac{\int (D\phi(x)) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{iS(\phi)}}{\int (D\phi(x)) e^{iS(\phi)}} \quad (47)$$

όπου το ϕ πρέπει να προσδιοριστεί ως κλασσικό πεδίο και το ολοκλήρωμα πρέπει να αθροίσει όλες τις πιθανές διαμορφώσεις κλασσικών πεδίων (αυτό εκφράζεται από την έκφραση $(D\phi(x))$). Η έκφραση σταθμίζεται από την έκφραση $e^{iS(\phi)}$, όπου

$$S(\phi) = \int d^4x \mathcal{L}(\phi) \quad (48)$$

είναι η δράση πάνω στο πεδίο που εκφράζεται ως $\phi(x)$. Ο παρονομαστής της παραπάνω έκφρασης

$$Z = \int (D\phi(x)) e^{iS(\phi)}, \quad (49)$$

χρειάζεται για να κανονικοποιήσει τη συνάρτηση συσχέτισης και αποκαλείται ολοκλήρωμα διαδρομής. Το πλεονέκτημα της μεθόδου της άθροισης των διαδρομών, είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης για τη θεωρία αλληλεπίδρασης, άσχετα από την τιμή της σύζευξης.

2.1.2 Το μονόμετρο πεδίο στο lattice

Σε αυτό το σημείο, η άθροιση διαδρομών είναι ακόμα μια επίσημη έκφραση, προκειμένου να μπορέσουμε να τη χρησιμοποιήσουμε, πρέπει να περιγράψουμε πώς πραγματοποιείται η ολοκλήρωση. Για αυτό το σκοπό πρώτα πραγματοποιούμε μια περιστροφή *Wick* που συνίσταται από την αλλαγή της μεταβλητής $\tau = ix_0$. Στις νέες μεταβλητές η μετρική είναι Ευκλείδεια. Για αυτό το λόγο, ο χώρος που ορίζεται από τα διανύσματα $x_E = (ix_0, \vec{x})$ καλείται Ευκλείδειος χώρος. Στον Ευκλείδειο χώρο, γράφουμε τη λαγκρανζιανή ως

$$\mathcal{L}_E(\phi) = \frac{1}{2} \partial_E^\mu \phi(x_E) \partial_{\mu,E} \phi(x_E) + \frac{1}{2} m^2 \phi(x_E)^2, \quad (50)$$

όπου η μετρική είναι η ταυτότητα, και η δράση είναι

$$S_E(\phi) = \int d^4x_E \mathcal{L}_E(\phi). \quad (51)$$

Τέλος η άθροιση διαδρομών γίνεται

$$Z_E = \int (\mathcal{D}\phi(x_E)) e^{-S_E(\phi)}. \quad (52)$$

Σε σχέση με την εξίσωση (49), εδώ η Z_E έχει το πλεονέκτημα ότι αντικαθιστά με τον αποσβαίνοντα όρο $e^{-S_E(\phi)}$ τον ταλαντευόμενο παράγοντα $e^{iS(\phi)}$ στο ολοκλήρωμα, που βελτιώνει τη σύγκλιση του ολοκληρώματος. Πραγματικού χρόνου συναρτήσεις συσχέτισης μπορούν να προκύψουν από τις συναρτήσεις συσχέτισης του Ευκλείδιου χρόνου. Από εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε μόνο σε Ευκλείδιο χρόνο και δεν θα χρησιμοποιείται ο δείκτης E . Όμοια το πεδίο ϕ και η δράση S θα αναφέρονται στον Ευκλείδιο χώρο.

Θα χρειαστεί να δώσουμε μια επιχειρησιακή απόδοση του μεγέθους $(\mathcal{D}\phi(x))$. Για αυτό το σκοπό μπορούμε να θεωρήσουμε ένα χωροχρονικό πλέγμα ακμής a και να ορίσουμε το ϕ μόνο στις κορυφές του πλέγματος, δηλαδή στα σημεία x για τα οποία $x = (n_0a, n_1a, n_2a, n_3a)$. Εάν επιβάλλουμε επίσης ότι $0 \leq n_i \leq N_i - 1$, δηλαδή το μέγεθος του πλέγματος στη i -οστή κατεύθυνση να είναι aN_i , τότε η μέτρηση της άθροισης διαδρομών, γίνεται ένα πολυδιάστατο ολοκλήρωμα. Τώρα θα αναπτύξουμε τις λεπτομέρειες της διακριτοποίησης της θεωρίας, ενώ στην επόμενη παράγραφο θα μιλήσουμε για το πως η θεωρία για το συνεχές μπορεί να εκπίψει από την διακριτή μέθοδο.

Για να πάρουμε τον άμαζο συνδιασμό, κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $\phi(i) = a\phi(ai)$, με $i = (n_0, n_1, n_2, n_3) = (n_0, \vec{n})$, με όρους με τους οποίους δηλαδή αναπαριστούμε το ελεύθερο μονόμετρο πεδίο στο *lattice*. Για αυτό το σκοπό αντικαθιστούμε το ολοκλήρωμα $\int d^4x$ με $a^4 \sum_i$ όπου το i τρέχει πάνω στις ακμές του πλέγματος και το διαφορικό του ϕ εκφράζεται ως:

$$\partial_\mu \phi(i) \rightarrow \frac{\phi(i + \hat{\mu}) - \phi(i)}{a}, \quad (53)$$

όπου $\hat{\mu}$ είναι φυσικά το μοναδιαίο διάνυσμα κατεύθυνσης μ . Τότε η δράση στο πλέγμα γίνεται

$$S = \frac{1}{2} \sum_i \left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{\mu=0}^3 \phi(i + \hat{\mu})\phi(i) + \phi(i)\phi(i - \hat{\mu}) \right) + (\hat{m}^2 + 8) \right], \quad (54)$$

όπου $\hat{m} = am$ και η άθροιση διαδρομών για τη διακριτή περίπτωση γίνεται:

$$Z = \int \left(\prod_i d\phi(i) \right) e^{-S(\phi)}, \quad (55)$$

όπου το S δίνεται από την εξίσωση (54) και το αποτέλεσμα τρέχει πάνω σε όλες τις ακμές του πλέγματος. Οι συναρτήσεις *Green* n -σημείων μπορούν εύκολα να υπολογιστούν στο χώρο των ορμών, όπου θα πρέπει να υπολογιστεί ότι οι ορμές κόβονται στο $p_{max} = \pi/a$ κάτι που στη φυσική στερεάς κατάστασης αντιστοιχεί με την πρώτη ζώνη *Brillouin*. Για παράδειγμα, για την εξίσωση των δύο σημείων, δηλαδή το διαδότη στο *lattice* έχουμε:

$$\langle \phi(l)\phi(m) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\hat{p}(l-m)}}{4 \sum_{\mu} \sin^2(\hat{p}_{\mu}/2) + \hat{m}^2} \quad (56)$$

2.1.3 Συνεχές όριο

Το ολοκλήρωμα διαδρομών στο πλέγμα, είναι ταυτόσημο με την συνάρτηση επιμερισμού ενός στατιστικού συστήματος με $N_1 N_2 N_3 N_4$ βαθμούς ελευθερίας και Χαμιλτονιανή S . Το πρόβλημα της επανάκτησης του ορίου για άπειρο όγκο του αρχικού συστήματος, καταλήγει ως ένα πρόβλημα εφαρμογής του θερμοδυναμικού ορίου στο προκύπτων στατιστικό σύστημα. Αυτή η χαρτογράφηση επιτρέπει τα τυπικά χαρακτηριστικά της στατιστικής μηχανικής, να μεταφερθούν στη θεωρία πεδίου του *lattice*. Παρότι δεν θα επεκταθώ περισσότερο, το εν λόγω θέμα παρουσιάζει σημαντική βιβλιογραφία.

Όταν έχουμε εκτελέσει τη μεθοδολογία για τον άπειρο όγκο, τότε μπορούμε να επανέλθουμε στο συνεχές όριο, παίρνοντας το βήμα του πλέγματος a να τίνει στο μηδέν. Στο κλασσικό όριο, αυτό υποδηλώνει ότι η διακριτή δράση θα πρέπει να αναπαράγει τη συνεχή δράση στο όριο $a \rightarrow 0$. Αυτή η απαίτηση εκπληρώνεται εύκολα καθώς η δράση στο πλέγμα κατασκευάζεται ως αφελής διακριτοποίηση της συνεχούς δράσης. Για την κβαντική θεωρία, χρειάζεται συστηματικά να υπολογίσουμε όλες τις συναρτήσεις n -σημείων του πλέγματος και να δείξουμε ότι συγκλίνουν στις συνεχείς συναρτήσεις όταν $a \rightarrow 0$. Καθώς η κβαντική θεωρία πεδίου είναι μοναδικώς ορισμένη από τις συναρτήσεις n -σημείων, αυτό είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι η θεωρία πεδίου στο *lattice* αναπαράγει την επιθυμητή θεωρία πεδίου στο συνεχές όριο. Η διαδικασία αυτή είναι ταυτολογική. Παρόλα αυτά, δεν υπάρχει εγγύηση ότι η θεωρία πλέγματος που λαμβάνεται από μια οποιαδήποτε διακριτοποίηση της ολοκλήρωσης διαδρομών, περιγράφει την επιθυμητή θεωρία πεδίου στο συνεχές όριο.

Ας μελετήσουμε την περίπτωση της αλληλεπιδρούσας θεωρίας. Όταν η θεωρία διακριτοποιηθεί στο πλέγμα, οι παρατηρήσεις εξαρτώνται από τις αδιάστατες συζεύξεις (\hat{m}, a, \dots) , που με τη σειρά τους είναι συναρτήσεις στο *lattice*. Εάν τώρα πάρουμε τη χαμηλότερη μάζα του φυσικού φάσματος M , εάν το συνεχές φάσμα υπάρχει, θα πρέπει να έχουμε

$$\lim_{a \rightarrow 0} \hat{M}/a = M, \quad (57)$$

όπου $1/\hat{M}$ μπορεί να θεωρηθεί ως το μήκος συσχέτισης, σε αδιάστατες μονάδες, του στατιστικού συστήματος που συνδέεται με την συστηματική χβαντική θεωρία πεδίου. Στη γλώσσα της στατιστικής μηχανικής, το να προσεγγίσουμε το συνεχές όριο σημαίνει να βρούμε τις τιμές των συζεύξεων για τις οποίες το σύστημα γίνεται κρίσιμο. Αυτό σημαίνει ότι το μήκος συσχέτισης του συστήματος είναι πολύ μεγαλύτερο από το μήκος ακμής του πλέγματος a , που σημαίνει ότι το σύστημα χάνει τη 'μνήμη' της διακριτοποίησης. Γενικότερα το κατά πόσο οι τιμές της σύζευξης υπάρχουν έτσι ώστε το σύστημα να είναι κρίσιμο είναι ένα δυναμικό πρόβλημα. Εάν αυτό συμβεί, μπορεί να μην είναι άμεση η ταυτοποίηση της προκύπτουσας χβαντικής θεωρίας πεδίου στο υπέρυθρο, καθώς αυτό καθορίζεται από την τιμή των συναρτήσεων των n -σημείων στο κρίσιμο σημείο. Για $SU(N)$ θεωρίες βαθμίδας, εξαιτίας της ασυμπτωτικής ελευθερίας το σύστημα είναι κρίσιμο στο υπεριώδες σημείο όπου η θεωρία γίνεται διαταραγμένη. Συνεπώς, το lattice περιλαμβάνει ένα τρόπο να συστηματοποιήσει τη θεωρία στο υπεριώδες και μεταφέροντας το υπεριώδες κριτήριο α αντιστοιχεί σε μια πολύ καλώς ορισμένη επανακανονικοποιημένη διαδικασία στην οποία μια υπέρυθρη κλίμακα (π.χ. η τάση της χορδής στην περίπτωση της καθαρής βαθμωτής περίπτωσης ή η μάζα του ρ μεσονίου υπό την παρουσία δυναμικών κουάρκ) είναι καθορισμένη και όλες οι φασματικές ποσότητες καθορίζονται με όρους αυτής της κλίμακας. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι διαφορετικοί τρόποι για να θέσουμε το πλέγμα, με όρους διαφορετικών φυσικών παρατηρήσεων, μπορεί να οδηγήσει σε ελαφρά διαφορετικά αποτελέσματα σε πεπερασμένες τιμές του χώρου πλέγματος, επειδή διαφορετικές παρατηρήσεις μπορούν να επηρεαστούν από διαφορετικά αντικείμενα του πλέγματος.

Αυτό θα έδινε μια πιο αυστηρή τοποθέτηση της χβαντικής θεωρίας πεδίου από την κανονική χβαντοποίηση, η οποία έχει το πρόβλημα του καθορισμού της θεωρίας, αρχίζοντας από το διαταραγμένο κενό τύπου *Fock*, που είναι πολύ μακριά από το πραγματικό κενό της *QCD*. Με την ίδια έκφραση, χρησιμοποιώντας το πλέγμα, μπορούμε με αυστηρότητα να καθορίσουμε το όριο του μεγάλου- N με τρόπο ανάλογο του 't Hooft στην $SU(N)$ για τις θεωρίες βαθμίδας, καθώς η θεωρία καθορίζεται από όλα τα σημεία συσχέτισης n τον αριθμό όταν παίρνουμε αυτό το όριο. Σε αυτή τη μέθοδο, το πλέγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξει την ύπαρξη αυτού του ορίου, ακόμα και στο μη-διαταραγμένο όριο.

Διαφορετικές διαδικασίες θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή της δράσης στο πλέγμα, από τη δράση στο συνεχές χώρο. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να απαιτήσουμε τη διακριτή παράγωγο να ορίζεται ως:

$$\partial_\mu \phi(z) \rightarrow \frac{\phi(z + \hat{\mu}) - \phi(z - \hat{\mu})}{2a}. \quad (58)$$

Η απορρέουσα δράση της διακριτής παραγώγου πρέπει να προκύπτει από την εξίσωση (54) από διορθώσεις που πηγαίνουν στο μηδέν στο συνεχές όριο. Αυτή η ασάφεια στον καθορισμό της δράσης στο lattice, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βελτιώσουμε στο χβαντικό επίπεδο τη σύγκληση της θεωρίας του πλέγματος με τη συνεχή θεωρία όταν $a \rightarrow 0$.

2.2 Διακριτοποίηση των SU(N) θεωριών βαθμίδας

2.2.1 Βαθμωτά πεδία

Μία καλή συστηματοποίηση της κβαντικής θεωρίας, σέβεται τις βασικές ιδιότητες της αρχικής θεωρίας με τις υπόλοιπες να άρονται όταν το υπερίωδες κριτήριο άρεται. Στο πλέγμα η ιδιότητα που πρέπει να διατηρείται είναι η αναλλοιωσιμότητα βαθμίδας. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω παράλληλης μεταφοράς. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τη συνεχή ηλεκτροδυναμική στον Ευκλείδειο χώρο. Εάν το σύνθετο βαθμωτό πεδίο συνδιάζεται με ένα Αβελιανό βαθμωτό πεδίο $A_\mu(x)$, η συνεχής παράγωγος αντικαθίσταται από την συναλλοιώτη παράγωγο:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig_0 A_\mu(x), \quad (59)$$

όπου g_0 είναι η βαθμωτή σύγκλιση. Κάτω από τους βαθμωτούς μετασχηματισμούς που καθορίζονται από τη συνάρτηση $\Lambda(x)$:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x), \quad \phi(x) \rightarrow e^{-ig_0 \Lambda(x)} \phi(x), \quad (60)$$

έτσι ώστε η λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L}(\phi, A_\mu) = D_\mu \phi(x) D_\mu \phi^*(x) + m^2 \phi(x) \phi^*(x) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x), \quad F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (61)$$

είναι αναλλοιώτη. Η αφελής διακριτοποίηση της λαγκρανζιανής, δεν διατηρεί την αναλλοιωτήτα βαθμίδας, επειδή οι πεπερασμένες διαφορές συγχέουν τα πεδία που καθορίζονται από διαφορετικά σημεία του πλέγματος. Αυτό μπορεί να διορθωθεί ως εξής. Εισάγουμε την παράλληλη μεταφορά κατά μήκος του συνδέσμου των θέσεων i και $i + \hat{\mu}$ ως

$$U_\mu(i) = e^{ig_0 \int_x^{x+a\hat{\mu}} A_\mu(s) ds}, \quad (62)$$

όπου $x = ai$. Στο πλέγμα γίνεται η αντικατάσταση

$$D_\mu \phi(i) \rightarrow \frac{U_\mu(x) \phi(i + \hat{\mu}) - \phi(i)}{a} \quad (63)$$

Οι μετασχηματισμοί βαθμίδας δρούν ως συνήθως στο ϕ :

$$\phi(j) \rightarrow e^{-i\lambda(j)}\phi(j) \quad \phi(j) \rightarrow e^{i\lambda(j)}\hat{\phi}(j) \quad (64)$$

Για τις συνδεδεμένες μεταβλητές

$$U_\mu(j) \rightarrow e^{-i\lambda(j)}U_\mu(j)e^{i\lambda(j+\hat{\mu})}. \quad (65)$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $U_{-\mu}(i) = \hat{U}_\mu^*(i - \hat{\mu})$, είναι εύκολο να δούμε ότι οι όροι που σχετίζονται με το ϕ στην εξίσωση (61) είναι αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς διακριτοποίησης, όταν χρησιμοποιούμε τη σχέση (63) για το διαφορικό της αλλαγής βάσης. Το κομμάτι της λαγκρανζιανής που περιλαμβάνει τον πεδιακό τένσορα $F_{\mu\nu}$ μπορεί επίσης να εκφραστεί με όρους της σύνδεσης μεταβλητών. Ο ευκολότερος τρόπος δίδεται από τη δράση *Wilson*:

$$S = \beta \sum_{j,\mu>\nu} \left(1 - \frac{1}{2} (U_{\mu\nu}(j) + U_{\mu\nu}^*(j)) \right) \quad (66)$$

όπου $\beta = 1/g_0^2$ και

$$U_{\mu\nu}(j) = U_\mu(j)U_\nu(j + \hat{\mu})U_\mu^*(j + \hat{\nu})U_\nu^*(j) \quad (67)$$

είναι η παράλληλη μεταφορά του βαθμωτού πεδίου γύρω από ένα στοιχειώδες στοιχείο του πλέγματος, "τετραγωνάκι". Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η δράση S που καθορίζεται από την εξίσωση (66) είναι βαθμωτά αναλλοίωτη. Επεκτείνοντας τα εκθετικά που καθορίζουν οι σύνδεσμοι στον μεγαλύτερης τάξης όρο a παίρνουμε:

$$S \simeq \frac{a^4}{4} \sum_{j,\mu,\nu} F_{\mu\nu}(j)F_{\mu\nu}(j) \quad (68)$$

που είναι μια αφελής διακριτοποίηση της δράσης του βαθμωτού πεδίου.

Η γενίκευση της παραπάνω συζήτησης στο $SU(N)$ είναι άμεση. Τώρα οι μεταβλητές της σύνδεσης $U_\mu(j)$ καθορίζονται ως:

$$U_\mu(j) = \mathcal{P}e^{ig_0 \int_x^{x+a\hat{\mu}} A_\mu(s) ds}, \quad (69)$$

όπου τώρα $U_\mu(j)$ είναι ένας πίνακας στην ομάδα $SU(N)$ και το "τετραγωνάκι" είναι το προϊόν των συνδέσμων, με την εφαρμογή της μεθόδου των διαδρομών, γύρω από το "τετραγωνάκι" του πλέγματος:

$$U_{\mu\nu}(j) = U_\mu(j)U_\nu(j + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(j + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(j) \quad (70)$$

όπου όπως και πριν $U_{-\mu}(j) = U_{j-\hat{\mu}}^\dagger(j)$. Κάτω από το μετασχηματισμό βαθμίδας που εισάγεται από τη συνάρτηση $\Omega(x)$, η $U_\mu(j)$ μετασχηματίζεται

$$U_\mu(j) \rightarrow \Omega(j)U_\mu(j)\Omega^\dagger(j + \hat{\mu}), \quad (71)$$

που είναι η έκδοση στο πλέγμα του συνεχούς μετασχηματισμού βαθμίδας

$$A_\mu(x) \rightarrow \Omega(x)A_\mu(x)\Omega^\dagger(x) - \frac{i}{g_0}\Omega(x)\partial_\mu\Omega^\dagger(x). \quad (72)$$

Σε όρους του $U_{\mu\nu}(j)$ η δράση *Wilson* γίνεται

$$S = \beta \sum_{j,\mu>\nu} \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr} U_{\mu\nu}(j) \right). \quad (73)$$

όπου ReTr υποδηλώνει το πραγματικό μέρος του ίχνους και $\beta = 2N/g_0^2$. Η διατήρηση της βαθμίδας εξασφαλίζεται από το ίχνος. Το ολοκλήρωμα διαδρομών είναι:

$$Z = \int \left(\prod_{j,\mu} dU_\mu(j) \right) e^{-S}, \quad (74)$$

όπου ο παράγοντας $dU_\mu(j)$ είναι η μέτρηση *Haar* του $SU(N)$ που συνδέεται με το $U_\mu(j)$. Για τους σκοπούς μας, η πιο σημαντική ιδιότητα της μέτρησης *Haar* είναι ότι είναι ομοιόμορφη στην ομάδα. Στη δράση (73) αποδίδεται η αφελής διακριτοποίηση της $SU(N)$ *Yang – Mills* θεωρίας στο μεγαλύτερο όρο του a όταν $a \rightarrow 0$, όπως θα έπρεπε. Η θεωρία πλέγματος

μπορεί ναδειχθεί ότι αναπαράγεται το σωστό συνεχές όριο, όταν η ακμή του πλέγματος τίνει στο μηδέν. Αυτή είναι μη-τετριμένη συνέπεια της ασυμπτωτικής ελευθερίας.

2.2.2 Φερμιόνια

Η διακριτοποίηση στο πλέγμα των φερμιονικών πεδίων δεν είναι άμεση. Την αιτία του προβλήματος και τις πιθανές του λύσεις, χειριζόμαστε με τρόπο αντίστοιχο με τη διαδικασία που ακολουθήθηκε και για το μποζονικό πεδίο. Δεδομένου του συνεχούς πεδίου $\psi(x)$, καθορίζουμε το αδιάστατο, διακριτό φερμιονικό πεδίο $\hat{\psi}(i)$ καθώς:

$$\hat{\psi}(i) = a^{3/2}\psi(ia) \quad (75)$$

και η διακριτοποιημένη παράγωγος:

$$\hat{\partial}_\mu \hat{\psi}(i) = \frac{\hat{\psi}(i + \hat{\mu}) - \hat{\psi}(i - \hat{\mu})}{2}. \quad (76)$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις εξισώσεις στην Ευκλείδια δράση *Dirac* παίρνουμε την φερμιονική δράση στο πλέγμα

$$S_f = \sum_{i,j,\alpha,\beta} \hat{\psi}_\alpha(i) \left[\frac{1}{2} \sum_\mu (\gamma_\mu^E)_{\alpha\beta} (\delta_{i+\hat{\mu},j} - \delta_{i-\hat{\mu},j}) + \hat{m} \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \right] \hat{\psi}_\beta(j), \quad (77)$$

όπου $\hat{m} = am$, με m τη φερμιονική μάζα. Στην εξίσωση αυτή με Ελληνικούς χαρακτήρες έχουμε τους δείκτες *Dirac*, ενώ με Λατινικούς αναφερόμαστε στα σημεία του πλέγματος. Οι γ_E είναι οι Ευκλείδιοι πίνακες γ που ικανοποιούν τις αντιμεταθετικές σχέσεις

$$\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (78)$$

Με όρους των πινάκων *Minkowsky*, οι Ευκλείδιοι πίνακες γ δίνονται από τις σχέσεις:

$$\gamma_0^E = \gamma_0, \quad \gamma_i^E = -i\gamma_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (79)$$

Ο τελεστής *Dirac* ορίζεται ως:

$$D_\beta(ij) = \left[\frac{1}{2} \sum_\mu (\gamma_\mu^E)_{\alpha\beta} (\delta_{i+\mu,j} - \delta_{i-\mu,j}) + \hat{m} \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \right] \hat{\psi}_\beta(j), \quad (80)$$

έτσι ώστε η φερμιονική δράση μπορεί να γραφεί στη συνεκτική μορφή

$$S_f = \sum_{i,j,\alpha,\beta} \hat{\psi}_\alpha(i) D_{\alpha\beta}(ij) \hat{\psi}_\beta(j). \quad (81)$$

Συναρτήσεις φερμιονικής συσχέτισης μπορούν να εκφραστούν μέσω του αντίστροφου τελεστή *Dirac*

$$\langle \hat{\psi}_\alpha(i) \hat{\psi}_\beta(j) \rangle = D_{\alpha\beta}^{-1}(ij). \quad (82)$$

Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση στο χώρο των ορμών μπορούμε να γράψουμε τη σχέση:

$$\langle \hat{\psi}_\alpha(i) \hat{\psi}_\beta(j) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} \frac{-i \sum_\mu \gamma_\mu^E \sin(\hat{p}_\mu) + \hat{m}}{\sum_\mu \sin^2(\hat{p}_\mu) + \hat{m}^2} e^{i\hat{p}(i-j)}, \quad (83)$$

όπου $\hat{p} = ap$ και π είναι η συνεχής ορμή. Η έκφραση περιγράφει τον συνεχή Ευκλείδιο διαδότη του ελεύθερου φερμιονίου όταν $a \rightarrow \infty$. Ωστόσο η ίδια συνεχής έκφραση προκύπτει και όταν τουλάχιστον ένας από τους δύο όρους της ορμής είναι $p_\mu = \pi/a$. Έτσι κάθε ζώνη *Brillouin* συνεισφέρει ισόποσα στο διαδότη, που σημαίνει ότι η λεγόμενη αφελής διακριτοποίηση που δίνεται από τις εξισώσεις (75-77) αποκαλύπτει 16 φερμιονικές γεύσεις στο συνεχές όριο. Αυτό είναι το λεγόμενο πρόβλημα του φερμιονικού διπλασιασμού. Το γνωστό θεώρημα μη-ύπαρξης των *Nielsen – Ninomiya* [194, 195] υποδηλώνει ότι ο διπλασιασμός είναι αναπόφευκτη συνέπεια, εάν επιβάλλουμε μια θεωρία για τα φερμιόνια στο πλέγμα που να διατηρεί τη συμμετρία χειρός και να είναι υπερτοπική. Έτσι, προκειμένου να αποφύγουμε τον διπλασιασμό, θα πρέπει να χαλαρώσουμε την απαίτηση για χειραλικότητα ή την απαίτηση για υπερτοπικότητα [196]. Η λύση του *Wilson* στο πρόβλημα ήταν να χαλαρώσει την απαίτηση για χειραλικότητα. Σε αυτή την προσέγγιση, ένας άλλος τελεστής στο όριο $a \rightarrow 0$ παρέχει μια πεπερασμένη μάζα στο συνεχές όριο για τους διπλούς όρους. Μια άλλη προσέγγιση, αυτή των *Kogut* και *Susskind* [197, 198, 199] μειώνει τον αριθμό των διπλασιαστών από 2^D σε $2^{D/2}$, στέλνοντας τους τέσσερις όρους του σπινόρα του *Dirac* στις γωνίες της ζώνης *Brillouin*, γνωστή και ως διακριτοποίηση εναλλασσόμενων φερμιονίων. Ακόμα πιο πρόσφατα, μια σειρά φερμιονικών διακριτοποιήσεων που απαλλάσσουν από το πρόβλημα του

διπλασιασμού ικανοποιώντας μια τροποποιημένη μορφή της χειραλικής συμμετρίας στο πλέγμα έχουν προταθεί [200, 201]. Τονίζουμε ότι η φυσική στο συνεχές όριο, είναι ανεξάρτητη από τη μέθοδο διακριτοποίησης του πλέγματος που χρησιμοποιείται. Σε υπολογισμούς στο πλέγμα των $SU(N)$ θεωριών βαθμίδας για φερμιόνια, χρησιμοποιείται κυρίως η μέθοδος του *Wilson*. Οι βασικοί λόγοι είναι οι ακόλουθοι:

1. οι προσομοιώσεις που χρησιμοποιούν φερμιόνια *Wilson* είναι πολύ πιο γρήγορες από τις προσομοιώσεις που χρησιμοποιούν μη-υπερτοπικά φερμιόνια·
2. σε αντίθεση με την περίπτωση των εναλλασσόμενων φερμιονίων, ένας μεγάλος αριθμός γεύσεων μπορεί να προσομοιωθεί με τη μέθοδο *Wilson*·
3. η χειραλική συμμετρία, μπορεί να επανακτηθεί μέσω της ρύθμισης της γυμνής μάζας κούαρκ σε μια κρίσιμη τιμή.

Η διακριτοποίηση *Wilson* αρχίζει από την ρύθμιση του τελεστή *Dirac* με την εισαγωγή ενός επιπλέον όρου, που πηγαίνει όπως η λαγκρανζιανή του $\hat{\psi}$ με ισχύ που ρυθμίζεται από την παράμετρο r που εδώ παίρνουμε ίση με 1. Αυτός ο όρος είναι

$$\Delta S_f = -\frac{r}{2} \sum_i \hat{\psi}(i) \sum_{\mu} \left(\hat{\psi}(i + \mu) + \hat{\psi}(i - \mu) - 2\hat{\psi}(i) \right), \quad (84)$$

Αυτό δίδει τον ακόλουθο διαδότη *Wilson – Dirac*

$$D_{\alpha\beta}^W(ij) = -\frac{1}{2} \sum_{\mu} \left[(r - \gamma_{\mu}^E)_{\alpha\beta} \delta_{i+\mu,j} + (r + \gamma_{\mu}^E)_{\alpha\beta} \delta_{i-\mu,j} \right] + (\hat{m} + 4r) \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta}. \quad (85)$$

Η συνάρτηση δύο σημείων που απορρέει είναι:

$$\langle \hat{\psi}_{\alpha}(i) \hat{\psi}_{\beta}(j) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} \frac{-i \sum_{\mu} \gamma_{\mu}^E \sin(\hat{p}_{\mu}) + \hat{m}(p)}{\sum_{\mu} \sin^2(\hat{p}_{\mu}) + (\hat{m}(p))^2} e^{i\hat{p}(i-j)}, \quad (86)$$

που είναι όμοια με τη μορφή του αφελούς διαδότη, η διαφορά είναι ότι τώρα η μάζα εξαρτάται από την ορμή:

$$m(p) = m + \frac{2r}{a} \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{ap_{\mu}}{2} \right) \quad (87)$$

όπου σε αυτή την έκφραση αποκαταστήσαμε και τις διαστατικές μονάδες. Όταν $ap_{\mu} \rightarrow 0$ για κάθε μ , $m(p) \approx m$, και το αναμενόμενο αποτέλεσμα στο συνεχές επανακτάται. Αντίστροφα,

στις άλλες άκρες της ζώνης *Brillouin* η $m(p)$ αποκλίνει. Έτσι, στο συνεχές όριο οι διπλοί όροι χωρίς φυσική ερμηνεία, παίρνουν μια πεπερασμένη μάζα, αποσυνδεόμενοι από τη δράση.

2.2.3 Βαθμωτές θεωρίες και φερμιονική ύλη

Σε αυτή την παράγραφο θα αναφερθούμε στη φερμιονική ύλη σε συνδιασμό με τα βαθμωτά πεδία στο πλέγμα. Για απλότητα θα αναφερθούμε μόνο στην περίπτωση όπου υπάρχουν n_f φερμιονικές γεύσεις με μάζα όμοια μεταξύ τους και ίση με \hat{m} . Υπό την παρουσία των βαθμωτών αλληλεπιδράσεων για τα φερμιόνια *Wilson* ο τελεστής *Dirac* δίδεται ως:

$$D_{\alpha\beta}^W(i,j) = -\frac{1}{2} \sum_{\mu} \left[(r - \gamma_{\mu}^E)_{\alpha\beta} U_{\mu}(i) \delta_{i+\hat{\mu},j} + (r + \gamma_{\mu}^E)_{\alpha\beta} U_{\mu}^{\dagger}(j) \delta_{i-\hat{\mu},j} \right] + (\hat{m} + 4r) \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta}. \quad (88)$$

Για χάρη της σαφήνειας, όπου το περιεχόμενο δεν διευκρινίζεται, από εδώ και στο εξής, θα περιορίζονται οι δείκτες *Dirac* και οι χωροχρονικές συντεταγμένες στο D^W και στα φερμιονικά πεδία. Στον πιο ευθύ φορμαλισμό, το ολοκλήρωμα διαδρομών της θεωρίας δίνεται από την:

$$Z = \int \left(\prod_{j,\mu} dU_{\mu}(j) \right) \left(\prod_{j,a,l} d\hat{\psi}_a^l(j) \right) \left(\prod_{j,a,l} d\hat{\bar{\psi}}_a^l(j) \right) e^{-S - \hat{\bar{\psi}}^l D_W \hat{\psi}^l}. \quad (89)$$

όπου l είναι ο δείκτης της γεύσης που τρέχει από το 1 έως το n_f και Σ είναι η βαθμωτή δράση της σχέσης (73). Επιβάλλοντας την ολοκλήρωση αποκλειστικά πάνω στις φερμιονικές μεταβλητές λαμβάνουμε:

$$Z = \int \left(\prod_{j,\mu} dU_{\mu}(j) \right) (\det D_W)^{n_f} e^{-S}, \quad (90)$$

όπου η διακρίνουσα της D_W εμφανίζεται στη δύναμη του n_f .

Μεταξύ των φερμιονικών οντοτήτων, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας μόνο τις μηδενικής-ορμής συναρτήσεις συσχέτισης των ισοδιανυσματικών μεσονικών τελεστών που παίρνουν τη μορφή:

$$\mathcal{C}_{\Gamma\Gamma'}(t) = \sum_{\vec{x}} \langle \left(\hat{\bar{\psi}}^l(t, \vec{x}) \Gamma \hat{\psi}^k(t, \vec{x}) \right)^{\dagger} \left(\hat{\psi}^l(0, 0) \Gamma' \hat{\psi}^k(0, \vec{0}) \right) \rangle, \quad (91)$$

όπου Γ και Γ' είναι δύο Ευκλείδιοι πίνακες *Dirac*, $(0, \vec{0})$ είναι η συμβατική αρχή του πλέγματος και $l \neq k$. Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη έκφραση πάνω στα φερμιονικά πεδία δίνει

$$C_{\Gamma\Gamma'}(t) = - \sum_{\vec{x}} \langle tr (\Gamma^\dagger (D^W)^{-1}(x, 0) \Gamma' (D^W)^{-1}(0, x)) \rangle, \quad (92)$$

με $0 \equiv (0, \vec{0})$ και $x \equiv (t, \vec{x})$ και tr το ίχνος των πινάκων *Dirac*. Ειδικότερα στο φορμαλισμό του ολοκληρώματος διαδρομών η έκφραση είναι:

$$C_{\Gamma\Gamma'}(t) = - \frac{1}{Z} \int \left(\prod_{j,\mu} dU_\mu(j) \right) (det D_W)^n tr (\Gamma^\dagger (D^W)^{-1}(x, 0) \Gamma' (D^W)^{-1}(0, x)) e^{-S}. \quad (93)$$

2.2.4 Αποσβένουσα προσέγγιση

Φερμιονικές εκφράσεις όπως η $C_{\Gamma\Gamma'}$ απαιτούν τον υπολογισμό της φερμιονικής διακρίνουσας. Αυτή η διακρίνουσα, μπορεί να εκφραστεί σε φερμιονικούς βρόγχους. Ως μια επέκταση της παραμέτρου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για παράδειγμα τη φερμιονική μάζα. Αυτή είναι η επονομαζόμενη "αναδύομενη επέκταση παραμέτρου". Ο κύριος όρος σε αυτή την έκφραση είναι αυτός στον οποίο απουσιάζουν οι φερμιονικοί βρόχοι, που σημαίνει ότι $det D^W = 1$. Αυτή η πεπερασμένη φερμιονική μάζα χαρακτηρίζει την "αποσβένουσα προσέγγιση". Με πρακτικούς όρους, χρησιμοποιώντας την αποσβένουσα προσέγγιση, σημαίνει ότι δε λαμβάνεται υπόψη η "βαθιά αλληλεπίδραση" των φερμιονίων στο βαθμωτό πεδίο. Ακόμα να σημειωθεί ότι η αποσβένουσα προσέγγιση είναι μη-μοναδιαία.

Στην QCD στο lattice προκειμένου να πάρουμε ένα ακριβές αριθμητικό αποτέλεσμα είναι σημαντικό να εκτιμήσουμε ολόκληρη τη φερμιονική διακρίνουσα. Ωστόσο για μεγάλο N για σταθερή μάζα κουάρκ οι φερμιονικοί βρόχοι γίνονται όλο και λιγότερο σημαντικοί. Για την ακρίβεια το αποσβένον όριο για μεγάλο N είναι το ίδιο με το όριο του μεγάλου N στη θεωρία των δυναμικών φερμιονίων. Συνεπώς, εάν ενδιαφερόμαστε μόνο στο αποτέλεσμα για μεγάλο N ο υπολογισμός μπορεί να πραγματοποιηθεί στα πλαίσια της αποσβένουσας θεωρίας. Βέβαια αυτό δεν περιλαμβάνει τις διορθώσεις για πεπερασμένο N .

Ένα φαινόμενο που έχει παρατηρηθεί στην QCD στο lattice είναι η καθυστερημένη εμφάνιση μη-αποσβενόμενων ενεργειών. Ο αποσβένον υπολογισμός αποδεικνύεται ότι λειτουργεί ακόμα και σε καθεστώς στο οποίο θα αναμέναμε σημαντικές συνεισφορές από τους φερμιονικούς βρόγχους. Αυτό το γεγονός είναι μια ακόμα ένδειξη ότι η ισχυρή αλληλεπίδραση είναι κοντά στο όριο της για μεγάλο- N .

2.3 Υπολογισμοί με τη μέθοδο Monte Carlo

Σε μια $SU(N)$ θεωρία βαθμίδας, ο υπολογισμός του ολοκληρώματος διαδρομών σε πλέγμα μεγέθους \mathcal{S} , σε μονάδες του πλέγματος, περιλαμβάνει τον υπολογισμό $d = 4(N^2 - 1)\mathcal{S}$, τον αριθμό, ολοκληρωμάτων. Ένας τόσο μεγάλος αριθμός ολοκληρωμάτων είναι δύσκολο να υπολογιστεί με τη χρήση μεθόδων πλέγματος. Μία στοχαστική προσέγγιση που βασίζεται στην παρατήρηση ότι το ολοκλήρωμα διαδρομών παρομοιάζεται με το μέτρο *Boltzmann* στη στατιστική μηχανική είναι προτιμητέα και έτσι σε σταθερές παραμέτρους, μόνο ένα υποσύνολο δυνατών τιμών των μεταβλητών καθορίζουν τη συμπεριφορά του ολοκληρώματος. Ακόμα, μέθοδοι στο πλέγμα επιβεβαιώνονται από το συστηματικό λάθος που είναι $O(1/S^{s/d})$, όπου s είναι αριθμός που εξαρτάται από την προσέγγιση που χρησιμοποιείται από τη συγκεκριμένη μέθοδο πλέγματος που χρησιμοποιούμε (π.χ. $s = 4$ στη δημοφιλή μέθοδο *Simpson*). Έτσι όταν το a είναι αρκετά μεγάλο το σφάλμα γίνεται τελικά τάξης ένα. Η μέθοδος Monte Carlo περιέχει τη στοχαστική προσέγγιση, οι συνθέσεις των πεδίων γεννούνται σύμφωνα με το κριτήριο της άθροισης ολοκληρωμάτων που σημαίνει ότι εμφανίζονται ανάλογα με το βάρος της συνεισφοράς τους στην άθροιση διαδρομών. Χάρη σε αυτή την ιδιότητα, η αναμενόμενη τιμή στο κενό ενός μεγέθους, μπορεί να υπολογιστεί σαν ένας απλός μέσος όρος πάνω σε ένα σύνολο δυνατών συνδιασμών, που προκύπτουν στην μέθοδο *MC*. Ανάλογα, το στατιστικό σφάλμα, έχει καλή συμπεριφορά δεδομένου ότι είναι ανάλογο του $1/\sqrt{N_K}$ όπου N_K είναι ο αριθμός των παραγόμενων συνδιασμών.

Η θεωρία πίσω από τους υπολογισμούς Monte Carlo βασίζεται στη διαδικασία Markov. Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα που εξελίσσεται μέσω μιας σειράς καταστάσεων σε διακριτό χρόνο. Συμβολίζουμε μια τυχαία κατάσταση ως \mathcal{C}_m και το σύνολο όλων των καταστάσεων ως $\{\mathcal{C}_m\}$. Η εξέλιξη καθορίζεται από την πιθανότητα P_{nm} να μεταφερθεί το σύστημα από την κατάσταση \mathcal{C}_n στην κατάσταση \mathcal{C}_m σε κάποια μελλοντική στιγμή. Λέμε ότι τα δυναμικά είναι Markovιανά αν η κατάσταση τη χρονική στιγμή t εξαρτάται μόνο από την κατάσταση τη χρονική στιγμή $t - 1$ και όχι από τις οποιεσδήποτε άλλες καταστάσεις άλλων στιγμών. Μπορεί να αποδειχθεί ότι μια ασυμπτωτική κατανομή πιθανότητας χαρακτηρίζει όλα τα δυναμικά τύπου Markov. Αυτή την αποκαλούμε, ισορροπούσα κατανομή. Οι αλγόριθμοι Μόντε Κάρλο είναι ουσιαστικά μέθοδοι για να κατασκευαστούν δυναμικά *Markov* που έχουν ολοκλήρωμα διαδρομών με μέτρο όμοιο με της ισορροπούσας κατανομής. Γενικά, αρκετά διαφορετικά δυναμικά *Markov* μπορούν να παράγουν την ίδια κατανομή. Για κάποια δυναμικά που ικανοποιούν τη σχέση ισορροπίας

$$P_n m e^{-S(\mathcal{C}_n)} = P_m n e^{-S(\mathcal{C}_m)}, \quad (94)$$

όπου $S(\mathcal{C})$ είναι η δράση της κατάστασης \mathcal{C} , η κατανομή ισορροπίας ρ_m δίνεται από την

$$\rho_m = \frac{e^{-S(\mathcal{C}_m)}}{\sum_n e^{-S(\mathcal{C}_n)}}, \quad (95)$$

που είναι η κατανομή ισορροπίας *Boltzmann*.

Το πρόβλημα της κατασκευής ενός συνόλου καταστάσεων που να καθορίζουν το ολοκλήρωμα διαδρομών και να προσεγγίζουν το σύστημα με ελεγχόμενη ακρίβεια, γίνεται ένα πρόβλημα καθορισμού των κατάλληλων δυναμικών *Markou* για τη θεωρία μας. Όταν το καταφέρουμε αυτό μπορούμε να ξεκινήσουμε από μια οποιαδήποτε κατάσταση, μία οποιαδήποτε χρονική στιγμή και να αφήσουμε το σύστημα να εξελιχθεί.

Ένας αλγόριθμος μπορεί να χαρακτηριστεί από την αποτελεσματικότητά με την οποία διερευνά τον χώρο που ελέγχουμε. Μια καλή μέτρηση της αποτελεσματικότητας είναι ο χρόνος συσχέτισης. Γενικά, για ένα σύστημα \mathcal{O}

$$\langle \mathcal{O}(t)\mathcal{O}(t + \tau) \rangle \propto e^{-t/\tau_{\mathcal{O}}}, \quad (96)$$

όπου ο χρόνος συσχέτισης $\tau_{\mathcal{O}}$ εξαρτάται από το \mathcal{O} και τα επιλεγμένα δυναμικά *Markou*. Για ένα δεδομένο σύστημα, η $\tau_{\mathcal{O}}$ παρέχει ένα μέτρο της αποτελεσματικότητας του αλγορίθμου. Όσο μικρότερο το $\tau_{\mathcal{O}}$ τόσο πιο γρήγορη η ανάλυση του επιλεγμένου χώρου. Τοπολογικές παράμετροι είναι σαφώς πιο δύσκολο να αποσυσχετιστούν, σε σχέση με τις τοπικές παραμέτρους. Ένας αλγόριθμος που αποσυσχετίζει γρήγορα τοπολογικές παραμέτρους, μπορεί να χαρακτηριστεί αποτελεσματικός.

Για την θεωρία πεδίου στον $SU(2)$ ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος έχει προταθεί από τον *Creutz* [202] και αργότερα από τους *Kennedy* και *Pendleton* [203]. Αυτός ο αλγόριθμος υπάγεται σε μια ευρύτερη οικογένεια αλγορίθμων στην οποία κεντρικό ρόλο έχει το βάρος *Boltzmann*. Προκειμένου να μειώσουμε περαιτέρω το χρόνο συσχέτισης και να αυξήσουμε την εργοδικότητα, είναι δυνατό να εισάγουμε ενδιάμεσα βήματα στα οποία οι σχετικές μεταβλητές να αλλάζουν, ώστε η δράση να παραμένει σταθερή [204, 205].

Για τον $SU(N)$ αυτή η ενδιάμεση διαδικασία μπορεί να γίνει με διαδοχικές επικαιροποιήσεις διαφορετικών υποομάδων $SU(2)$. Η ιδέα αυτή εισήχθη από τους *Cabbibo* και *Marinari* [206]. Παρότι ο αλγόριθμος *Kennedy – Pendleton* με την ιδέα των *Cabbibo – Marinari* λειτουργεί καλά για την $SU(3)$, για μεγάλο N η προσέγγιση μόνο μέσω υποομάδων $SU(2)$ γίνεται αναποτελεσματική [207, 208].

Μετά από μία σειρά βελτιώσεων, οι αναμενόμενες τιμές για ένα σύστημα μπορούν να αποδοθούν ως μέσες τιμές του συστήματος, όταν αυτό το σύστημα εξελίσσεται ακολουθώντας τις καταστάσεις της αλυσίδας *Markou* που το περιγράφουν. Για παράδειγμα, αν $\mathcal{O}(i)$ είναι η τιμή του συστήματος \mathcal{O} στον i -οστό όρο της αλυσίδας *Markou* ολικού μήκους N_K , καθορίζουμε:

$$\bar{\mathcal{O}}_{N_K} = \frac{1}{N_K} \sum_{i=1}^{N_K} \mathcal{O}(i). \quad (97)$$

Κατ' αντιστοιχία η αναμενόμενη τιμή του \mathcal{O} στο κενό $\langle \mathcal{O} \rangle$ δίνεται από την:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \lim_{N_K \rightarrow \infty} \bar{\mathcal{O}}_{N_K}. \quad (98)$$

Μία άλλη ποσότητα με ενδιαφέρον είναι η $\bar{\mathcal{O}}_{N_K}$ που εκφράζεται ως:

$$\left(\frac{\Delta \langle \mathcal{O} \rangle}{\langle \mathcal{O} \rangle} \right)^2 = \frac{\langle \mathcal{O} \rangle^2 - \bar{\mathcal{O}}_{N_K}}{\langle \mathcal{O} \rangle^2} N_K^{-1}. \quad (99)$$

Έτσι, σε μία αριθμητική προσομοίωση, ο δείκτης $\langle \mathcal{O} \rangle$ μπορεί κατά τεκμήριο να καθοριστεί με την επιθυμητή ακρίβεια, επιλέγοντας κατάλληλο μήκος για την αλυσίδα *Markov*. Η στατιστική αβεβαιότητα $\Delta \mathcal{O}$ μπορεί επίσης να ποσοτικοποιηθεί. Ωστόσο, λόγω της συσχέτισης των καταστάσεων, η τυπική γκαουσιανή στατιστική δεν μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα. Εντούτοις, η γκαουσιανή στατιστική μπορεί να εφαρμοστεί αφότου οι μεταβλητές του συστήματος διαχωριστούν ομοιόμορφα σε ομάδες ίσες ή μεγαλύτερες του χρόνου συσχέτισης $\tau_{\mathcal{O}}$. Ουσιαστικά αυτό συνεπάγεται ότι ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών του συστήματος, δεν είναι N_K αλλά κοντά στην τιμή της έκφρασης $N_K/\tau_{\mathcal{O}}$.

Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό για την εκτιμήτρια $\langle \mathcal{O} \rangle$ είναι η μεροληψία, καθώς είναι η ιδιότητα αυτή που δείχνει το κατά πόσον είναι κατάλληλη ή όχι η επιλογή της παραμέτρου. Μια εκτιμήτρια μπορεί να χαρακτηριστεί μεροληπτική, όταν η τιμή της δε συμφωνεί με την αναλυτική τιμή εάν η τελευταία είναι υπολογίσιμη. Παρότι κάθε μεροληψία εξαφανίζεται για $N_K \rightarrow \infty$, αυτό δε σημαίνει ότι απουσιάζει και σε πεπερασμένες τιμές. Υπάρχουν συγκεκριμένοι τρόποι για να απαλλαγούμε από τη μεροληψία (όπως οι μέθοδοι "jack - knife" και "bootstrap") και παρότι δεν θα αναφερθώ συγκεκριμένα, θα πρέπει να πούμε ότι προκειμένου να εξάγουμε αριθμητικές τιμές και το αντίστοιχο σφάλμα τους, απαιτείται προσεκτική ανάλυση καθότι τα δεδομένα μας συσχετίζονται μεταξύ τους. Σύγχρονες μέθοδοι υπολογισμών στο lattice, όπως και αυτές που προαναφέρθηκαν, χρησιμοποιούν εκτενείς διαδικασίες για τον υπολογισμό των σφαλμάτων και την προσαρμογή των παραμέτρων.

2.4 Προσομοιώσεις στο lattice για τις $SU(N)$ θεωρίες βαθμίδας

Οι υπολογισμοί Monte-Carlo για τη θεωρία βαθμίδας στο πλέγμα, αποσκοπούν στον υπολογισμό αριθμητικών τιμών για τις φυσικές παραμέτρους του συστήματος. Οι πλέον κλασικές ποσότητες που υπολογίζονται σχετίζονται με τις συναρτήσεις συσχέτισης δύο τελεστών σε μηδενική ορμή, δηλαδή:

$$C(\tau) = \frac{1}{N_t} \sum_{t=0}^{N_t-1} \left(\langle \mathcal{O}_1^\dagger(t) \mathcal{O}_2(t+\tau) \rangle - \langle \mathcal{O}_1^\dagger(t) \rangle \langle \mathcal{O}_2(t+\tau) \rangle \right), \quad (100)$$

όπου N_t είναι ο αριθμός των σημείων στην κατεύθυνση του Ευκλείδειου χώρου στο lattice και ο τελεστής σταθμίζεται πάνω στις τρεις χωρικές διαστάσεις, για να επεκταθεί στις καταστάσεις μηδενικής ορμής. Έχουμε υποθέσει ότι η κατεύθυνση του Ευκλείδειου χρόνου είναι συμπαγής και ότι περιοδικές συνοριακές συνθήκες κατά μήκος της επιβάλλονται για τα φερμιονικά και τα μποζονικά πεδία. Για ασυμπτωτικά μεγάλο N_t ,

$$\mathcal{C}(\tau) \propto e^{-m\tau}, \quad (101)$$

όπου m είναι η μάζα της βασικής κατάστασης που συνδέει την $\mathcal{O}_1|0\rangle$ με την $\mathcal{O}_2|0\rangle$. Μία άλλη σημαντική παρατήρηση είναι ότι η ποιότητα των αριθμητικών δεδομένων δεν μειώνεται με το N . Συγκεκριμένα, για μεγάλο N , ο λόγος του θορύβου ως προς το σήμα είναι σταθερός ως προς τη διακύμανση του N για αμοιγώς γλουονικούς υπολογισμούς, ενώ βελτιώνεται ανάλογα του $1/\sqrt{N}$ για φερμιονικούς υπολογισμούς.

Οι θερμοδυναμικές ιδιότητες μπορούν να μελετηθούν σε πεπερασμένη θερμοκρασία στην οποία το lattice έχει $N_s^3 \times N_t$ κορυφές με $N_s \gg N_t$ και περιοδικές συνοριακές συνθήκες για μποζονικά/φερμιονικά πεδία κατά μήκος της συμπυκνωμένης παραμέτρου της οποίας το μέγεθος σχετίζεται με τη θερμοκρασία T μέσω της $T = 1/(aN_t)$.

Αριθμητικές μελέτες των θεωριών βαθμίδας στο lattice, με τη μέθοδο Μόντε Κάρλο περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

1. σε ένα πλέγμα σταθερού μεγέθους \mathcal{S} και σταθερής τιμής σύζευξης β , αλλά και σταθερής τιμής της παραμέτρου κ υπό την παρουσία δυναμικών φερμιονίων, εκτιμούμε αριθμητικά τις αναμενόμενες τιμές στο κενό, ταυιστών που αντιστοιχούν σε παραμέτρους του φυσικού συστήματος·
2. για τις ίδιες συζεύξεις εκτελούμε αριθμητικές προσομοιώσεις σε πλέγματα μεγαλύτερης κλίμακας, με σκοπό να προσδιορίσουμε το θερμοδυναμικό όριο·
3. επαναλαμβάνουμε τα δύο πρώτα βήματα για διάφορες συζεύξεις, προκειμένου να προσδιορίσουμε τις τιμές των παραμέτρων στο συνεχές όριο.

Η ασυμπτωτική ελευθερία επιτάσσει το συνεχές όριο της θεωρίας να επιτυγχάνεται για $\beta \rightarrow \infty$. Για την ακρίβεια, στο μικρότερο όριο, η θεωρία διαταραχών προβλέπει ότι:

$$a = \frac{1}{\Lambda_{lat}} e^{-\frac{12\pi^2}{11N^2}\beta} \quad (102)$$

όπου το Λ_{lat} εκφράζει τη δυναμική μάζα στο πλέγμα. Αυτό υποδηλώνει ότι η ακμή στο lattice πηγαίνει εκθετικά στο μηδέν όταν $\beta \rightarrow \infty$. Η μεταβολή μιας παραμέτρου από το a προβλέπεται από την εξίσωση *Callan – Symanzik*. Η ύπαρξη ενός σαφώς καθορισμένου ορίου στο συνεχές υποδεικνύει ότι για δυο διαφορετικές μετρήσεις της ίδιας μάζας, έστω \mathcal{O}_1

και \mathcal{O}_2 :

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\hat{\mathcal{O}}_1}{\hat{\mathcal{O}}_2} = \frac{\mathcal{O}_1}{\mathcal{O}_2} \quad (103)$$

όπου $\hat{\mathcal{O}}_i = a^{-d_i} \mathcal{O}_i$ και d_i είναι η διάσταση μάζας του \mathcal{O}_i . Στον μεγαλύτερο μη τετριμμένο όρο κατά (α) , κοντά στο συνεχές όριο:

$$\frac{\hat{\mathcal{O}}_1}{\hat{\mathcal{O}}_2} = \frac{\mathcal{O}_1}{\mathcal{O}_2} + O(a^2 M^2), \quad (104)$$

αυτή η έκφραση υποδηλώνει ότι, ασυμπτωτικά, οι διορθώσεις είναι τετραγωνικές ως προς το μήκος του πλέγματος. Οι τιμές του β για τις οποίες ικανοποιείται η προηγούμενη εξίσωση λέμε ότι είναι στην κλιμακωτή περιοχή.

Προκειμένου οι μέθοδοι που περιγράψαμε παραπάνω να είναι αποτελεσματικές το σύστημα θα πρέπει να είναι στη σωστή κατάσταση. Για παράδειγμα, για μικρό όγκο, μπορεί να αίρονται οι περιορισμοί και έτσι τα αριθμητικά δεδομένα που εξάγονται να μην συμφωνούν με αυτά του άπειρου όγκου. Όμοια, το όριο που αντιστοιχεί σε ισχυρή σύζευξη στο lattice, δηλαδή $\beta \rightarrow 0$, είναι ισχυρά συνδεδεμένο με χαρακτηριστικά οφειλόμενα στη διακριτοποίηση. Οι ιδιότητες του ορίου της ισχυρής σύζευξης, όπως η ύπαρξη περιορισμών και το πεπερασμένο του χάσματος μάζας, δεν είναι απαραίτητα συνδεδεμένες με το συνεχές της θεωρίας. Προκειμένου να διερευνηθεί η περιοχή με συζεύξεις αναλυτικά συνδεδεμένες με το συνεχές όριο, οι προσομοιώσεις πρέπει να γίνονται σε τιμές σύζευξης κατά 't Hooft στο lattice, λ_0 μικρότερες από την κρίσιμη τιμή που αντιστοιχεί στη μετάβαση προς το καθεστώς ισχυρής σύζευξης [210].

Η $SU(N)$ Yang-Miils θεωρία δυναμικά δημιουργεί μια κλίμακα. Το συνολικό φυσικό φάσμα μπορεί να εκφραστεί σε όρους αυτής της κλίμακας. Έτσι, προκειμένου να συγκρίνουμε ουσιωδώς θεωρίες διαφορετικού N , η κλίμακα πρέπει να φιξαριστεί. Αυτή μπορεί για παράδειγμα να είναι η ένταση της χορδής σ ή η θερμοκρασία αποδέσμευσης T_C . Όταν η επιλογή γίνει, τα επιχειρήματα για μεγάλο N προβλέπουν τη διακύμανση σε σχέση με το N , όλων των άλλων ποσοτήτων σχετικών με τα υπέρυθρα δυναμικά. Συγκεκριμένα, εάν μια καλά ορισμένη θεωρία για μεγάλο N υπάρχει, όλες οι φασματικές ποσότητες θα πρέπει να έχουν ένα πεπερασμένο όριο στο μεγάλο N . Για τη θεωρία διαταραχών, αναμένουμε ότι οι μεγαλύτερες διορθώσεις για μεγάλο N είναι τάξης $1/N^2$ για την θεωρία βαθμίδας και τάξης $1/N$ για τη θεωρία των δυναμικών φερμιονίων. Με το ίδιο σκεπτικό, η εγγύτητα της $SU(3)$ στην $SU(N)$ σημαίνει ότι η σειρά συγκλίνει για $N = 3$. Επιπλέον, η προσέγγιση για μεγάλο N είναι χρήσιμη στην περιγραφή της QCD όταν για μια εκτενή λίστα αντικειμένων, μια αποδεκτή προσέγγιση μπορεί να επιτευχθεί κρατώντας μόνο τους μεγαλύτερους όρους, με την ποιότητα των προσεγγίσεων να βελτιώνεται συστηματικά όταν όροι μεγαλύτερης τάξης προσθέτονται. Να σημειωθεί ότι στο όριο για μεγάλο N η ποσότητα με την οποία γίνεται η σύγκριση μεταξύ των θεωριών με διαφορετικό αριθμό χρωμάτων N δεν έχει σημασία. Διαφορετικές ποσότητες μπορεί να επιρεάζονται από διαφορετικές διορθώσεις για πεπερασμένο

N με διαφορετικό τρόπο, αλλά κάθε μια από αυτές τελικά καταλήγει σε πολύ συγκεκριμένη τιμή στο όριο $N \rightarrow \infty$.

Ένα άλλο σημαντικό ζήτημα που παρουσιάζεται, είναι κατά πόσον το συνεχές όριο και το όριο για μεγάλο N εναλλάσσονται. Γενικά η εναλλαγή των δύο αυτών ορίων [211], μπορεί να μην είναι τετριμμένη [212, 213], ειδικά εάν υπάρχει ένα σετ βαθμών ελευθερίας των οποίων ο αριθμός δεν αυξάνεται με το N , αλλά έχει ισχυρή επίδραση στα δυναμικά για κάθε πεπερασμένο N . Ωστόσο στις θεωρίες βαθμίδας που μας ενδιαφέρουν τα δύο όρια εναλλάσσονται [214, 215]. Με άλλα λόγια, αν θέλουμε να μελετήσουμε τη θεωρία για άπειρο N , μπορούμε είτε να πάρουμε πρώτα το όριο του συνεχούς για συγκεκριμένο N και μετά το όριο για μεγάλο N , ή να πάρουμε το όριο για μεγάλο N σε συγκεκριμένο μήκος a και μετά το συνεχές όριο. Στην τελευταία προσέγγιση, το μήκος του πλέγματος παραμένει σταθερό για διάφορα N μέσω της προσομοίωσης των διαφορετικών θεωριών για το β έτσι ώστε η τιμή της φυσικής ποσότητας (π.χ. η τάση της χορδής ή η κρίσιμη θερμοκρασία), να έχει μία προκαθορισμένη τιμή σε τιμές του μήκους του πλέγματος a . Παρότι η χρησιμοποίηση του ορίου για μεγάλο- N σε σταθερό μήκος πλέγματος είναι ένα ενδιαμέσο βήμα προς την κατεύθυνση της συνεχούς φυσικής για μεγάλο N , μπορεί ωστόσο να αποδειχθεί χρήσιμη για υπολογισμούς που είναι ιδιαίτερα απαιτητικοί από υπολογιστικής πλευράς.

Κεφάλαιο 3

Παραγοντοποίηση, εξισώσεις βρόχων και ομοιότητες στο μεγάλο N

Εκτός από τις φαινομενολογικές περιπλοκές και τους συσχετισμούς με τη θεωρία χορδών που συζητήσαμε στο κεφάλαιο 1, οι θεωρίες πεδίου για μεγάλο- N και τα στατιστικά μοντέλα παρουσιάζουν πολλές περισσότερες μαθηματικές ιδιότητες. Οι αναμενόμενες τιμές των φυσικών τελεστών παραγοντοποιούνται μέχρι τις διορθώσεις τάξης $O(1/N)$, δεσ παράγραφος (3.1), που υποδηλώνουν μια αναλογία με το κλασσικό όριο της κβαντικής θεωρίας (παράγραφος 3.2) και υποδηλώνει την καταπίεση των διακυμάνσεων για $N \rightarrow \infty$. Αυτό οδηγεί στην υπόθεση ότι το δυναμικό για μεγάλο N μπορεί να καθορίζεται από ένα κυρίαρχο πεδίο, παράγραφος (3.3). Οι ιδιότητες της παραγοντοποίησης δηλώνουν επίσης ότι μπορεί να κατασκευαστεί ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων, για τις αναμενόμενες τιμές των βαθμωτών αναλλοίωτων τελεστών, κάτι που παρουσιάζεται στην παράγραφο (3.4). Για τον φορμαλισμό στο lattice της θεωρίας *Yang–Mills* οι *Eguchi* και *Kawai* ανακάλυψαν ότι αυτές οι εξισώσεις αποκαλύπτουν την ανεξαρτησία του όγκου της θεωρίας στο μεγάλο- N , έτσι ώστε, στον τετραδιάστατο χώρο η θεωρία μπορεί να συρρικνωθεί σε ένα συγκεντρωτικό μοντέλο αποτελούμενο από μόνο τέσσερις πίνακες, παράγραφος (3.5), υπό την προϋπόθεση να διατηρείται η κεντρική συμμετρία. Αυτή η τελευταία προϋπόθεση δεν ικανοποιείται για ασθενή σύζευξη, αν και διαφοροποιήσεις του αρχικού μοντέλου έχουν προταθεί. Μεταξύ αυτών, η αποσβένουσα (3.6) και η ελίσσόμενη (3.7) έκδοση του μοντέλου *Eguchi – Kawai*, η γενίκευσή της με δυναμικά συζυγή φερμιόνια (παράγραφος 3.8), ή με διπλού ίχνους παραμορφώσεις της δράσης *Yang – Mills* παράγραφος (3.9). Ακόμα θα συζητήσουμε μια προσέγγιση που εκμεταλλεύεται την μερική μείωση του όγκου στο μοντέλο *Eguchi – Kawai*, μέχρι του μικρότερου δυνατού χώρου του lattice για τον οποίο διατηρείται η κεντρική συμμετρία, (3.10). Στην παράγραφο (3.11) θα δούμε πως διάφορες αντιστοιχίες μεταξύ διαφορετικών θεωριών μεγάλου N μπορούν να προσεγγιστούν με όρους ισοδυναμιών μεταξύ *orbifolds*.

3.1 Παραγοντοποίηση

Πολλές από τις μαθηματικές απλοποιήσεις που χαρακτηρίζουν τις θεωρίες πεδίου και τα στατιστικά μοντέλα που σχετίζονται με αυτές, γίνονται άμεσα φανερά από τους συνδιαστικούς κανόνες των υπολογισμών για μεγάλο- N . Συγκεκριμένα, στον υπολογισμό των αναμενόμενων τιμών των προϊόντων των βαθμωτά-αναλλοίωτων τελεστών \mathcal{O}_i στις θεωρίες βαθμίδας για μεγάλο N , αυτό υποδηλώνει ότι οι κυρίαρχες συνεισφορές προέρχονται από ασύνδετους όρους. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι συνδέονται με το μέγιστο αριθμό ίχνων χρώματος, και άρα με το μέγιστο αριθμό ανεξάρτητων δεικτών χρώματος που αθροίζονται:

$$\langle \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \rangle = \langle \mathcal{O}_1 \rangle \langle \mathcal{O}_2 \rangle + O(1/N). \quad (105)$$

Η παραπάνω εξίσωση δείχνει ότι το μεγάλο N παρουσιάζει ομοιότητες με δύο διαφορετικά όρια στη κβαντική θεωρία πεδίου. Από την άλλη πλευρά, μπορεί να θεωρηθεί ως θερμοδυναμικό όριο, για παράδειγμα σε ένα σύστημα που χαρακτηρίζεται από το μήκος συσχέτισης, ενώ η εξίσωση (105) είναι ανάλογη με το νέφος αποσύνθεσης στατιστικά, που δίνει διορθώσεις τάξης έως $O(1/V)$.

3.2 Μια περιγραφή με όρους κλασικής μηχανικής του ορίου για μεγάλο N

Όπως είναι γνωστό, ένα κλασικό σύστημα αναπτύσσεται κατά μοναδικό τρόπο στο όριο $\hbar \rightarrow 0$ της κβαντικής θεωρίας, όταν μελετάμε τη συμπεριφορά στη βάση των συνδεδεμένων καταστάσεων. Η τελευταία μορφή μίας υπερπλήρης βάσης, που επιτρέπει να γράψουμε όλους τους τελεστές αποκλειστικά με τους όρους των διαγώνιων στοιχείων τους, και να έχουμε αποσβένουσες επικαλύψεις στο όριο $\hbar \rightarrow 0$. Μαζί αυτές οι δύο ιδιότητες οδηγούν στην παραγοντοποίηση των αναμενόμενων τιμών των προϊόντων των τελεστών, και γίνεται σαφής η ντετερμινιστική φύση του ορίου, από το γεγονός ότι για $\hbar \rightarrow 0$ οι συνδεδεμένες καταστάσεις χαρακτηρίζονται από ταυτόχρονα αποσβένουσες αβεβαιότητες για τις συνδεδεμένες μεταβλητές. Σε αυτό το όριο, ο κλασικός χώρος των φάσεων μπορεί να ορίζεται ως το manifold (πολλαπλότητα), των συντεταγμένων που χαρακτηρίζουν διαφορετικές συνδεδεμένες καταστάσεις. Η Χαμιλτονιανή (για την ακρίβεια, το σετ των διαγώνιων στοιχείων των πινάκων, που αποκαλείται και -σύμβολο-, στη βάση των συναφών καταστάσεων), μπορεί να καθοριστεί στο κλασικό της αντίστοιχο (που ελαχιστοποιείται από τις λύσεις των κλασικών εξισώσεων κίνησης), και η κλασική λαγκρανζιανή λαμβάνεται από το μετασχηματισμό Λεζάντρ.

Αυτή η κατασκευή μπορεί να επαναληφθεί για το μεγάλο- N γενικεύοντας την ομάδα *Heisenberg* σε ένα κατάλληλο συναφές σύνολο, κατασκευασμένο από κατάλληλες συντεταγμένες και ορμές. Επιλέγοντας ένα συναφές σύνολο για κάθε τιμή του N έτσι ώστε να είναι αμοιβαία τα στοιχεία του στο χώρο *Hilbert* \mathcal{H}_N της αντίστοιχης θεωρίας, και μια κατάσταση αναφοράς $|0\rangle_N$, μπορούμε να κατασκευάσουμε όλες τις συνδεδεμένες καταστάσεις $|a\rangle_N$ ως παράγοντες του συναφούς συνόλου στο $|0\rangle_N$. Η συνθήκη της αμοιβαιότητας μας επιτρέπει να εκφράσουμε κάθε τελεστή σα γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του συναφούς συνόλου. Για τις βαθμωτές θεωρίες, το συναφές σύνολο παράγεται από βρόχους Wilson, πιθανόν με την εισαγωγή και χρωμοηλεκτρικών πεδίων.

Θεωρώντας ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ των γραμμικών τελεστών στο \mathcal{H}_N και των -συμβόλων- τους στις συναφείς καταστάσεις είναι ένα προς ένα, μπορούμε να θεωρήσουμε τους τελεστές \mathcal{O}_N της οποίας οι παράγοντες στη βάση των συναφών καταστάσεων έχουν ένα ομαλό όριο στο μεγάλο N :

$$\exists \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle a | \mathcal{O} | \beta \rangle_N}{\langle a | \beta \rangle_N} \quad (106)$$

και εισαγάγουν μια σχέση ισοδυναμίας ανάμεσα στις συναφείς καταστάσεις, $|a\rangle \sim |\beta\rangle$, που καθορίζεται από την προϋπόθεση ότι, για όλους τους τελεστές που ικανοποιούν την προηγούμενη εξίσωση, λαμβάνουμε:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\langle a | \mathcal{O} | a \rangle_N - \langle \beta | \mathcal{O} | \beta \rangle_N) = 0. \quad (107)$$

Εάν εκπρόσωποι διακριτών ισοδύναμων καταστάσεων που καθορίζονται από αυτή τη σχέση έχουν εκθετικά ελαττούμενες επικαλύψεις για $N \rightarrow \infty$, και αν ο τελεστής \mathcal{H}/N ικανοποιεί την εξίσωση (106), τότε μπορεί ναδειχθεί ότι, για $N \rightarrow \infty$, η αρχική θεωρία συρρικνώνεται στη θεωρία της κλασικής μηχανικής που καθορίζεται στη συζυγή τροχιά του συναφούς συνόλου, και η \mathcal{H}/N τίνει στην αντίστοιχη κλασική Ερμιτιανή.

Παρότι η συλλογιστική αυτής της παραγράφου δείχνει ότι είναι δυνατό να κατασκευαστεί μια κατάλληλη απεικόνιση της κβαντικής θεωρίας για μεγάλο N σε ένα σύστημα κλασικής μηχανικής, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι, γενικά, αυτό δεν υποδηλώνει ότι τα βασικά πεδία της κβαντικής θεωρίας για μεγάλο N , περιγράφονται από τις κλασικές εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από τη λαγκρανζιανή πυκνότητα. Ο λόγος είναι ότι το παραγόμενο συναρτησιακό του συστήματος παρουσιάζει ένα εκθετικό, που δέχεται συνεισφορές τάξης $O(N^2)$, όχι μόνο για τη δράση, αλλά και για το μέτρο, εξαιτίας της ολοκλήρωσης πάνω σε $O(N^2)$ βαθμούς ελευθερίας των βαθμωτών πεδίων [216].

3.3 Ανεξαρτησία χωροχρόνου και κύριο πεδίο

Η κατασκευή που σχηματίζεται από πάνω, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί μια μοναδική λύση στο μεγάλο N για συγκεκριμένες κατηγορίες μοντέλων [217, 218], αλλά όχι για τις πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις βαθμωτών θεωριών, με την εξαίρεση των μονο-πλεγματικών πλεγμάτων. Παρότι η τελευταία αυτή περίπτωση δείχνει παράδοξη από φυσικής πλευράς, φαίνεται ότι οι ιδιότητες παραγοντοποίησης που εκφράζονται από την εξίσωση (105) έχουν πιθανές περιπλοκές λόγω της χωροχρονικής εξάρτησης από τη θεωρία του μεγάλου N . Για $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ η εξ. (105) δείχνει ότι οι κβαντικές διαταραχές καταπιέζονται στο μεγάλο N συνεπώς είναι λογικό να αναμένουμε ότι, για $N \rightarrow \infty$, η ολοκλήρωση διαδρομών κυριαρχείται από μία ενιαία διαμόρφωση (ή πιο συνηθέστερα, βαθμωτή τροχιά). Αυτό ερμηνεύτηκε ως κλασικό πεδίο από τον *Witten* και αργότερα βαπτίστηκε "κυρίαρχο πεδίο" από τον *Coleman*.

3.4 Εξισώσεις βρόχων

Η χωροχρονική εξάρτηση από το κυρίαρχο πεδίο, σχετίζεται με την παραγοντοποίηση του μεγάλου N για τις αναμενόμενες τιμές των προϊόντων των βαθμωτά αναλλοίωτων τελεστών, που εκφράζεται από την εξ. (105). Άλλη σημαντική συνέπεια της ίδιας εξίσωσης, είναι ότι για $N \rightarrow \infty$, μπορούμε να εξαγάγουμε ένα κλειστό σύστημα των εξισώσεων

Schwinger – Dyson για τις αναμενόμενες τιμές των φυσικών τελεστών, όπως τα ίχνη των βρόχων *Wilson* μίας περιφέρειας \mathcal{C} μίας θεωρίας βαθμίδας:

$$\frac{1}{N}TrW(C) = \frac{1}{N}Tr \left[\mathcal{P}exp \left(ig \oint_C A_\mu^a(x) dx^\mu \right) \right] \quad (108)$$

(όπου \mathcal{P} εκφράζει τη διαδρομή-ολοκλήρωσης), που επιτρέπει να επανασχεδιάσουμε τη θεωρία με ένα βαθμωτά αναλλοίωτο τρόπο [228].

Παίρνοντας την τοπική παράγωγο ενός βρόχου *Wilson* σε ένα σημείο, αντιστοιχεί με την εισαγωγή της έντασης του πεδίου σε αυτό το σημείο [229]:

$$\frac{\delta}{\delta\sigma_{a\beta}(x)} \frac{1}{N}TrW(C) = \frac{i}{N}Tr [F^{a\beta}(x)W(C)]. \quad (109)$$

Δρώντας με την μερική παράγωγο σε ένα βρόχο *Wilson* με την προσθήκη του τοπικού τελεστή \mathcal{O} σε δεδομένο σημείο x έχει το αποτέλεσμα να αντικαθίσταται το \mathcal{O} με τη συναλλοίωτη παράγωγο στο x :

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{1}{N}Tr[\mathcal{O}(x)W(C)] = \frac{1}{N}Tr[(D_\mu\mathcal{O}(x))W(C)], \quad (110)$$

από την άλλη πλευρά στα συναρτησιακά τύπου Stoke, η μερική παράγωγος φθίνει για όλα τα σημεία κατά μήκος του βρόχου.

Ο παραπάνω υπολογισμός του βρόχου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διαχωριστούν οι εξισώσεις που περιγράφουν το αναλλοίωτο του παρακάτω ολοκληρώματος:

$$\int \mathcal{D}A \frac{1}{N}Tr(T^a W(C)) exp \left(i \int dt d^3x \mathcal{L} \right), \quad (111)$$

όπου ως βασικό σημείο του βρόχου C λαμβάνεται το χ , δηλαδή η T^a εισάγεται στο σημείο x κάτω από τους συντελεστές του βαθμωτού πεδίου, A_μ^b . Κατά την συστολή των δεικτών χρώματος σύμφωνα με τις ταυτότητες *Fierz* της άλγεβρας χρώματος, οδηγούμαστε στην εξίσωση:

$$\partial_\mu \frac{\delta}{\delta\sigma_{\mu\sigma}(x)} \left\langle \frac{1}{N}TrW(C) \right\rangle = \lambda \oint dy^\nu \delta(D)(x-y) \left[\left\langle \frac{1}{N^2}TrW(C_{x,y})TrW(C_{y,x}) \right\rangle - \frac{1}{N^2} \left\langle \frac{1}{N}TrW(C) \right\rangle \right], \quad (112)$$

όπου $C_{x,y}$ και $C_{y,x}$ υποδηλώνουν δύο συμπληρωματικά τμήματα του βρόχου C .

Η εξίσωση (112) ισχύει για κάθε τιμή του N , ωστόσο δεν είναι κλειστή εξίσωση στο χώρο των βρόχων, γιατί γενικά, το προϊόν των ίχνων που εμφανίζονται στο δεξί μέλος δεν είναι γραμμικός συνδιασμός των απλού ίχνους βρόχων των τελεστών. Στο όριο του μεγάλου N ωστόσο, η παραγοντοποίηση μας επιτρέπει να γράψουμε αυτούς τους όρους ως προϊόν των αναμενόμενων τιμών δύο απλού ίχνους τελεστών, και να απορρίψουμε τον τελευταίο όρο ως αμελητέο, οδηγούμενοι στην εξίσωση:

$$\partial_\mu \frac{\delta}{\delta \sigma_{\mu\sigma}(x)} \langle \frac{1}{N} \text{Tr} W(C) \rangle = \lambda \oint dy^\nu \delta(D)(x-y) \langle \frac{1}{N} \text{Tr} W(C_{x,y}) \rangle \langle \frac{1}{N} \text{Tr} W(C_{y,x}) \rangle + O(1/N^2), \quad (113)$$

που είναι μία κλειστή εξίσωση στο χώρο των βρόχων.

Η εξίσωση (113) είναι μία γεωμετρική εξίσωση με σημαντική επίδραση. Συγκεκριμένα, η κατασκευή μιας περιοδικής λύσης, ξεκινώντας από την επέκταση του κατά-διαδρομή βρόχου *Wilson* $W(C)$ σε μία σειρά κυκλικά διαταγμένων συναρτήσεων *Green*, αναπαράγει το σετ των επίπεδων διαγραμμάτων που δίνουν τις μη φθήνουσες συνεισφορές στη $W(C)$ στο όριο για μεγάλο N .

Στο μη-διαταραγμένο όριο, μια ρητή λύση της (113) δεν μπορεί να βρεθεί [230], ακόμη και για την περίπτωση των ασυμπτωτικά μεγάλων βρόχων η προκύπτουσα για την εξ. (113) τάση χορδής δεν μπορεί να υπολογιστεί. Η *Nambu – Goto* μποζονική δράση στο string [231, 232] που περιγράφει βρόχους *Wilson* με όρους διαταραγμένων επιφανειών, με μία δράση ανάλογη της επιφάνειάς τους, που ήταν μία υποψήφια θεωρία χορδών για την "υπέρυθρη QCD" από τη δεκαετία του '70 [233, 234, 235], δεν είναι συμβατή με την εξ. (113). Τέλος μια λύση της εξ. (113) παίρνει τη μορφή του φερμιονικού πεδίου για τη θεωρία χορδών, περιγράφοντας τα δυναμικά για σημειακά σπινორιακά πεδία *Majorana* στην επιφάνεια που οριοθετείται από το βρόχο.

3.5 Το μοντέλο Eguchi-Kawai

Ανάλογες εξισώσεις με την (113) μπορούν να κατασκευαστούν στο lattice [236, 237, 238]. Αυτό οδήγησε τους *Eguchi* και *Kawai* να ανακαλύψουν την ιδιότητα της μείωσης όγκου [239], που αν οι απαραίτητες συνθήκες ικανοποιούνται, παρέχει μια σαφή υλοποίηση της χωροχρονικής ανεξαρτησίας για μεγάλο N που υποδηλώνεται και από την ιδέα του αναλλοίωτου κύριου πεδίου. Η διατύπωση της μείωσης *EK* είναι ότι αν:

1. η παραγοντοποίηση των αναμενόμενων τιμών στο κενό των φυσικών τελεστών της εξίσωσης (105) ισχύει και
2. η γενική Z_N κεντρική συμμετρία του συστήματος (βλέπε και παράγραφο 1.5) για κάθε μία από τις τέσσερις Ευκλείδιες διαστάσεις δε σπάει στιγμιαία,

τότε οι εξισώσεις *Schwinger – Dyson* που ικανοποιούνται από τις αναμενόμενες τιμές στο κενό των βρόχων *Wilson* στην $SU(N)$ θεωρία *Yang – Mills* για μεγάλο- N στο lattice, είναι ανεξάρτητες από τον φυσικό υπερχώρο του συστήματος. Σαν αποτέλεσμα, θεωρώντας ότι αυτές οι εξισώσεις έχουν μια μοναδική λύση, και οι φυσικές ποσότητες της θεωρίας είναι ανεξάρτητες από τον υπερχώρο του συστήματος. Να σημειωθεί ότι η δεύτερη συνθήκη που αναφέρθηκε πηγάζει από το γεγονός ότι, εξαιτίας της αναλλοιωσιμότητας βαθμίδας, οι αναμενόμενες τιμές για τις ανοικτές γραμμές *Wilson*, για πεπερασμένο μήκος, σβήνουν στη θεωρία μεγάλου όγκου, ενώ στην θεωρία ελαττούμενου χώρου, εάν το γραμμικό μέγεθος του συστήματος ισούται με το μέγεθος της γραμμής, γίνονται αμελητέα μόνο όταν η γενική κεντρική συμμετρία Z_N (η οποία τίνει στην $U(1)^4$ στο όριο $N \rightarrow \infty$) διατηρείται.

Ως συνέπεια, εάν οι ανωτέρω συνθήκες ικανοποιούνται, μπορούμε να μελετήσουμε τη θεωρία πλέγματος για μεγάλο N , απλοποιώντας την σε ένα μοντέλο πλέγματος απλού-σημείου, δηλαδή σε ένα μοντέλο τεσσάρων μόνο πινάκων U_μ που περιγράφουν τις παράλληλες μεταφορές στις τέσσερις ευκλείδιες χωροχρονικές κατευθύνσεις. Η σημασία αυτής της παρατήρησης είναι ότι εάν δύο συνθήκες ικανοποιούνται, τότε το γεγονός της ανεξαρτησίας του όγκου της θεωρίας μπορεί να επιτρέψει τη μελέτη των μη-διαταραγμένων δυναμικών αναλυτικά. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της μείωσης των εξισώσεων της κβαντικής θεωρίας πεδίου σε ένα πεπερασμένο χωροχρόνο, στην εξίσωση της θεωρίας περιορισμένη σε ένα απλό σημείο, δηλαδή στην εξίσωση *Schrodinger* της κλασικής κβαντομηχανικής [240].

3.6 Αποσβένουσα ορμή και το αποσβένων μοντέλο *Eguchi-Kawai*

Παρότι μοιάζει μια ελκυστική ιδέα, από την αρχή έγινε κατανοητό ότι η ελάττωση όγκου για την απλή θεωρία *Yang – Mills* ανάμεσα στα πλαίσια της αυθεντικής πρότασης των *EK* δεν μπορεί να δουλέψει. Ο λόγος είναι η αποτυχία της δεύτερης απαραίτητης προϋπόθεσης που παρατίθεται παραπάνω. Μειώνοντας το μέγεθος του πλέγματος, η κεντρική συμμετρία σπάει αυθόρμητα, τουλάχιστον στις συζεύξεις που είναι σχετικές με το συνεχές όριο. Αυτό μπορεί να φανεί στο όριο της θεωρίας διαταραχών: Δείχνει τις ιδιοτιμές των πινάκων U_μ στο μοντέλο *Eguchi – Kawai* ως $\exp(i\theta_\mu^a)$ με $1 \leq a \leq N$, το δυναμικό απλού βρόχου που προκύπτει από τις φάσεις θ_μ^a αποδεικνύεται ότι είναι καλό για όλες τις χωροχρονικές διαστάσεις $D > 2$, οδηγώντας σε αυθόρμητο σπάσιμο της κεντρικής συμμετρίας.

Μια πρώτη πιθανή λύση για την διατήρηση της κεντρικής συμμετρίας έχει προταθεί [241], το αποσβένον μοντέλο *Eguchi-Kawai*. Το μοντέλο αυτό βασίζεται στην ιδέα του υπολογισμού των αναμενόμενων τιμών στο περιορισμένο μοντέλο σε σταθερές τιμές των θ_μ^a , και μετά βρίσκοντας ένα μέσω πάνω σε αυτές τις τιμές, σύμφωνα με την κατάλληλη κατανομή πιθανότητας για τα θ_μ^a , που επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε η κεντρική συμμετρία να επανέρχεται ρητά.

Ο τρόπος με τον οποίο η ανεξαρτησία του όγκου μπορεί να προκύψει στο *EK* μοντέλο, ο τρόπος με τον οποίο αποτυγχάνει εξαιτίας του αυθόρμητου σπασίματος της κεντρικής συμμετρίας, και ο τρόπος που το πρόβλημα λύνεται (στο όριο των διαταραχών) στο αποσβένον μοντέλο, μπορούν να γίνουν κατανοητά μέσω μιας κατάλληλης χαρτογράφησης των βαθμών ελευθερίας που συνδέονται με τέσσερις διαφορετικές ορμές, στην αυθεντική επίπεδη θεωρία για μεγάλο όγκο, σε καταχωρήσεις πινάκων του μεντέλου απλού σημείου

[242-246]. Αυτό στηρίζεται στην ακόλουθη παρατήρηση: για μια γενική θεωρία -είτε για την γενική είτε για την βαθμωτή αναλλοιωσιμότητα της $U(N)$ - (με πεδία διάστασης 2 της ομάδας όπως π.χ. η συζυγής απεικόνιση), οι θεμελιώδεις γραμμές ενός γενικού διαγράμματος *Feynman* που εκφράζονται σε μία έκφραση διπλής-γραμμής είναι κλειστές και μη-τέμνουσες. Έτσι, η διατήρηση της ορμής σε κάθε κορυφή του διαγράμματος ικανοποιείται αυτόματα εάν συνδέσουμε μία γενική τετραορμή p_μ^a σε κάθε θεμελιώδη γραμμή, και η ορμή που δίνεται από τον διαδότη σε σχέση με τους δείκτες αντίθετης διεύθυνσης a και β προκύπτει $p_\mu^{a\beta} = p_\mu^a - p_\mu^\beta$. Μέσω αυτής της παρατήρησης, μπορεί ναδειχθεί ότι, αντικαθιστώντας κάθε όρο της $i\partial_\mu$ στην αρχική δράση της συνεχούς θεωρίας με τη συζυγή δράση του πίνακα:

$$P_\mu = \text{diag}(p_\mu^1, p_\mu^2, \dots, p_\mu^N), \quad (114)$$

ή αντίστοιχα αντικαθιστώντας τον τελεστή $\exp(a\partial_\mu)$ με $\exp(ia[P_\mu, *])$ στη θεωρία *lattice*, μπορούμε να πάρουμε τους διαδότες που είναι ισοδύναμοι με αυτούς της αρχικής θεωρίας [247, 248]. Αυτή η μέθοδος, που ονομάζεται "μέθοδος αποσβένουσας ορμής", μετακινεί την εξάρτηση του χωροχρόνου του αρχικού πίνακα πεδίου από τη θεωρία, μετατρέποντας τη δράση της αρχικής θεωρίας σε συνάρτηση ενός σταθερού πίνακα και των διαγώνιων πινάκων P_μ , έτσι ώστε ως παράδειγμα οι αναμενόμενες τιμές στο κενό της \mathcal{O} μπορούν να προκύψουν υπολογίζοντας πρώτα την τιμή της για δεδομένη ορμή P_μ και μετά ολοκληρώνοντας πάνω στην κατανομή των P_μ . Η θεωρία που προκύπτει από τη διαδικασία της αποσβένουσας ορμής έχει το ίδιο επίπεδο όριο όπως η αυθεντική θεωρία, τουλάχιστον για κάθε πεπερασμένη τάξη της θεωρίας διαταραχών [249].

Ταυτοποιώντας κάθε $i\partial_\mu$ με τον αντίστοιχο πίνακα P_μ όπως προκύπτει από την εξίσωση (114), εφαρμόζοντας τα βήματα της αποσβένουσας ορμής, αντιστοιχώντας την ομάδα των χωροχρονικών αντιστοιχίσεων σε όρους βαθμών ελευθερίας της διαγώνιας υποομάδας $U(1)^N$ της $U(N)$, τόσο για τη γενική όσο και για τη βαθμωτή συμμετρία.

Για τη βαθμωτή θεωρία, περιορίζοντας την προσοχή μας στην απλή θεωρία *Yang–Mills*, η διαδικασία της αποσβένουσας ορμής είναι:

$$A_\mu(x) = \exp(iP_\nu x^\nu) A_\mu \exp(-iP_\nu x^\nu), \quad iD_\mu \rightarrow P_\mu + A_\mu, \quad (115)$$

όταν εφαρμόσουμε το φορμαλισμό του πλέγματος, χρησιμοποιώντας $D_\mu = \exp(iaP_\mu)$ μας δίνει:

$$\bar{S}(U_\mu, P_\mu) = \frac{2N}{\lambda} \sum_{1 \leq a < \beta \leq 4} \text{ReTr}[U_a D_a U_\beta D_\beta (U_a D_a)^\dagger (U_\beta D_\beta)^\dagger], \quad (116)$$

όπου με αντικατάσταση των μεταβλητών $U_a \rightarrow U_a D_a^\dagger$ είναι ισοδύναμη με το μοντέλο *Eguchi–Kawai*:

$$\bar{S}(U_\mu, P_\mu) = \frac{2N}{\lambda} \sum_{1 \leq a < \beta \leq 4} \text{ReTr}(U_a U_\beta U_a^\dagger U_\beta^\dagger). \quad (117)$$

Οι κλασικές λύσεις που ελαχιστοποιούν το \bar{S} είναι διαγώνια μοναδιαίοι πίνακες.

Η συνάρτηση επιμερισμού και οι αναμενόμενες τιμές της αυθεντικής θεωρίας πλέγματος, λαμβάνονται υπολογίζοντας τις αντίστοιχες ποσότητες στο μοντέλο που περιγράφεται από την εξίσωση (117), για συγκεκριμένα P_μ και μετά υπολογίζοντας πάνω στην κατανομή των D_μ . Παίρνοντας το τελευταίο βήμα είναι καλό να εκφράσουμε το μέτρο της ολοκλήρωσης *Haar* για κάθε D_μ σε όρους των ιδιοτιμών $\exp(iap_\mu^k)$, που δίνουν την διακρίνουσα *Vandermonde* $\Delta(D_\mu)$:

$$dD_\mu = \prod_{k=1}^N \frac{dp_\mu^k}{2\pi} \prod_{1 \leq \beta < c \leq N} \sin^2 \left(\frac{p_\mu^b - p_\mu^c}{2} a \right) = \prod_{k=1}^N \frac{dp_\mu^k}{2\pi} \Delta(D_\mu) \quad (118)$$

όπου στην περίπτωση της $SU(N)$, οι φάσεις των ιδιοτιμών κάθε πίνακα D_μ περιορίζονται στο άθροισμα ενός ακεραίου πολλαπλασίου του 2π . Τα δυναμικά του μοντέλου *EK* στην περίπτωση της ασθενούς σύζευξης μπορούν να μελετηθούν μέσω του φαινομένου των κβαντικών διαταραχών γύρω από την κλασική λύση υπολογισμένη στην πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών. Αυτό απαιτεί μια κατάλληλη ρύθμιση της βαθμίδας και της αντίστοιχης διακρίνουσας *Faddeev – Popov*, έτσι ώστε το μέτρο του ολοκληρώματος των D_μ να γίνεται ανάλογο της έκφρασης:

$$\prod_{\mu=1}^D \prod_{k=1}^N \frac{dp_\mu^k}{2\pi} \exp \left(-(D-2) \sum_{1 \leq b < c \leq N} \ln \left[\sum_{\nu=1}^D \sin^2 \left(\frac{p_\nu^b - p_\nu^c}{2} a \right) \right] \right) \quad (119)$$

Η εξίσωση (119) δείχνει ότι η ομοιόμορφη κατανομή των p_μ^a είναι αμετάβλητη ποσότητα του εκθετικού και αντιστοιχεί στο ελάχιστο του στατιστικού βάρους για $D > 2$. Ως συνέπεια αυτού, οι κβαντικές διακυμάνσεις οδηγούν στο σπάσιμο των p_μ^a και συνεπώς, στο αυθόρμητο σπάσιμο της κεντρικής συμμετρίας, που με τη σειρά της ακυρώνει την αντιστοιχία του μειωμένου μοντέλου στη θεωρία του μεγάλου-όγκου.

Ένας δυνατός τρόπος να αποφευχθεί το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας, γίνεται με την τροποποίηση του μέτρου της ολοκλήρωσης των U_μ έτσι ώστε η εξάρτηση από τα P_μ να εκμηδενίζεται. Έχει επίσης προταθεί να γίνεται το ίδιο μέσω της απαίτησης οι ιδιοτιμές της συναλλοιώτης $U_\mu D_\mu$ στο πλέγμα να είναι ίση με αυτή της D_μ για κάθε μ , μέσω του περιορισμού:

$$U_\mu D_\mu = V_\mu D_\mu V_\mu^\dagger, \quad (120)$$

που είναι βαθμωτά-αναλλοίωτη έκφραση. Αυτό οδηγεί στο ολοκληρωτικό μέτρο:

$$\prod_{\mu} dU_{\mu} dV_{\mu} \Delta(D_{\mu}) \delta(U_{\mu} D_{\mu} - V_{\mu} D_{\mu} V_{\mu}^{\dagger}), \quad (121)$$

που περιλαμβάνει ολοκλήρωση πάνω σε όλους τους βαθμούς ελευθερίας του μοναδιαίου πίνακα V_{μ} που απεικονίζει το D_{μ} στο $U_{\mu} D_{\mu}$. Αλλάζοντας $U_{\mu} \rightarrow U_{\mu} D_{\mu}^{\dagger}$, η ολοκλήρωση πάνω στα U_{μ} μπορεί να γίνει άμεσα, οδηγώντας στην ακόλουθη δράση:

$$\bar{S} = \frac{2N}{\lambda} \sum_{1 \leq a < \beta \leq 4} \text{ReTr} \left[V_a D_a V_a^{\dagger} V_{\beta} D_{\beta} V_{\beta}^{\dagger} V_a D_a^{\dagger} V_a^{\dagger} V_{\beta} D_{\beta}^{\dagger} V_{\beta}^{\dagger} \right], \quad (122)$$

τέλος απομένει η ολοκλήρωση πάνω στα p_{μ}^a με μια ομοιόμορφη κατανομή για να καταλήξουμε στο τελικό *EK* μοντέλο. Έτσι στο επίπεδο των διαταραχών το αποτέλεσμα των βαθμωτά αναλλοίωτων περιορισμών της εξίσωσης (120), είναι να αντικαθιστά το μη-ομοιόμορφο βάρος για τα p_{μ}^a του αρχικού μοντέλου της εξίσωσης (119), που προκαλεί το αυθόρμητο σπάσιμο της κεντρικής συμμετρίας, με μια ομοιόμορφη κατανομή για τα p_{μ}^a που επαναφέρει ρητά την κεντρική συμμετρία.

Παρότι οι αρχικοί υπολογισμοί έδωσαν ενδείξεις επιβεβαιώνοντας την αποτελεσματικότητα της μείωσης του όγκου στην αποσβένουσα μέθοδο *EK* και στη μη-διαταραγμένη περιοχή, αυτές οι παρατηρήσεις απορρίφθηκαν πρόσφατα από λεπτομερείς εργασίες. Ο αναλυτικός μηχανισμός που ευθύνεται για την αποτυχία της μείωσης του όγκου στο αποσβένον μοντέλο *Eguchi – Kawai* προκύπτει από την μελέτη της εξίσωσης (120), που παίζει ένα σημαντικό ρόλο στο μοντέλο, όταν εκφράζεται για τα νέα U_{μ} της εξίσωσης (122), παίρνει τη μορφή αποσύνθεσης των πινάκων U_{μ} , $U_{\mu} = V_{\mu} D_{\mu} V_{\mu}^{\dagger}$.

Η κρίσιμη παρατήρηση της τελευταίας έκφρασης είναι ότι διορθώνει τις ιδιοτιμές των U_{μ} πινάκων μέχρι του σημείου των μεταθέσεων. Γενικά, διαμορφώσεις του μειωμένου μοντέλου, όπου ιδιοτιμές των U_{μ} που διαφέρουν μόνο λόγω των μεταθέσεων, δίνουν διαφορετικές τιμές για την απλοποιημένη δράση της εξίσωσης (122). Έτσι, εάν οι δυναμικές διαταραχές των V_{μ} μπορούν να προκαλέσουν φαινόμενα σύραγγας μεταξύ των διαμορφώσεων, το αποσβένων σύστημα επιλέγει τις ενεργειακά πιο συμφέρουσες διαμορφώσεις, εισάγωντας μη-τετριμμένες συσχετίσεις μεταξύ των U_{μ} κατά μήκος διαφορετικών κατευθύνσεων, και οδηγούν στη μη-ομοιόμορφη δειγματοληψία της γλουονικής ορμής.

Το φαινόμενο που περιγράφηκε από πάνω, παρατηρείται στην πράξη. Για δεδομένη σύζευξη υπάρχουν διαμορφώσεις μεταξύ των μεταθέσεων των ιδιοτιμών, των οποίων το ενεργειακό κόστος δεν αυξάνεται στο όριο $N \rightarrow \infty$. Η συνθήκη παραγοντοποίησης, που είναι απαραίτητη για τη μείωση του όγκου, γενικά παραβιάζεται υπό την παρουσία διορθώσεων μεταξύ των U_{μ} σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Αυτό φαίνεται θεωρώντας για παράδειγμα γραμμές *Wilson* της μορφής:

$$M_{a\beta} = (1/N) \text{Tr}(U_a U_{\beta}) \quad \mu\epsilon \ a \neq \beta, \quad (123)$$

των οποίων η μορφή σε μία τυπική συγκεκριμένης ορμής διαμόρφωση είναι ένας σύνθετος αριθμός με μέτρο $O(1)$ και με γενική, εξαρτώμενη από την ορμή, φάση. Ο μέσος όρος των τιμών των ορμών, $\langle M_{\alpha\beta} \rangle$ γενικά εξαφανίζεται, ενώ η $\langle M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}^\dagger \rangle$ στην οποία η εξαρτώμενη από την ορμή φάση βγαίνει έξω, παραμένει πεπερασμένη.

3.7 Το περιπλεγμένο μοντέλο Eguchi-Kawai

Μία διαφορετική εκδοχή του μοντέλου EK προτάθηκε από τους *Gonzalez – Arroyo* και *Okawa*, το περιπλεγμένο μοντέλο EK [251, 252]. Αυτή η πρόταση βασίζεται στην παρατήρηση ότι η συμπεριφορά στη θεωρία διαταραχών του μοντέλου *EK* μπορεί να άρεται, με τρόπο που αποκλείει το αυθόρμητο σπάσιμο της κεντρικής συμμετρίας, αλλάζοντας τις συνοριακές συνθήκες με κατάλληλη αλλαγή των όρων $z_{\alpha\beta}$ [253, 254].

Ανάλογα με το αποσβέον μοντέλο, το περιπλεγμένο μοντέλο μπορεί να εκφραστεί σε μορφή ανεξάρτητη του όγκου. Αυτό γίνεται με την περιγραφή του συνόλου των χωροχρονικών μεταφράσεων της αρχικής θεωρίας με όρους της Αβελιανής υποομάδας $SU(N)$. Η βασική παρατήρηση είναι ότι, για μια θεωρία πεδίων σε μία απεικόνιση της ομάδας που είναι άσχετη με τη δράση των κεντρικών μετασχηματισμών, όπως η αντίστροφη απεικόνιση, είναι πιθανό να απεικονίζονται εκφράσεις στον D -διάστατο χωροχρόνο με όρους $SU(N)$ πινάκων με μηδενικό ίχνος, που ικανοποιούν την *'t Hooft – Weyl* άλγεβρα:

$$\Gamma_\beta \Gamma_a = z_{\alpha\beta} \Gamma_a \Gamma_\beta = \exp(2\pi i n_{\alpha\beta}/N) \Gamma_a \Gamma_\beta, \quad a, \beta \in 1, 2, \dots, D \quad (124)$$

όπου το $n_{\alpha\beta}$ είναι αντισυμμετρικός πίνακας $D \times D$, τα στοιχεία του οποίου είναι ακέραια υπόλοιπα του N . Εναλλάσσοντας μόνο μέχρι ένα στοιχείο της κεντρικής ομάδας. Ξεκινώντας από ένα φορμαλισμό στο lattice της θεωρίας *Yanh – Mills*, το περιπλεγμένο μοντέλο EK μπορεί να προκύψει καθορίζοντας τα ακόλουθα προϊόντα των χορδών των πινάκων Γ_a σε κάθε θέση x :

$$V(x) = \prod_{\mu} \Gamma_{\mu}^{x_{\mu}}, \quad (125)$$

αντικαθιστώντας το $U_{\mu}(x)$ με:

$$U_{\mu}(x) \rightarrow V(x) U_{\mu} V^{\dagger}(x) \quad (126)$$

και κατόπιν με αλλαγή των μεταβλητών: $U_\mu \rightarrow U_\mu \Gamma_\mu^\dagger$. Τα πιο πάνω, οδηγούν σε δράση της μορφής:

$$S_{TEK} = -\frac{N}{\lambda} \sum_{1 \leq a < \beta \leq 4} [z_{a\beta} \text{Tr}(U_a U_\beta U_a^\dagger U_\beta^\dagger) + H.c.]. \quad (127)$$

Για κατάλληλες επιλογές των παραγόντων $z_{a\beta}$ δύναται να αποδειχθεί ότι, στο επίπεδο των διαταραχών, το μοντέλο που περιγράφεται από την εξίσωση (127) ικανοποιεί τις εξισώσεις *Schwinger – Dyson* ως η θεωρία που προσδιορίζεται σε έναν άπειρο όγκο, στο όριο για μεγάλο N . Συγκεκριμένα, καθώς η κλασική λύση δίνεται από την $U_a = \Gamma_a$, στο όριο της ασθενούς σύζευξης μια ανοικτή γραμμή *Wilson* από ένα αρχικό σε ένα γενικό σημείο x κυμαίνεται γύρω από το $V(x)$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι για κάθε δύο πίνακες $SU(N)$ που ικανοποιούν την (124) με περιπλεγμένο παράγοντα διάφορο της μονάδας, έχουν μηδενικό ίχνος. Κάνοντας χρήση αυτού, μπορούμε να δείξουμε ότι μια ικανή συνθήκη για τα ίχνη των ανοικτών γραμμών *Wilson* στο απλοποιημένο μοντέλο, προκειμένου να εξαφανίζονται, είναι τα $V(x)$ να εναλλάσσονται για όλα τα Γ_a . Έτσι για τη θεωρία στο πλέγμα πεπερασμένου όγκου, οι μόνες ανοικτές γραμμές *Wilson* των οποίων τα ίχνη μπορούν να έχουν μια μη-αποσβένουσα αναμενόμενη τιμή, είναι αυτές που στρέφονται γύρω από το *lattice* όπως οι βρόχοι *Polyakov*. Η τελευταία συνθήκη συνεπώς καταλήγει στην:

$$x_a n_{a\beta} / N \in \mathbb{Z}. \quad (128)$$

Στον τετραδιάστατο χωροχρόνο μια απλή λύση για την περίπτωση όπου το N είναι τέλειο τετράγωνο ($N = L^2$, $L \in \mathbb{N}_0$) δίνεται από μια συμμετρική στροφή: $n_{a\beta} = L$ για όλα τα $a < \beta$. Αυτό αποκαλύπτει ότι, γενικά, διορθώσεις πεπερασμένου- N στο περιπλεγμένο μοντέλο *EK* μπορούν να θεωρηθούν ως διορθώσεις πεπερασμένου όγκου, με τον τετραδιάστατο όγκο να αναπτύσσεται ανάλογα με το $L^4 = N^2$.

Εάν οι συνθήκες που εγγυώνται την ισοδυναμία μεταξύ του περιπλεγμένου μοντέλου *Eguchi – Kawai* και της θεωρίας που καθορίζεται στο πλέγμα πεπερασμένου μεγάλου όγκου ικανοποιούνται, οι αναμενόμενες τιμές συνδέονται με αυτές της θεωρίας και με τις συνοριακές συνθήκες κατά προφανή τρόπο. Για παράδειγμα οι αναμενόμενες τιμές των βρόχων *Wilson* μιας περιοχής A στο επίπεδο (a, β) πολλαπλασιάζονται απλά κατά έναν παράγοντα $\zeta_{a,\beta}^A$.

Για την απλούστερη συμμετρική περιέλιξη οι κλασικές λύσεις του περιπλεγμένου μοντέλου είναι της μορφής $U_a = \Gamma_a$, όπου τα Γ_a είναι σετ από $D \times N \times N$ ειδικούς μοναδιαίους πίνακες μηδενικού ίχνους που ικανοποιούν την εξίσωση (124). Αυτές οι διαμορφώσεις αντιστοιχούν στο ολικό ελάχιστο που μπορεί να πάρει η δράση της σχέσης (127) και έτσι λέγονται "απο-περιπλεγμένες" διαμορφώσεις [255, 256]]. Στις δύο χωροχρονικές διαστάσεις οι πίνακες Γ_a μπορούν να αναγνωριστούν με την "μετατόπιση":

$$S_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix} \quad (129)$$

και τη "στροφή":

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \omega & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \omega^3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega^{N-1} \end{pmatrix}, \quad \text{οπου} \quad \omega = \exp(2\pi i/N), \quad (130)$$

Οι δύο αυτοί πίνακες ικανοποιούν τη μικρή άλγεβρα 't Hooft:

$$S_N C_N = \exp(2\pi i/N) C_N S_N. \quad (131)$$

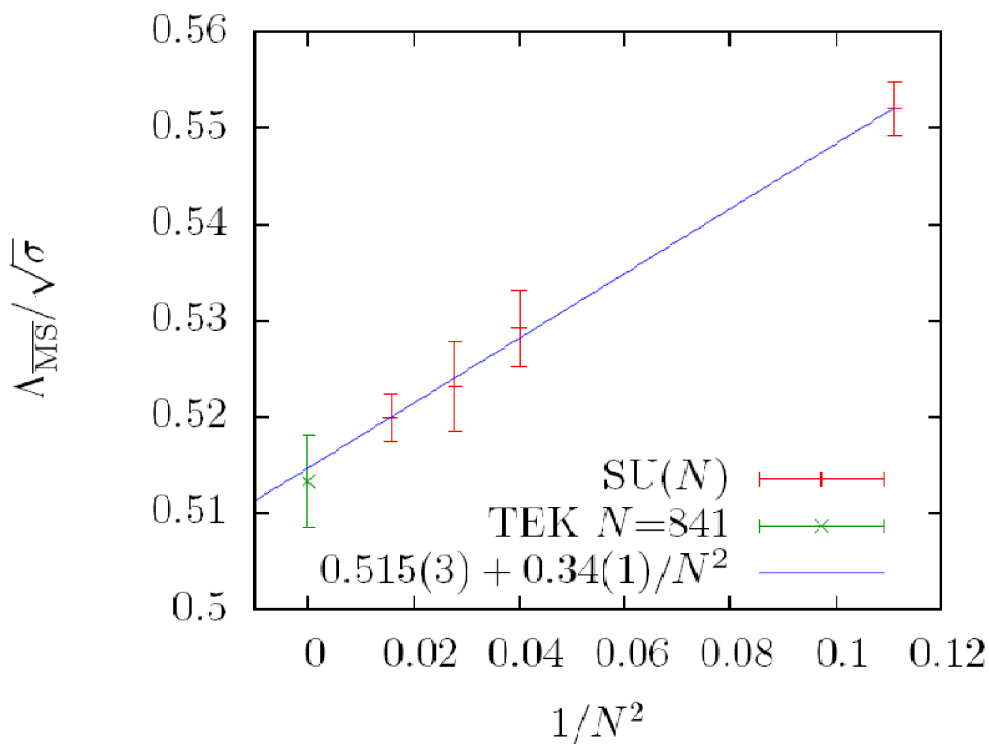
Στις τέσσερις διαστάσεις ανάλογοι πίνακες μπορούν να προέλθουν από τους τανυστές που προκύπτουν από τους παραπάνω πίνακες, παίρνοντας N να είναι τέλειο τετράγωνο ($N = L^2$) και αλλάζοντας το δείκτη N με L :

$$\Gamma_a = C_L^{\delta_{a,1}} S_L^{\delta_{a,2}} \otimes C_L^{\delta_{a,3}} S_L^{\delta_{a,4}}. \quad (132)$$

Μια συστηματική καταγραφή των λύσεων δίνεται από τον *van Baal* [257, 258] και δείχνει την ύπαρξη μη τετριμμένων σχηματισμών που μπορούν να διατηρούνται και στο μεγάλο N .

Η κατανομή των ιδιοτιμών των πινάκων U_μ για πολύ ισχυρή σύζευξη είναι ομοιόμορφη για τον κύκλο της συμμετρίας $U(1)$, έτσι η κεντρική συμμετρία δεν σπάει σε αυτό το όριο. Στο αντίθετο όριο ο σχηματισμός που αντιστοιχεί στην κλασική λύση είναι αναλλοίωτος για $\mathbb{Z}_L \subset \mathbb{Z}_N$. Σα συνέπεια, οι αναμενόμενες τιμές για τους τέσσερις βρόχους *Polyakov* στο περιπλεγμένο όριο *EK* εξασθενούν τόσο στην ισχυρή σύζευξη όσο και στο κλασικό όριο. Για να γίνει σαφές πως το συνεχές όριο προσεγγίζεται, ένα πρώτης τάξης ασθενούς-σύζευξης ανάπτυγμα γύρω από την απο-περιπλεγμένη λύση αποκαλύπτει ότι, παρότι οι διαδότες συμπίπτουν με αυτούς της θεωρίας πλέγματος, οι κορυφές επηρεάζονται γενικά από παράγοντες σχετικούς με την ορμή και η ολική φάση ενός δεδομένου διαγράμματος σχετίζεται με τη διάταξη κάθε σκέλους. Στο όριο για μεγάλο N αυτό οδηγεί σε ισχυρές ταλαντώσεις που καταπιέζουν τη συνεισφορά όλων των επίπεδων διαγραμμάτων.

Μη-διαταραγμένες μελέτες *Monte Carlo* του πεπλεγμένου μοντέλου *EK* γίνονται από τη δεκαετία του 1980 για τη θεωρία *Yang – Mills* στον τετραδιάστατο χώρο. Αυτές οι μελέτες παρέχουν αριθμητικές ενδείξεις ότι το μοντέλο, με την απλή συμμετρική περιπλοκή που περιγράφηκε παραπάνω, ορθά περιγράφει τη φυσική της θεωρίας μεγάλου N για μεγάλο όγκο, και παρουσιάζει αποτελέσματα για ποσότητες όπως η T_C/Λ_L , η θερμοκρασία απελευθέρωσης εξεφρασμένη σε μονάδες της παραμέτρου Λ του πλέγματος. Ποιό πρόσφατες εργασίες δείχνουν ωστόσο ότι παρότι η κεντρική συμμετρία στο περιπλεγμένο μοντέλο *EK* διατηρείται, τόσο στο όριο της ασθενούς όσο και στο όριο της ισχυρής σύζευξης, οδηγείται σε αυθόρμητο σπάσιμο σε ενδιάμεσες τιμές σύζευξης και το φάσμα των τιμών σύζευξης για τις οποίες αυτό συμβαίνει μεγαλώνει ανάλογα του N , δυσκολεύοντας έτσι τη μελέτη της φυσικής στο συνεχές όριο για μεγάλο N . Το αυθόρμητο σπάσιμο της κεντρικής συμμετρίας στις ενδιάμεσες τιμές σύζευξης οφείλεται στη μετασταθή κατάσταση του συστήματος που χαρακτηρίζεται από τη διακύμανση των πεδίων γύρω από σχηματισμούς που οδηγούν στο σπάσιμο της κεντρικής συμμετρίας και ενισχύονται όλο και περισσότερο για $N \rightarrow \infty$.



Σχήμα 5: Μια σύγκριση των αποτελεσμάτων των προσομοιώσεων του πεπλεγμένου μοντέλου *EK* με τον κατάλληλο φορμαλισμό για την περιέλιξη (πράσινος συμβολισμός), με προσομοιώσεις στο πλέγμα για μεγάλο όγκο, με τον κλασικό φορμαλισμό της θεωρίας, παραλείποντας τις ιδιότητες που είναι ανεξάρτητες του όγκου (κόκκινος συμβολισμός), και η αντίστοιχη προέκτασή τους ως συνάρτηση του αριθμού χρώματος (μπλε γραμμή). Η ποσότητα που απεικονίζεται είναι ο λόγος, προεκτεινόμενος στο συνεχές όριο, μεταξύ της παραμέτρου Λ_{QCD} στο \overline{MS} , και η τετραγωνική ρίζα της τάσης της χορδής.

Μια πιθανή λύση στο πρόβλημα προτάθηκε πρόσφατα [259]. Η ιδέα είναι να θέσουμε τη συνεισφορά της δράσης των σχηματισμών που οδηγούν σε σπάσιμο της κεντρικής συμμετρίας τάξης $O(N^2)$, πάνω από τους σχηματισμούς που απο-πλέκουν το μοντέλο, αλλάζοντας την περιέλιξη σε: $n_{ab} = kL$ για όλα τα $a < \beta$, με $k = O(L)$ (συγκεκριμένα $k > L/4$). Μελέτες για το μη διαταραγμένο μοντέλο του περιπλεγμένου EK έχουν οδηγήσει πρόσφατα σε καλά αποτελέσματα, όπως αυτό που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, στο οποίο η τιμή της τάσης της χορδής, δηλαδή η ασυμπτωτική κλίση του εγκλειόμενου δυναμικού στις μεγάλες αποστάσεις, εξάγεται από προσομοιώσεις σε αυτή τη νέα έκδοση του πεπλεγμένου μοντέλου EK σε $N = 841$, και προεκτίνεται κατάλληλα στο συνεχές όριο. Συγκρινόμενο με μια συμβατική μελέτη στο *lattice* για μεγάλο όγκο, το αποτέλεσμα της προσομοίωσης του πεπλεγμένου μοντέλου EK είναι συνεπές όταν γίνει η αντίστοιχη προέκταση του τελευταίου.

Ωστόσο, αριθμητικές μελέτες που μελετούν επίσης την περίπτωση του περιπλεγμένου τανυστή $n = O(N)$ καταλήγουν ότι η κρίσιμη τιμή της σύζευξης 't Hooft, κάτω από την οποία η κεντρική συμμετρία σπάει αυθόρμητα, τίνει στο μηδέν ανάλογα με τον όρο $1/N$. Ανάλογα αποτελέσματα προκύπτουν εάν χρησιμοποιηθεί πεπλεγμένος τανυστής της μορφής $k = (L+1)/2$. Άλλες αριθμητικές μελέτες για το περιπλεγμένο μοντέλο EK περιλαμβάνουν τη μελέτη της θεωρίας *Yang – Mills* στις τρεις χωρικές διαστάσεις σε πεπερασμένο όγκο και υπό την παρουσία χρωμομαγνητικής ροής που εκφράζεται μέσω περιέλιξης προκειμένου να μελετηθεί η αλληλεπίδραση του μεγάλου N στο μέγεθος του συστήματος.

3.8 Ελάττωση του όγκου με συζυγή φερμιόνια

Μία διαφορετική μέθοδος για τη διατήρηση της κεντρικής συμμετρίας στο μοντέλο EK που έχει προταθεί στη βιβλιογραφία, αποτελείται από την τροποποίηση της θεωρίας με την προσθήκη μια οι περισσότερες γεύσεις δυναμικών άμαζων *Majorana* φερμιονίων στην συζυγή απεικόνιση της βαθμωτής ομάδας, και με περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Όταν η θεωρία συμπυκνώνεται σε ένα μικρό χωρικό τόρο μήκους R , ένας διαταραγμένος υπολογισμός του αποτελεσματικού δυναμικού V_{eff} για τις φάσεις των ιδιοτιμών $exp(i\theta_a)$ της γραμμής *Polyakov* κατά αυτή την κατεύθυνση δείχνει ότι η επίδραση των φερμιονίων μπορεί να αντισταθμίσει τους όρους του σπασίματος της συμμετρίας που προέρχονται από τα γλυόνια [260, 261]:

$$V_{eff}(\theta) = \frac{2(n_f - 1)}{\pi^2 R^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left| \sum_{a=1}^N exp(in\theta_a) \right|^2 = \frac{\pi^2(n_f - 1)}{45R^4} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \left\{ 1 - \frac{15}{8\pi^4} [\pi^2 - f^2(\theta_a - \theta_b)]^2 \right\} \quad (133)$$

όπου $f(x) = (x \bmod 2\pi) - \pi$. Στο απλοποιημένο μοντέλο EK ($n_f = 0$), το ελάχιστο δυναμικό επιτυγχάνεται όταν ο όρος μεταξύ των αγκυλών, που είναι θετικός καθώς $|f(x)| \leq \pi$ για κάθε x , γίνεται αμελητέος. Αυτό μεταφράζεται στην περίπτωση που όλες οι ιδιοτιμές καταλήγουν στην ίδια τιμή, συμβεβλημένο του αυθόρμητου σπασίματος της κεντρικής συμμετρίας. Από την άλλη, στην περίπτωση όπου $n_f = 1$ που μεταφράζεται σε υπερσυμ-

μετρική θεωρία *Yang – Mills* με $\mathcal{N} = 1$, με τη μέθοδο των διαταραχών μπορεί να βρεθεί το δυναμικό για την περίπτωση ενός επίπεδου βρόχου. Ενώ για $1 \leq n_f \leq 6$ η συμπερίληψη συζυγών φερμιονίων στη θεωρία έχει ως αποτέλεσμα να προτιμούνται τα κενά αυτά για τα οποία η κεντρική συμμετρία διατηρείται. Ανάλογος φορμαλισμός υπάρχει και για την περίπτωση όπου δύο ή περισσότερες κατευθύνσεις συμπυκνώνονται σε έναν τόρο.

Μια σημαντική υφή των θεωριών βαθμίδας που συνδιάζονται με τα συζυγή φερμιόνια με περιοδικές συνοριακές συνθήκες παράλληλα μιας μικρής χωρικής κατεύθυνσης είναι ότι δίνουν κάποιον αναλυτικό έλεγχο πάνω σε φαινόμενα όπως ο περιορισμός και το σπάσιμο της χειραλικής συμμετρίας.

Παρότι η εισαγωγή των συζυγών φερμιονίων σε ένα μοντέλο *QCD* μπορεί να φανεί τεχνητή, πρέπει να σημειωθεί ότι, για μεγάλο N , η αναλογία της πολυ-πολλαπλότητας (orientifold) συσχετίζει την *QCD* με συζυγή φερμιόνια με την *QCD* με φερμιόνια Dirac, σε συμμετρική και αντισυμμετρική απεικόνιση [262-265]. Δεδομένου ότι στην πραγματικότητα τα πεδία κουάρκ είναι στη θεμελιώδη περιγραφή της $SU(3)$, που είναι ισοδύναμη με μια διπαραμετρική αντισυμμετρική απεικόνιση, η τελευταία θεωρία μπορεί να θεωρηθεί ως φυσική γενίκευση της *QCD* για μεγάλο N . Να σημειωθεί ότι η μελέτη για το αποσβένον μοντέλο στο πλέγμα για τη σχέση της πολυ-πολλαπλότητας έχει δείξει ότι οι μάζες των διανυσματικών μεσονίων που αντιστοιχούν σε κουάρκ διαφορετικών αναπαραστάσεων τίνουν σε συμβατές τιμές στο χειραλικό όριο και το μεγάλο- N , σε συμφωνία με τις θεωρητικές προσδοκίες.

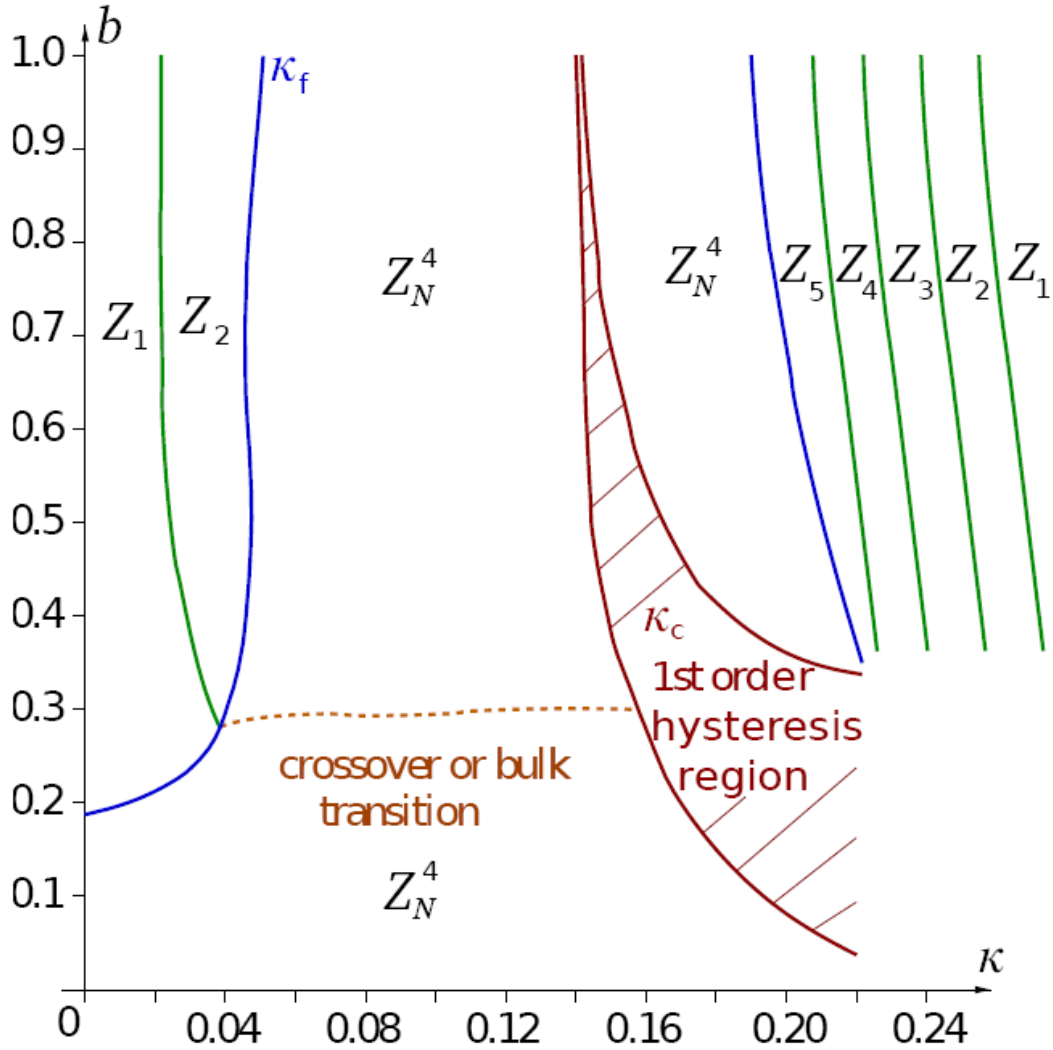
Πολλές εργασίες μελετούν το μοντέλο *EK* με συζυγή φερμιόνια τόσο αναλυτικά όσο και αριθμητικά [266-275]. Τα αποτελέσματα των πιο πρόσφατων μη διαταραγμένων μελετών με μεθόδους προσομοίωσης στο lattice δείχνουν ότι η μείωση όγκου στο μοντέλο με συζυγή φερμιόνια λειτουργεί σύμφωνα με τη θεωρία τόσο για $n_f = 1$ όσο και για $n_f = 2$ γεύσεις Dirac. Εργασίες έχουν δώσει αριθμητικές ενδείξεις ότι για την περίπτωση των δύο γεύσεων η κεντρική συμμετρία διατηρείται, για ένα πεπερασμένο φάσμα μαζών μονήρων χυάρκ, πάνω σε ένα διάστημα συζεύξεων που δείχνει να εκτίνεται μέχρι το συνεχές φάσμα σχήμα (6). Αφού αποδείχθηκε ότι η ελάττωση του όγκου στο μοντέλο *EK* για τα συζυγή φερμιόνια δουλεύει, το επόμενο βήμα είναι να φανεί πόσο αποδοτικές από υπολογιστικής σκοπιάς είναι αυτές οι αριθμητικές προσεγγίσεις.

3.9 Ελάττωση του όγκου στις θεωρίες *Yang-Mills* με παραμορφώσεις διπλού-ίχνους

Μια σχετική παραλλαγή του μοντέλου *EK* έχει προταθεί [276] και οδηγεί σε ένα απλού-βρόχου δυναμικό της μορφής της εξίσωσης (133) με το να τροποποιεί τη συνηθισμένη δράση *Yang-Mills* προσθέτοντας όρους στο ίχνος των βρόχων Polyakov, με κατάλληλα επιλεγμένους θετικούς συντελεστές που πιέζουν τη σημασία της κεντρικής συμμετρίας καταργώντας κάποιους σχηματισμούς των διαδρομών ολοκλήρωσης. Ένα πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι μας επιτρέπει να μειώσουμε τον αριθμό των αυθαίρετων μεγεθών του συστήματος. Για παράδειγμα προκειμένου να διατηρηθεί η κεντρική συμμετρία όταν μόνο μία κατεύθυνση γίνεται συμπαγής, ο παραμορφωσιακός όρος πρέπει να είναι της μορφής:

$$\sum_{\vec{x}} \sum_{n=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} a_n |tr(L^n(\vec{x}))|^2 \quad (134)$$

όπου η άθροιση γίνεται πάνω στα σημεία του υπερεπίπεδου που είναι ορθογώνιο στην συμπαγοποιημένη διεύθυνση, και πιο σύνθετες παραμορφώσεις, που περιλαμβάνουν προϊόντα βρόχων από διαφορετικές διευθύνσεις, μπορούν να προστεθούν, όταν δύο ή περισσότερες κατευθύνσεις συμπυκνώνονται σε μικρά μεγέθη. Οι παραμορφωσιακοί όροι καθορίζουν επίσης τις αναμενόμενες τιμές των παρατηρησίμων, ωστόσο αναμένεται ότι αυτό γίνεται μόνο μέσω $O(1/N)$ διορθώσεων, οι οποίες γίνονται αμελητέες στο όριο για μεγάλο N .



Σχήμα 6: Προσομοιώσεις στο πλέγμα θεωριών βαθμίδας για μεγάλο N με $n_f = 1$ και $n_f = 2$ γεύσεις δυναμικών συζυγών φερμιονίων σε μικρό όγκο στον οποίο η κεντρική συμμετρία διατηρείται για ένα ευρύ φάσμα μαζών κουάρκ, των οποίων το εύρος παραμένει πεπερασμένο στο συνεχές όριο. Στο διάγραμμα απεικονίζονται οι συμμετρίες σε διαφορετικές περιοχές του χώρου των παραμέτρων προσομοίωσης. Συγκεκριμένα, οι περιοχές στις οποίες η κεντρική συμμετρία διατηρείται και στις τέσσερις διαστάσεις συμβολίζονται με Z_N^4 . Η ποσότητα στον κάθετο άξονα (b) είναι η αντίστροφη της απλής σύζευξης 't Hooft στο lattice, έτσι ώστε εξαιτίας της ασυμπτωτικής ελευθερίας, το συνεχές όριο λαμβάνεται παίρνοντας $b \rightarrow \infty$, ενώ η περιοχή που αντιστοιχεί σε μικρές τιμές του b είναι η περιοχή ισχυρής σύζευξης της θεωρίας βαθμίδας. Η ποσότητα στον οριζόντιο άξονα (k) είναι η παράμετρος προσομοίωσης που σχετίζεται με την φερμιονική μάζα: Συγκεκριμένα, η τελευταία απειρίζεται για $k = 0$ που αντιστοιχεί στην απλή θεωρία Yang-Mills, ενώ μειώνεται όταν το k αυξάνεται στη σκιαγραφημένη περιοχή, φθάνοντας στο μηδέν για την κρίσιμη τιμή k_c . Το διάγραμμα που βασίζεται σε πληροφορίες που λαμβάνεται από προσομοιώσεις με $n_f = 2$ δυναμικά κουάρκ στη συζυγή αναπαράσταση στην ομάδα βαθμίδας για μικρό όγκο, μας δείχνει ότι, υπό την παρουσία δυναμικών συζυγών φερμιονίων, το αυθόρμητο σπάσιμο της κεντρικής συμμετρίας αναστέλλεται, για ένα αρκετά μεγάλο εύρος μαζών κουάρκ, σε μία περιοχή που εκτείνεται έως το συνεχές όριο.

3.10 Μερική απομείωση του όγκου

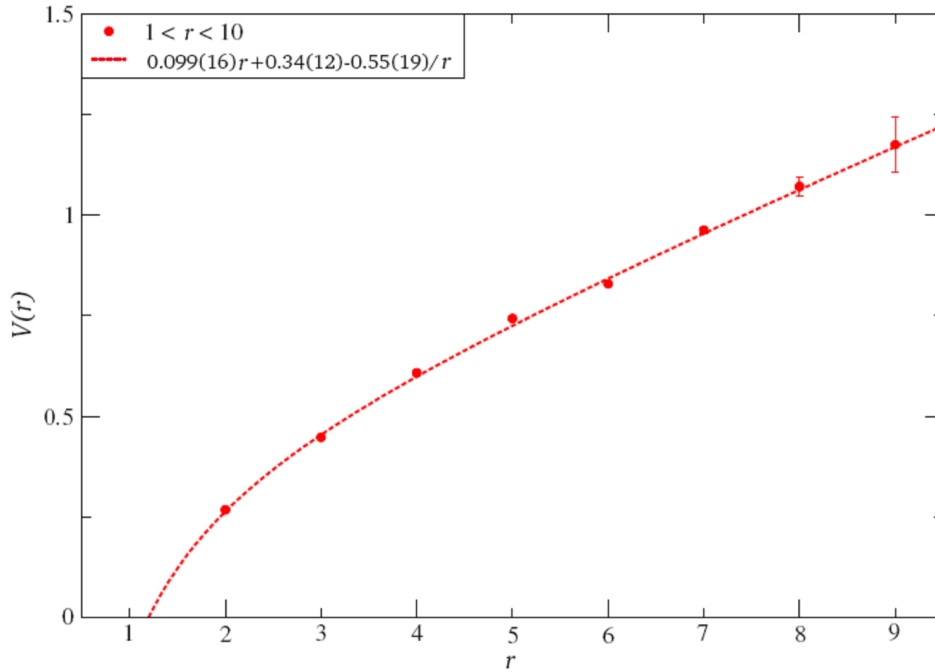
Μια διαφορετική προσέγγιση είναι η μείωση του μεγέθους του πλέγματος σε μία ελάχιστη τιμή για την οποία η κεντρική συμμετρία διατηρείται. Αυτό είναι εφικτό καθώς το κρίσιμο μέγεθος l_c στο οποίο η συμμετρία σπάει αυθόρμητα είναι φυσική ποσότητα με πεπερασμένο, μη μηδενικό όριο για $N \rightarrow \infty$. Για αυτό το λόγο, με αυτή την προσέγγιση μπορούμε να επιτύχουμε μόνο μερική απομείωση του όγκου και ο αριθμός των μεταβλητών του πλέγματος αυξάνεται ανάλογα του όρου $(1/a)^D$, όπου το μήκος του πλέγματος a τείνει στο μηδέν για να προσεγγίσει το συνεχές όριο. Ένα πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι δεν στηρίζεται σε κάποιο "trick", του οποίου η εγκυρότητα μπορεί να άρεται στο μή διαταραγμένο επίπεδο, και επιπρόσθετα η απλοϊκότητά του μας επιτρέπει να το μελετήσουμε αριθμητικά.

Συγκεκριμένα, ακολουθώντας αυτή την προσέγγιση [277] φαίνεται ότι, για τρισδιάστατο χωροχρόνο οι συνεισφορές των ιδιοτιμών για τους βρόχους Wilson και Polyakov συμφωνούν για προσωμοιώσεις σε πλέγμα μεγάλου όγκου και σε ελαφρά απομειωμένο πλέγμα. Η ανάλυση της τετραδιάστατης περίπτωσης απαιτεί τη μελέτη του διαγράμματος φάσης της θεωρίας lattice, εξεφρασμένη ως συνάρτηση του μεγέθους του πλέγματος σε φυσικές μονάδες. Αυτό υποδεικνύει την ύπαρξη μίας πληθώρας μετασχηματισμών που καταλήγουν στο διαδοχικό σπάσιμο των κεντρικών συμμετριών για μία, δύο, τρεις και τελικά για το σύνολο του τετραδιάστατου χωροχρόνου. Αυτή η ανάλυση καθορίζεται επανακανονικοποιώντας τους βρόχους με κατάλληλη διαδικασία, για να πάρουμε ένα καλά καθορισμένο συνεχές όριο. Παράλληλα με αυτές τις μελέτες έχει μελετηθεί και η χειραλική συμμετρία [278, 279]. Τα αποτελέσματα έδειξαν την αποτελεσματικότητα της τεχνικής της απομείωσης όγκου στο μεγάλο N . Για πεπερασμένα πλέγματα γραμμικής επέκτασης μεγαλύτερης από l_c η χειραλική συμμετρία σπάει αυθόρμητα και το χειραλικό συμπύκνωμα εμφανίζεται, ανεφάρτητο από το μέγεθος του πλέγματος. Τέλος, ένα σύνολο δημοσιεύσεων αφορά τη μελέτη του δυναμικού και την τάση της χορδής στην προσέγγιση της μερικής απομείωσης του όγκου [280, 281, 282]. Συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα για την τετραδιάστατη περίπτωση, φαίνονται στο σχήμα (7). Το διάγραμμα απεικονίζει την συμπεριφορά του εγκλεισμένου δυναμικού V ως συνάρτηση της απόστασης r , όπου οι αριθμητικές τιμές για τις δύο ποσότητες αποδίδονται σε τιμές του βήματος του πλέγματος a , όπως προέκυψε από προσωμοιώσεις με $N = 47$ σε αντίστροφη σύζευξη t' Hoof $b = 0.348$ με μέγεθος πλέγματος $L = 6a$ προς όλες τις κατευθύνσεις. Το μέγεθος του πλέγματος δεν είναι μεγάλο αλλά είναι επαρκές για να διατηρήσει την κεντρική συμμετρία. Το δυναμικό, που υπολογίζεται για 9 βήματα πλέγματος, δηλαδή για 1.5 φορές το μέγεθος του πλέγματος, δείχνει την συμπεριφορά που αναμένεται για μεγάλο όγκο.

3.11 Ομοιότητες της ανεξαρτησίας όγκου και του μεγάλου N για προβολές σε orbifolds

Έχοντας ήδη συζητήσει πως η αντιστοιχία EK μεταξύ των θεωριών που καθορίζονται για διαφορετικούς χωροχρονικούς όγκους, αναδύεται στο μεγάλο N , τώρα θα συζητήσουμε την αντιστοιχία αυτή στο ευρύτερο πλαίσιο της γενικότερης κλάσης των ισοδυναμιών

$$b=0.348, L=6, N=47$$



Σχήμα 7: Υπολογισμός του περικλειόμενου δυναμικού V , ως συνάρτηση της απόστασης r χρησιμοποιώντας μερική απομείωση του όγκου. Το διάγραμμα δείχνει τα αποτελέσματα για το V με κόκκινες τελείες μέχρι και για εννέα διαστήματα πλέγματος, δηλαδή για μιάμιση φορές το μέγεθος του πλέγματος (Λ) που χρησιμοποιήθηκε στην προσομοίωση. Μια τριπαραμετρική καμπύλη χρησιμοποιήθηκε για να γίνει fit των τιμών σε δυναμικό τύπου Cornell.

ανάμεσα στις θεωρίες μεγάλου N . Διάφοροι τύποι αντιστοιχιών μεταξύ θεωριών οι οποίες διαφέρουν για κάθε πεπερασμένη τιμή του N , αλλά συγκλίνουν στο όριο για μεγάλο N , έχουν ήδη ανακαλυφθεί από τις αρχές της δεκαετίας του ογδόντα. Ωστόσο μονάχα την τελευταία δεκαετία βρέθηκαν συστηματικές μέθοδοι για να κατασκευαστούν τέτοιες ισοδυναμίες και ο προσδιορισμός των αντίστοιχων συνθηκών που τις ικανοποιούν.

Μία από τις πρώτες εργασίες που αναφερόταν στην ερμηνεία της απομείωσης όγκου EK, στις θεωρίες βαθμίδος lattice στο μεγάλο N με όρους αυτών των ισοδυναμιών, ήταν του Neuberger από το 2003 [283]. Εν συνεχεία ακολούθησε μία σειρά άρθρων από τους Kovtun, Poppitz, Unsal και Yaffe [284-292] των οποίων τη λογική θα ακολουθήσω εδώ. Για ιστορικούς λόγους που έχουν να κάνουν με τη θεωρία χορδών [293-296], αυτές οι ισοδυναμίες αποκαλούνται ισοδυναμίες "orbifold". Σε αυτό το πλαίσιο, μια ισοδυναμία orbifold προσδιορίζεται ως χαρτογράφηση μεταξύ μιας "πατρικής" θεωρίας και μιας "μητρικής" θεωρίας, η οποία προκύπτει από την πρώτη, βγάζοντας τους βαθμούς ελευθερίας που δεν είναι αναλλοίωτοι κάτω από την δράση μίας διακριτής καθολικής ομάδας συμμετρίας. Πιο συγκεκριμένα, στο όριο του μεγάλου N αυτές οι ισοδυναμίες συσχετίζουν τις αναμενόμενες τιμές στο κενό και τις συναρτήσεις συσχέτισης μίας υποομάδας βαθμωτά αναλλοίωτων παρατηρήσεων, στη μητρική θεωρία και στην πατρική θεωρία, πιθανόν μέχρι το επίπεδο της επαναϊεράρχησης των συζεύξεων και των παραμέτρων όγκου, δεδομένου ότι η γενική συμμε-

τρία της πατρικής θεωρίας που χρησιμοποιείται για την κατασκευή της προβολής του orbifold δεν σπάει αυθόρμητα, καθώς και ότι οι πιθανές γενικές συμμετρίες της μητρικής θεωρίας που εναλλάσσουν τους όρους των βαθμωτών τους παραγόντων, επίσης δεν σπάνε αυθόρμητα.

Στο επίπεδο των διαταραχών αυτή η ισοδυναμία βασίζεται στην παρατήρηση ότι τα επίπεδα διαγράμματα της πατρικής και της μητρικής συμπήπτουν σε όλα τα υπόλοιπα και ότι οι γενικές συναρτήσεις συσχέτισης των βαθμωτά αναλλοίωτων τελεστών (από τους οποίους εξάγουμε τις φυσικές παρατηρήσεις όπως η μάζα του φάσματος) υπακούουν την ίδια ομάδα κλειστών συναρτήσεων. Για να επεκτήνουμε την εγκυρότητα της αντιστοιχίας στο επίπεδο της αδιατάραχτης μελέτης κάποιες εργασίες επικεντρώθηκαν στις $U(N)$ θεωρίες βαθμίδας (πιθανόν σε συνδιασμό με n_s είδη έμαζων βαθμωτών πεδίων και n_f είδη φερμιονικών πεδίων, και τα δύο στην αντίστροφη αναπαράσταση της βαθμωτής ομάδας) κανονικοποιημένες στο πλέγμα και στις εξισώσεις τύπου Migdal-Makeenko για βαθμωτά αναλλοίωτους τελεστές οι οποίοι μπορούν να γραφούν ως ίχνη κλειστών βρόχων Wilson. Αν λάβουμε αρχικά υπόψη την απλή περίπτωση Yang-Mills ($n_s = n_f = 0$): και θεωρώντας ότι το N δεν είναι πρώτος αριθμός ώστε να μπορεί να γραφεί ως $N = kn$, με k και n ακέραιους μεγαλύτερους της μονάδας, τότε μπορούμε να εισάγουμε μία προβολή του orbifold στην υποομάδα $H = \mathbb{Z}_k$ της γενικής ομάδας $U(N)$ των ανεξάρτητων θέσης βαθμωτών μετασχηματισμών, απαιτώντας το γενικό πεδίο Φ της πατρικής θεωρίας να είναι αναλλοίωτο κάτω από τον μετασχηματισμό:

$$\Phi \rightarrow \gamma \Phi \gamma^{-1}, \quad (135)$$

όπου:

$$\gamma = \Omega \otimes \mathbb{1}_n, \quad \Omega = \text{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{k-1}), \quad \omega = \exp(2\pi i/k). \quad (136)$$

Η κατασκευή μπορεί εύκολα να γενικευθεί για ένα orbifold στην υποομάδα \mathbb{Z}_k^d εάν $N = k^d n$, εισάγωντας d πίνακες γ_a και απαιτώντας η διακύμανση του Φ κάτω από τους μετασχηματισμούς της εξ. (136), για κάθε γ_a ξεχωριστά. Υλικά πεδία μπορούν επίσης να συμπεριληφθούν με άμεσο τρόπο: για μη-μεδενικό n_s και/ή n_f , η γενική συμμετρία της πατρικής θεωρίας μεγανθύνεται στη μορφή $U(N) \otimes (n_s)(n_f)$, και κάθε υλικό πεδίο μπορεί να έχει ένα γενικό φορτίο r_a κάτω από την προβολή γ_a , έτσι ώστε η συνήχη για το orbifold γίνεται:

$$\Phi = \exp[2\pi i r_a(\Phi)/k] \gamma_a \Phi \gamma_a^{-1}. \quad (137)$$

Κάτω από αυτή την προβολή, οι βαθμοί ελευθερίας της βαθμίδας της πατρικής θεωρίας απεικονίζονται σε τμηματικά διαγώνιους πίνακες, με k^d βλοκ $U(n)$ πινάκων, και η βαθμωτά αναλλοίωτη ομάδα της μητρικής θεωρίας να είναι $U(n)^{k^d}$. Η δράση της μητρικής θεωρίας μπορεί να γραφεί στη μορφή μίας δράσης ενός κλασσικού πίνακα Wilson με άχροιση πάνω στα 'σημεία' των \mathbb{Z}_k^d πινάκων.

Η χαρτογράφηση αυτή μπορεί να επεκταθεί σε όλες τις βαθμωτά αναλλοίωτες παρατηρήσεις της πατρικής θεωρίας, που είναι "ουδέτερη" στην προβολή του orbifold και, τελικά, μπορούν να εξαχθούν οι εξισώσεις των βρόχων από την μητρική θεωρία. Εάν η συμμετρία \mathbb{Z}_k^d της μητρικής θεωρίας δεν σπάει αυθόρμητα, αυτές οι εξισώσεις ισοδυναμούν με αυτές στην πατρική θεωρία, υπό την προϋπόθεση ότι η τελευταία δεν σπάει την διακριτή συμμετρία που χρησιμοποιείται στην προβολή του orbifold. Για $N \rightarrow \infty$ αυτές οι εξισώσεις γίνονται ένα κλειστό σύνολο εξισώσεων και στο όριο ισχυρής σύζευξης για την μάζα, μπορούν να επιλυθούν από έναν επαναληπτικό αλγόριθμο, που δημιουργεί το ανάπτυγμα ισχυρής σύζευξης για το πλέγμα μεγάλου N των αντίστοιχων παρατηρήσεων.

Να σημειωθεί ότι η κατασκευή μιας δυϊκότητας orbifold, όπως περιγράφηκε παραπάνω, παρέχει ένα αποκλειστικό παράδειγμα του πώς οι χωροχρονικά εξαρτώμενοι βαθμοί ελευθερίας της μητρικής θεωρίας, μπορούν να επιλυθούν με την επέκταση των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας στην πατρική θεωρία.

Χρησιμοποιώντας αυτά τα εργαλεία, η εγκυρότητα της ισοδυναμίας των orbifold, που σχετίζεται με τα επίπεδα όρια της QCD με ένα αντίστροφο φερμιόνιο Majorana και της QCD με ένα φερμιόνιο Dirac σε διδιάστατη αντισυμμετρική απεικόνιση έχει μελετηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα προκύπτει ότι η ισοδυναμία μεταξύ των δύο θεωριών μπορεί να ερμηνευθεί με όρους μίας "μητρικής-μητρικής" ισοδυναμίας orbifold. Και οι δύο θεωρίες μπορούν να προκύψουν από μία κοινή πατρική θεωρία, συγκεκριμένα την $SO(2N) \mathcal{N} = 1$ υπερσυμμετρική QCD, εφαρμόζοντας προβολές orbifold βασισμένες σε δύο διαφορετικά σύνολα \mathbb{Z}_2 . Αφαιρώντας τους βαθμούς ελευθερίας που είναι μη αναλλοίωτες στο $J = i\sigma_2 \otimes \mathbb{1}_N$ αποδίδεται η $\mathcal{N} = 1$ υπερσυμμετρική $U(N)$ θεωρία ως μητρική, όπου μία προέκταση που χρησιμοποιεί μία μεταβλητή του ίδιου τελεστή, $J(-1)^F$, οδηγεί στην $U(N)$ θεωρία που συζεύεται σε ένα φερμιόνιο, σε μία διδιάστατη αντισυμμετρική απεικόνιση της θεωρίας βαθμίδας. Επιπλέον, μπορεί να σημειωθεί ότι η εγκυρότητα ή μη της επίπεδης ισοδυναμίας orbifold, είναι στενά συνδεδεμένη με την υλοποίηση των διακριτών συμμετριών που χρησιμοποιούνται στις προβολές, εξαρτάται καθοριστικά στα δυναμικά και ως παράδειγμα έχει αποδειχθεί ότι η επίπεδη ισοδυναμία orbifold μπορεί να αποτύχει όταν οι θεωρίες συμπυκνώνονται σε ένα μικρό χωρικό τόρο. Αυτό μπορεί να μελετηθεί επαρκώς με μεθόδους αναπτύγματος ασθενούς σύζευξης, που δείχνουν ότι η σύζευξη φορτίου σπάει αυθόρμητα και ως συνέπεια η ισοδυναμία orbifold αποτυγχάνει.

Όπως σημειώθηκε παραπάνω, η ανεξαρτησία όγκου της Egushi-Kawai για μεγάλο N μπορεί επίσης να ερμηνευθεί με όρους ισοδυναμίας orbifold. Όπως έχει συζητηθεί στην βιβλιογραφία, σε αυτή την περίπτωση, η πατρική θεωρία που ορίζεται ως πούμε σε έναν D -διάστατο υπερτοροειδές γραμμικής διάστασης L , μπορεί να χαρτογραφηθεί στη μητρική θεωρία (που ορίζεται σε ένα μικρότερο υπερτοροειδές μεγέθους L' , με L ακέραιο πολλαπλάσιο του L'), βγάζοντας εκτός τους βαθμούς ελευθερίας που δεν παραμένουν αναλλοίωτοι, κάτω από τους μετασχηματισμούς του \mathbb{Z}_k^D από ακέραια πολλαπλάσια του L' σε κάθε κατεύθυνση ή ισοδύναμα, απομακρύνοντας τους όρους του μετασχηματισμού Fourier που δεν κβαντίζονται σε πολλαπλάσια της μορφής $2\pi/L'$. Αυτό οδηγεί σε μία αντιστοιχία μεταξύ των θεωριών που ορίζονται σε δύο διαφορετικά χωρία, και για την πατρική θεωρία σε πλέγμα διάστασης a , αποδίδει το μοντέλο EK ως την αντίστοιχη μητρική θεωρία εάν $L' = a$. Αντίστροφα, είναι επίσης εφικτό να χαρτογραφήσουμε μία περιοχή που καθορίζεται σε έναν μικρότερο όγκο σε έναν μεγαλύτερο χώρο. Αυτό μπορεί να γίνει συνδέοντας κάποιους από τους εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας της πατρικής θεωρίας με τους χωροχρονικούς βαθμούς ελευθερίας της μητρικής θεωρίας. Για παράδειγμα, το $U(N)$ μοντέλο EK με $N = k^d n$ μπορεί να χαρτογρα-

φηθεί ως μια συνήθης θεωρία Yang-Mills διάστασης $U(N)$ σε ένα πλέγμα k^d , ακολουθώντας την κατασκευή που σχιαγραφήσαμε και στην συζήτηση για τις προεκτάσεις των orbifold που αναλογεί στην επιβολή ενός σετ περιορισμών της μορφής:

$$U_a = \exp(2\pi i \delta_{\alpha\beta}/k) \gamma_\beta U_a \gamma^{-1}, \quad (138)$$

όπου τα γ_a προκύπτουν ανάλογα με την εξίσωση (136). Η δράση του μοντέλου EK υπολογίζεται κατόπιν από τη δράση της θεωρίας βαθμίδας στο πλέγμα στο μεγάλο όγκο και οι δύο θεωρίες είναι ισοδύναμες για όσο η κεντρική συμμετρία δεν σπάει αυθόρμητα. Επιπλέον, η εισαγωγή των πεδίων για την ύλη σε διάφορες αναπαραστάσεις είναι επίσης εφικτή.

Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή των συνδεδεμένων ισοδυναμιών είναι η δυνατότητα μελέτης του ορίου του μεγάλου N της QCD με φερμιόνια σε μία δι-διάστατη συμμετρική ή αντισυμμετρική απεικόνιση σε μεγάλο όγκο, πρώτα χαρτογραφώντας αυτή τη θεωρία στην QCD με αντίστροφα φερμιόνια μέσω ισοδυναμιών orbifold που διατηρούνται για μεγάλο όγκο και εν συνεχεία μελετώντας την τελευταία θεωρία σε μικρό όγκο χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ότι, για αντίστροφη QCD , η ισοδυναμία των orbifold που σχετίζεται με την θεωρία σε διαφορετικούς όγκους ισχύει σε όλη τη διαδρομή μέχρι τα συστήματα απειροελάχιστου μεγέθους.

Οι ισοδυναμίες των orbifold που σχετίζονται με τις θεωρίες μεγάλου N που καθορίζονται σε συστήματα διαφορετικού μεγέθους, επίσης παρουσιάζουν ενδιαφέρουσες επιπτώσεις στα διαγράμματα φάσης αυτών των θεωριών. Συγκεκριμένα, προβολές μείωσης ή επέκτασης του όγκου, οι οποίες αλλάζουν το μέγεθος του Ευκλείδειου συστήματος βαθμίδας κατά μήκος μόνο μίας κατεύθυνσης, αυξάνουν ή μειώνουν τη θερμοκρασία του συστήματος κατά έναν παράγοντα k . Εάν η κεντρική συμμετρία δεν σπάει αυθόρμητα, δηλαδή εάν το σύστημα δεν βρίσκεται στην δέσμια κατάσταση, τότε οι αντίστοιχες φυσικές ιδιότητες της μητρικής και της πατρικής θεωρίας υποδηλώνουν ότι, στο μεγάλο N , αυτές οι ιδιότητες παραμένουν ανεξάρτητες της θερμοκρασίας στην δέσμια κατάσταση. Μία άλλη ενδιαφέρουσα εφαρμογή των ισοδυναμιών στα orbifold ως προς την μελέτη των διαγραμμάτων φάσης της QCD πηγάζει από την παρατήρηση ότι, η ισοδυναμία στο μεγάλο N των θεωριών που βασίζεται στις μοναδιαίες και ορθογώνιες βαθμωτές ομάδες μπορεί να μας επιτρέψει να πάρουμε πληροφορίες για τα διαγράμματα φάσης στην περιοχή της πεπερασμένης βαρυονικής πυκνότητας, στην οποία οι προσομοιώσεις στο lattice παρουσιάζουν σημαντικές υπολογιστικές δυσκολίες [297-304]. Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας αριθμητικούς υπολογισμούς για τον υπολογισμό των ισοδυναμιών, για τις οποίες το πρόβλημα απουσιάζει [305-309]. Επιπλέον, αυτές οι ισοδυναμίες μας επιτρέπουν να εξάγουμε ενδιαφέρουσες ιδιότητες για το κρίσιμο σημείο των διαγραμμάτων φάσης και για την τάξη της χειραλικής συμμετρίας για την οποία αποκαθίσταται η μετάβαση σε άμαζα κουάρκ. Αυτή είναι πρώτης ή δεύτερης τάξης, όταν συμβαίνει σε κρίσιμη θερμοκρασία ισοδύναμη ή μεγαλύτερη από την θερμοκρασία της μη δέσμιας μετάβασης.

Συμπεράσματα

Η ιδέα που εισήγαγε ο 't Hooft στο σεμιναριακό του άρθρο [1] αποδείχθηκε ότι ήτανε μία από τις πλέον παραγωγικές ιδέες των τελευταίων δεκαετιών στην θεωρητική φυσική στοιχειωδών σωματιδίων και άνοιξε το δρόμο για έναν αριθμό εξελίξεων σε διάφορες κατευθύνσεις. Οι επιπτώσεις του ορίου του μεγάλου N , για τις μη-αβελιανές θεωρίες βαθμίδας, έχουν μελετηθεί σε πεδία που εκτίνονται από τη θεωρία χορδών μέχρι τη φαινομενολογία της QCD και σε πολλές περιπτώσεις έχει προσφέρει νέους τομείς έρευνας. Παράλληλα όμως με αυτή την πληθώρα εξελίξεων ήρθε και η μεγαλύτερη εξειδίκευση και ο κατακερματισμός των διαφόρων ερευνητικών πεδίων. Ακριβώς για αυτό το λόγο η συνολική εποπτία των εξελίξεων γίνεται όλο και πιο δύσκολη και ως εκ τούτου μια συνολική θεώρηση των πραγμάτων στις θεωρίες βαθμίδας μεγάλου N θα λειτουργούσε ευεργετικά.

Καθώς ανέπτυσα τις γενικές πτυχές του ζητήματος στο κεφάλαιο 1 προσπάθησα να εμβαθύνω στις βασικές ιδέες και τα θεμελιώδη φυσικά μεγέθη, χωρίς να επεκταθώ κατά το δυνατόν στο τεχνικό τμήμα της συζήτησης. Προσπάθησα λοιπόν να αποδώσω τα διάφορα ζητήματα που είναι ερευνητικά ενεργά με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη σαφήνεια γνωρίζοντας ωστόσο ότι στην προσπάθεια αυτή μπορεί να θυσιάσα κάτι από πλευράς ακρίβειας ή πληρότητας. Κάποιες παράγραφοι αναφέρθηκαν πολύ επιγραμματικά ή σχεδόν καθόλου, ωστόσο προσπάθησα όπου αυτό ήταν δυνατό να παραπέμψω τον αναγνώστη στην αντίστοιχη βιβλιογραφία για επιπλέον ανάπτυξη καθώς κατά τεκμήριο αρκέστηκα να παραθέσω τις βασικότερες αντιπροσωπευτικές περιπτώσεις.

Από την άλλη, προσπάθησα να προσφέρω μια εποπτία της παρούσας κατάστασης στον τομέα των θεωριών πλέγματος, για τις θεωρίες βαθμίδας στο μεγάλο N . Όπως φαίνεται η ανάπτυξη της θεωρίας του πλέγματος έχει πλέον ωριμάσει και αποδίδει καρπούς σε αναλυτικό όπως και σε αριθμητικό επίπεδο και δίνει πλέον απαντήσεις σε πληθώρα θεωρητικών ερωτημάτων. Στο κεφάλαιο 2 προσπάθησα να εισαγάγω τον φορμαλισμό του lattice στη θεωρία πεδίου. Εκεί εκθέτονται και κάποια από τα πλεονεκτήματα των υπολογισμών στο lattice έναντι των κλασικών προσεγγίσεων στο όριο του 't Hooft.

Από τη θεωρητική σκοπιά, την τελευταία δεκαετία έχουν παρουσιαστεί πολύ σημαντικές εξελίξεις και στα θέματα που σχετίζονται με την δημοφιλή ιδέα της ανεξαρτησίας όγκου στο μεγάλο N , ιδέα για την ανάπτυξη της οποίας έχει γίνει σημαντική πρόοδος ως προς την κατανόηση των καταστάσεων ασθενούς και ισχυρής σύζευξης. Ταυτόχρονα τα μαθηματικά εργαλεία που απορρέουν από ισοδυναμίες orbifold στη θεωρία χορδών οδήγησαν στην κατανόηση της ανεξαρτησίας του όγκου στο μεγάλο N και τις ισοδυναμίες στο μεγάλο N θεωριών με διαφορετικό περιεχόμενο. Όπως έγινε σαφές στο κεφάλαιο 3 κάποιες από τις τεχνικές που αναπτύχθηκαν βρίσκουν επίσης πρακτικές εφαρμογές σε κάποια προβλήματα γνωστά μεν, προσεγγίσιμα όμως μόνο όταν αυτά μεταφέρονται στο πλέγμα, όπως της συμμετρίας επί παραδείγματι. Ίσως η QCD για πεπερασμένη πυκνότητα να είναι το επόμενο.

Για να συνοψίσουμε τις τελευταίες εξελίξεις στο αντικείμενο μπορούμε να πούμε πως παρά το γεγονός ότι ένας σημαντικός αριθμός προβλημάτων έχει ήδη μελετηθεί, ωστόσο πολλά άλλα είναι ακόμα ανοιχτά. Ένα άλλο γεγονός είναι η αλματώδης ανάπτυξη τα τελευταία χρόνια των υπολογιστικών τεχνικών της θεωρίας lattice για την QCD που φέρνει συνέχεια νέα στοιχεία στην επιφάνεια. Ως εκ τούτου το ερευνητικό αντικείμενο των θεωριών βαθμίδας για μεγάλο N στο πλέγμα, δείχνει να έχει εξαιρετικές προοπτικές ανάπτυξης.

Βιβλιογραφία

- [1] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B72 (1974) 461.
- [2] K.G. Wilson, Phys. Rev. D10 (1974) 2445.
- [3] G. 't Hooft, Nucl.Phys. B75 (1974) 461.
- [4] A.S. Kronfeld, (2012), 1203.1204.
- [5] Z. Fodor and C. Hoelbling, Rev.Mod.Phys. 84 (2012) 449, 1203.4789.
- [6] J.M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 231, hep-th/9711200
- [7] S. Gubser, I.R. Klebanov and A.M. Polyakov, Phys.Lett. B428 (1998) 105, hep-th/9802109.
- [8] E. Witten, Adv.Theor.Math.Phys. 2 (1998) 253, hep-th/9802150
- [9] E. Witten, (1979).
- [10] S.R. Coleman, (1980).
- [11] R.F. Lebed, Czech.J.Phys. 49 (1999) 1273, nucl-th/9810080
- [12] A.V. Manohar, (1998) 1091, hep-th/9802419
- [13] Y. Makeenko, (1999), hep-th/0001047.
- [14] Y. Makeenko (2004) 14, hep-th/0407028
- [15] M. Teper, Acta Phys.Polon. B40 (2009) 3249, 0912.3339
- [16] R. Lebed, Phenomenology of large N(c) QCD. Proceedings, Tempe, AZ, US, January 9-11, 2002 (World Scientific, 2002).
- [17] Large N @ Swansea, Swansea, UK, July 7-10, 2009, <http://www.ippp.dur.ac.uk/Workshops/09/largeN/>
- [18] M.J. Teper, (1998), hep-th/9812187
- [19] R. Narayanan and H. Neuberger, PoS LAT2007 (2007) 020, 0710.0098
- [20] M. Teper, PoS LATTICE2008 (2008) 022, 0812.0085
- [21] M. Panero, Proceedings of Science Lattice 2012 (2012) 010.
- [22] H. Stanley, Phys.Rev. 176 (1968) 718
- [23] S.K. Ma, Rev.Mod.Phys. 45 (1973) 589
- [24] E. Brezin and D. Wallace, (1972)
- [25] E. Brezin and J. Zinn-Justin, Phys.Rev. B14 (1976) 3110.
- [26] Y. Okabe, M. Oku and R. Abe, Prog.Theor.Phys. 59 (1978) 1825
- [27] E. Brezin et al., Commun.Math.Phys. 59 (1978) 35
- [28] F. David, Nucl.Phys. B257 (1985) 45
- [29] J. Ambjorn, B. Durhuus and J. Frohlich, Nucl.Phys. B257 (1985) 433
- [30] V. Kazakov, Phys.Lett. B150 (1985) 282
- [31] V. Kazakov, A.A. Migdal and I. Kostov, Phys.Lett. B157 (1985) 295
- [32] E. Brezin and V. Kazakov, Phys.Lett. B236 (1990) 144
- [33] M.R. Douglas and S.H. Shenker, Nucl.Phys. B335 (1990) 635
- [34] D.J. Gross and A.A. Migdal, Phys.Rev.Lett. 64 (1990) 127.
- [35] R. Gurau, Commun.Math.Phys. 304 (2011) 69, 0907.2582.
- [36] B. Durhuus and P. Olesen, Nucl.Phys. B184 (1981) 461.
- [37] A. Ali, V.M. Braun and G. Hiller, Phys.Lett. B266 (1991) 117.
- [38] I. Balitsky et al., Phys.Rev.Lett. 77 (1996) 3078, hep-ph/9605439.
- [39] V.M. Braun, S.E. Derkachov and A. Manashov, Phys.Rev.Lett. 81 (1998) 2020, hep-ph/9805225

- [40] P. Ball et al., Nucl.Phys. B529 (1998) 323, hep-ep/9802299
- [41] V.M. Braun et al., Nucl.Phys. B553 (1999) 355, HEP-EP/9902375
- [42] A.V. Belitsky, Phys.Lett. B453 (1999) 59, hep-ph/9902361.
- [43] Y.V. Kovchegov, Phys.Rev. D60 (1999) 034008, hep-ph/9901281.
- [44] Y.V. Kovchegov, Phys.Rev. D61 (2000) 074018, hep-ph/9905214.
- [45] I. Balitsky, (2001), hep-ph/0101042.
- [46] A.V. Belitsky, Nucl.Phys. B558 (1999) 259, hep-ph/9903512
- [47] V.M. Braun, S.E. Derkachov and A. Manashov, Phys.Rev.Lett. 81 (1998) 2020, hep-ph/9805225
- [48] P. Ball et al., Nucl.Phys. B529 (1998) 323, hep-ph/9802299
- [49] V.M. Braun et al., Nucl.Phys. B553 (1999) 355 hep-ph/9902375
- [50] A.V. Belitsky, Phys.Lett. B453 (1999) 59, hep-ph/9902361
- [51] Y.V. Kovchegov, Phys.Rev. D60 (1999) 034008, hep-ph/9901281
- [52] Y.V. Kovchegov, Phys.Rev. D61 (2000) 074018, hep-ph/9905214
- [53] I. Belitsky, (2001), hep-ph/0101042
- [54] A.V. Belitsky, Nucl.Phys. B558 (1999) 259, hep-ph/9903512
- [55] A.V. Belitsky, Nucl.Phys. B574 (2000) 407, HEP-PH/9907420
- [56] S.E. Derkachov, G. Korchemsky and A. Manashov, Nucl.Phys. B566 (2000) 203, hep-ph/9909539
- [57] V.M. Braun, G. Korchemsky and A. Manashov, Phys.Lett. B476 (2000) 455, hep-ph/0001130
- [58] E. Ferreira et al., Nucl.Phys. A703 (2002) 489, hep-ph/0109115.
- [59] G. Korchemsky, J. Kotanski and A. Manashov, Phys.Rev.Lett. 88 (2002) 122002, hep-ph/0111185
- [60] V. Braun, G. Korchemsky and D. Mueller, Prog.Part.Nucl.Phys. 51 (2003) 311, hep-ph/0306057
- [61] A. Belitsky et al., Int.J.Mod.Phys. A19 (2004) 4715, hep-ph/0407232
- [62] J. Bijnens, E. Pallante and J. Prades, Phys.Rev.Lett. 75 (1995) 1447, hep-ph/9505251.
- [63] J. Bijnens, E. Pallante and J. Prades, Nucl.Phys. B474 (1996) 379, hep-ph/9511388
- [64] M. Knecht and A. Nyffeler, Phys.Rev. D65 (2002) 073034, hep-ph/0111058.
- [65] W.A. Bardeen, A. Buras and J. Gerard, Nucl.Phys. B293 (1987) 787.
- [66] W.A. Bardeen, A. Buras and J. Gerard, Phys.Lett. B192 (1987) 138.
- [67] W.A. Bardeen, A. Buras and J. Gerard, Phys.Lett. B192 (1988) 343.
- [68] J. Bijnens and J. Prades, Nucl.Phys. B444 (1995) 523, hep-ph/9502363
- [69] J. Bijnens and J. Prades, JHEP 9901 (1999) 023, hep-ph/9811472
- [70] E. Pallante, A. Pich and I. Scimemi, Nucl.Phys. B617 (2001) 441, hep-ph/0105011.
- [71] A. Abbas, Phys.Lett. B238 (1990) 344.
- [72] C.K. Chow and T.M. Yan, Phys.Rev. D53 (1996) 5105, hep-ep/9512243.
- [73] R. Shrock, Phys.Rev. D53 (1996) 6465, hep-ep/9512430.
- [74] R. Shrock, (2002), hep-ph/0204005.
- [75] Y. Bai and G. Torroba, (2012), 1210.2394.
- [76] E.B. Kiritsis and J. Papavassiliou, Phys.Rev D42 (1990) 4238.
- [77] M. Fujita, M. Hanada and C. Hoyos, Phys.Rev. D86 (2012) 026007, 1205.0853.
- [78] T. Azeyanagi, M. Fujita and M. Hanada, (2012), 1210.3601.
- [79] G. Canning, Phys.Rev. D12 (1975) 2505.
- [80] M. Marino, (2012), 1206.6272

- [81] J. Koplik, A. Neveu and S. Nussinov, Nucl.Phys. B123 (1977) 109.
- [82] C.B. Thorn, Phys.Rev. D17 (1978) 1073.
- [83] R. Brower, R. Giles and C.B. Thorn, Phys.Rev. D18 (1978) 484.
- [84] G. 't Hooft, Phys.Lett. B119 (1982) 369
- [85] G. 't Hooft, Commun.Math.Phys. 88 (1983) 1.
- [86] V. Rivasseau, Commun.Math.Phys. 95 (1984) 445
- [87] O. Haan, Phys.Lett. B106 (1981) 207.
- [88] S.R. Coleman and E. Witten, Phys.Rev.Lett. 45 (1980) 100.
- [89] G. 't Hooft, Phys.Rev. Lett. 37 (1976) 8.
- [90] G. 't Hooft, Phys.Rev. D14 (1976) 3432.
- [91] K. Fujikawa, Phys.Rev.Lett. 42 (1979) 1195.
- [92] J. Gasser and H. Leutwyler, Annals Phys. 158 (1984) 142.
- [93] J. Gasser and H. Leutwyler, Nucl.Phys. B250 (1985) 465.
- [94] H. Leutwyler, Annals Phys. 235 (1994) 165, hep-ph/9311274.
- [95] G. Ecker, Prog.Part.Nucl.Phys. 35 (1995) 1, hep-ph/9501357.
- [96] A. Pich, Rept.Prog.Phys. 58 (1995) 563, hep-ph/9502366.
- [97] M. Gell-Mann, R. Oakes and B Renner, Phys.Rev. 175 (1968) 2195.
- [98] C. Rosenzweig, J. Schechter and C. Trahern, Phys.Rev. D21 (1980) 3388.
- [99] P. Nath and R.L. Arnowitt , Phys.Rev. D23 (1981) 473.
- [100] E. Witten, Annals Phys. 128 (1980) 363.
- [101] P. Di Vecchia and G. Veneziano, Nucl.Phys. B171 (1980) 253.
- [102] P. Herrera-Siklody et al., Nucl.Phys. B497 (1997) 345, HEP-PH/9610549
- [103] P. Herrera-Siklody et al., Phys.Lett. B419 (1998) 326, hep-ph/9710268.
- [104] J. Wess and B. Zumino, Phys.Lett. B37 (1971) 95.
- [105] S. Peris, M. Perrottet and E. de Rafael, JHEP 9805 (1998) 011, HEP-PH/9805442.
- [106] M. Knecht, S. Peris and E. de Rafael, Phys.Lett. B457 (1999) 227, hep-ph/9812471.
- [107] M. Knecht, S. Peris and E. de Rafael, Phys.Lett. B443 (1998) 225, hep-ph/9809594
- [108] M. Knecht et al., Phys.Rev.Lett. 83 (1999) 5230, hep-ph/9908283.
- [109] S. Peris and E. de Rafael, Phys.Lett. B490 (2000) 213, hep-ph/0006146.
- [110] S. Peris, B. Phily and E. de Rafael, Phys.Rev.Lett 86 (2001) 14, hep-ph/0007338.
- [111] T. Hambye , S. Peris and E. de Rafael, JHEP 0305 (2003) 027, hep-ph/0305104.
- [112] P. Masjuan and S. Peris, JHEP 0705 (2007) 040, 0704.1247.
- [113] I. Rosell, J. Sanz-Cillero and A. Pich, JHEP 0408 (2004) 042, hep-ph/0407240.
- [114] I. Rosell, P. Ruiz-Femenia and J. Portoles, JHEP 0512 (2005) 020, hep-ph/0510041.
- [115] H. B. O'Connell et al., Prog.Part.Nucl.Phys. 39 (1997) 201, hep-ph/9501251
- [116] P. Masjuan, E.R. Arriola and W. Broniowski, (2012), 1210.0760
- [117] E. Witten, Nucl.Phys. B160 (1979) 57.
- [118] J.L. Gervais and B. Sakita, Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 87
- [119] S. Jain and S.R. Wadia, Nucl.Phys. B258 (1985) 713
- [120] E. Guadagnini, Nucl.Phys B236 (1984) 35
- [121] A. Balachandran et al., Phys.Rev.Lett. 52 (1984) 887
- [122] P.O. Mazur, M.A. Nowak and M Praszalowicz, Phys.Lett. B147 (1984) 137
- [123] A.V. Manohar, Nucl.Phys. B248 (1984)
- [124] A. Dhar, R. Shankar and S.R. Wadia, Phys.Rev. D31 (1985) 3256
- [125] S. Gupta and R. Shankar, Phys.Rev.Lett. 58 (1987) 2178
- [126] J. Bijnens, Phys.Rept. 265 (1996) 369, hep-ph/9502335

- [127] R. Altofer, H. Reinhardt and H. Weigel, Phys.Rept. 265 (1996) 139, hep-ph/9501213
- [128] C. Carone, H. Georgi and S. Osofsky, Phys.Lett. B322 (1994) 227, hep-ph/9310365
- [129] M.A. Luty and J. March-Russell, Nucl.Phys. B426 (1994) 71, hep-ph/9310369
- [130] J.L. Gervais and B. Sakita, Phys.Rev. D30 (1984) 1795
- [131] R.F. Dashen and A.V. Manohar, Phys.Lett. B315 (1993) 425, hep-ph/9307241
- [132] R.F. Dashen, E.E. Jenkins and A.V. Manohar, Phys.Rev. D51 (1995) 3697. hep-ph/9411234
- [133] J. Dai et al., Phys.Rev. D53 (1996) 273, hep-ph/9506273.
- [134] R. Flores-Mendieta, E.E. Jenkins and A.V. Manohar, Phys.Rev. D58 (1998) 094028, hep-ph/9805416.
- [135] P.F. Bedaque and M.A. Luty, Phys.Rev. D54 (1996) 2317, hep-ph/9510453.
- [136] E.E. Jenkins and R.F. Lebed, Phys.Rev. D52 (1995) 282, hep-ph/9502227.
- [137] A.C. Calle Cordon and J Goity, (2012), 1209.0030
- [138] A. Calle Cordon and J. Goity, (2012), 1210.2364
- [139] E.E. Jenkins and A.V. Manohar, Phys.Lett. B335 (1994) 452, hep-ph/9405431.
- [140] M.A. Luty, J. March-Russell and M.J. White, Phys.Rev. D51 (1995) 2332, hep-ph/9405272.
- [141] R.F. Lebed and D.R. Martin, Phys.Rev. D70 (2004) 016008, hep-ph/0404160.
- [142] C.E. Carlson et al., Phys.Rev. D59 (1999) 114008, hep-ph/9812440.
- [143] C. Schat, J. Goity and Scoccola, Phys.Rev.Lett. 88 (2002) 102002, hep-ph/0111082
- [144] C.E. Carlson and C.D. Carone, Phys.Lett. B484 (2000) 260, hep-ph/0005144
- [145] J. Goity, C. Schat and N. Scoccola, Phys.Rev. D66 (2002) 114014, hep-ph/0209174
- [146] T.D. Cohen and R.F. Lebed, Phys.Rev.Lett. 91 (2003) 012001, hep-ph/0301167
- [147] T.D. Cohen and R.F. Lebed, Phys.Rev. D68 (2003) 056003, hep-ph/0306102
- [148] J. Goity, C. Schat and N. Scoccola, Phys.Lett. B564 (2003) 83, hep-ph/0304167
- [149] N. Matagne and F. Stancu, Phys.Rev. D71 (2005) 014010, hep-ph/0409261
- [150] N. Matagne and F. Stancu, Phys.Rev. D74 (2006) 034014, hep-ph/0604122
- [151] E.E. Jenkins, Phys.Lett. B315 (1993) 431, hep-ph/9307243
- [152] E.E. Jenkins, Phys.Lett. B315 (1993) 447, hep-ph/9307245
- [153] E.E. Jenkins, Phys.Rev. D54 (1996) 4515, hep-ph/9603449
- [154] C.K. Chow and T.D. Cohen, Nucl.Phys. A688 (2001) 842, hep-ph/0003131.
- [155] C.K. Chow, T.D. Cohen and B. Gelman, Nucl.Phys. A692 (2001) 521, hep-ph/0012138.
- [156] Z. Aziza Baccouche et al., Nucl.Phys. A696 (2001) 638, hep-ph/0105148
- [157] E.E. Jenkins, Phys.Rev. D77 (2008) 034012, 0712.0406
- [158] E.E. Jenkins and A.V. Manohar, Phys.Lett. B255 (1991) 558
- [159] E.E. Jenkins and A.V. Manohar, Phys.Lett. B259 (1991) 353
- [160] D.B. Kaplan and M.J. Savage, Phys.Lett. B365 (1996) 244, hep-ph/9509371
- [161] D.B. Kaplan and A.V. Manohar, Phys.Rev. C56 (1997) 76, nucl-th/9612021.
- [162] M.K. Banerjee, T.D. Cohen and B.A. Gelman, Phys.Rev. C65 (2002) 034011, hep-ph/0109274
- [163] A.V. Belitsky and T. Cohen, Phys.Rev. C65 (2002) 064008, hep-ph/0202153
- [164] S.R. Beane, (2002) 199, hep-ph/0204107.
- [165] D. Riska, Nucl.Phys. A710 (2002) 55, nucl-th/0204016
- [166] T.D. Cohen, Phys.Rev. C66 (2002) 064003, nucl-th/0209072
- [167] T.D. Cohen and B.A. Gelman, Phys.Lett. B540 (2002) 227, nucl-th/0202036

- [168] M.M. Kaskulov and H. Clement, Phys.Rev. C70 (2004) 014002, nucl-th/0401061
- [169] T.D. Cohen and B.A. Gelman, Phys.Rev. C85 (2012) 024001, 1111.4465
- [170] A. Cherman, T.D. Cohen and R.F. Lebed, (2012), 1205.1009
- [171] T.D. Cohen et al., Phys.Rev. D70 (2004) 056004, hep-ph/0403125.
- [172] A. Cherman T.D. Cohen and R.F. Lebed, Phys.Rev. D80 (2009) 036002, 0906.2400.
- [173] T.D. Cohen and R.F. Lebed, Phys.Rev. D74 (2006) 056006, hep-ph/0608038.
- [174] T.D. Cohen, N. Kumar and K.K. Ndousse, Phys.Rev. C84 (2011) 015204, 1102.2197
- [175] F. Buisseret, N. Matagne and C. Semay, Phys.Rev. D85 (2012) 036010, 1112.2047.
- [176] M. Lutz and E. Kolomeitsev, Nucl.Phys. A700 (2002) 193, nucl-th/0105042
- [177] G. 't Hooft, Nucl.Phys. B138 (1978) 1
- [178] T. Yoneya, Nucl.Phys. B144 (1978) 195.
- [179] P. Vinciarelli, Phys.Lett. B78 (1978) 485.
- [180] J.M. Cornwall, Nucl.Phys. B157 (1979) 392
- [181] G. 't Hooft, Nucl.Phys. B190 (1981) 455
- [182] A.M. Polyakov, Phys.Lett. B59 (1975) 82.
- [183] A. Belavin et al., Phys.Lett. B59 (1975) 85.
- [184] E.V. Shuryak, Nucl.Phys. B203 (1982) 93.
- [185] D. Diakonov and V.Y. Petrov, Nucl.Phys. B245 (1984) 259.
- [186] T. Schafer and E.V. Shuryak, Rev.Mod.Phys. 70 (1998) 323, hep-ph/9610451
- [187] E. Witten, Nucl.Phys. B149 (1979) 285.
- [188] E. Witten, Nucl.Phys. B156 (1979) 269.
- [189] G. Veneziano, Nucl.Phys. B159 (1979) 213.
- [190] M. Teper, Z.Phys. C5 (1980) 233.
- [191] M. Atiyah and I. Singer, Bull.Am.Math.Soc. 69 (1969) 422
- [192] M. Atiyah and I. Singer, Annals Math. 87 (1968) 546
- [193] M. Atiyah and I. Singer, Annals Math. 87 (1968) 484
- [194] M. Atiyah and I. Singer, Annals Math. 93 (1971) 119
- [195] M. Atiyah and I. Singer, Annals Math. 93 (1971) 139
- [196] C. Baker et al., Phys.Rev.Lett. 97 (2006) 131801, hep-ex/0602020// [197] J. Hewett et al., (2012), 1205.2671
- [198] E. Witten, Phys.Rev. Lett. 81 (1998) 2862, hep-th/9807109
- [199] M.A. Shifman, Phys.Rev. D59 (1999) 021501, hep-th/9809184
- [200] M.H. Tytgat, Phys.Rev. D61 (2000) 114009, hep-ph/9909532
- [201] G. Gabadadze and M. Shifman, Int.J.Mod.Phys. A17 (2002) 3689, hep-ph/0206123.
- [202] M. Creutz, Phys.Rev. D52 (1995) 2951, hep-th/9505112
- [203] N.J. Evans et al., Nucl.Phys. B494 (1997) 200 hep-ph/9608490
- [204] A.V. Smilga, Phys.Rev. D59 (1999) 114021, hep-ph/9805214
- [205] J. Lenaghan and T. Wilke, Nucl.Phys. B624 (2002) 253, hep-th/0108166
- [206] G. Akemann, J. Lenaghan and K. Splittorff, Phys.Rev. D65 (2002) 085015, hep-th/0110157 [207] A.C. Kalloniatis and S.N. Nedelko, Phys.Rev. D71 (2005) 054002, hep-ph/0412042
- [208] D. Gross and F. Wilczek, Phys.Rev.Lett. 30 (1973) 1343. [209] H. Politzer, Phys.Rev.Lett. 30 (1973) 1346
- [210] E.V. Shuryak, Sov.Phys.JETP 47 (1978) 212.
- [211] S. Chin, Phys.Lett. B78 (1978) 552.
- [212] J.I. Kapusta, Nucl.Phys. B148 (1979) 461

- [213] T. Toimela, Phys.Lett. B124 (1983) 407.
- [214] P.B. Arnold and C.X. Zhai, Phys.Rev. D50 (1994) 7603, hep-ph/9408276
- [215] P.B. Arnold and C.X. Zhai, Phys.Rev. D51 (1995) 1906, hep-ph/9410360.
- [216] C.X. Zhai and B.M. Kastening, Phys.Rev. D52 (1995) 1906, hep-ph/9507380
- [217] P.H. Ginsparg, Nucl.Phys. B170 (1980) 388
- [218] T. Appelquist and RD Pisarski, Phys.Rev. D23 (1981) 2305
- [219] K. Farakos et al., Nucl.Phys. B442 (1995) 317, hep-lat/9412091
- [220] E. Braaten and A. Nieto, Phys.Rev D51 (1995) 6990, hep-ph/9501375
- [221] K. Kajantie et al., Nucl.Phys. B458 (1996) 90, hep-ph/9508379
- [222] N. Cabibbo and G. Parisi, Phys.Lett. B59 (1975) 67.
- [223] A.M. Polyakov, Phys.Lett.B72 (1978) 477
- [224] L. Susskind, Phys.Rev.D (1978)
- [225] N. Weiss, Phys.Rev. D24 (1981) 475
- [226] L.D. McLerran and B. Svetitsky, Phys. Rev. D24 (1981) 450.
- [227] R.D. Pisarski and M. Tytgat, (1997), hep-ph/9702340.
- [228] E.V. Shuryak, Phys.Lett. B107 (1981) 103
- [229] J. Minahan and K. Zarembo, JHEP 0303 (2003) 013, hep-th/0212208
- [230] I. Bena, J. Polchinski and R. Roiban, Phys.Rev. D69 (2004) 046002, hep-th/0305116.
- [231] N. Beisert, Nucl.Phys. B676 (2004) 3, hep-th/0307015.
- [232] N. Beisert, C. Kristjansen and M. Staudacher, Nucl.Phys. B664 (2003) 131, hep-th/0303060.
- [233] H.B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl.Phys. B185 (1981) 20.
- [234] H.B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl.Phys. B193 (1981) 173
- [235] K.G. Wilson, (1975)
- [236] J.B. Kogut and L. Susskind, Phys.Rev. D11 (1975) 395
- [237] T. Banks, L. Susskind and J.B. Kogut, Phys.Rev. D13 (1976) 1043
- [238] L. Susskind, Phys.Rev. D16 (1977) 3031
- [239] P.H. Ginsparg and K.G. Wilson, Phys.Rev. D25 (1982) 2649
- [240] M. Luscher, Phys.Lett. B428 (1998) 342, hep-lat/9802011
- [241] M. Creutz, Phys.Rev. D21 (1980) 2308
- [242] A. Kennedy and B. Pendleton, Phys.Lett. B156 (1985) 393
- [243] S.L. Adler, Phys.Rev. D23 (1981) 2901
- [244] F.R. Brown and T.J. Woch, Phys.Rev.Lett. 58 (1987) 2394
- [245] N. Cabibbo and E. Marinari, Phys.Lett. B119 (1982) 387
- [246] J. Kiskis, R. Narayanan and H. Neuberger, Phys.Lett. B574 (2003) 65, hep-lat/0308033
- [247] P. de Forcrand and O. Jahn, (2005) 67, hep-lat/0503041
- [248] B. Lucini and M. Teper, JHEP 0106 (2001) 050, hep-lat/0103027
- [249] H. Neuberger, Annales Henri Poincare 4 (2003) S147, hep-th/0212097
- [250] D.A. Kessler and H. Neuberger, Phys.Lett. B157 (1985) 416
- [251] H. Neuberger, Nucl.Phys. B340 (1990) 703
- [252] G. 't Hooft, (2002), hep-th/0204069
- [253] M. Bochicchio, JHEP 9901 (1999) 006, hep-th/9810015
- [254] S.R. Coleman, R. Jackiw and H.D. Politzer, Phys.Rev. D10 (1974) 2491
- [255] G. Marchesini and E. Onofri, J.Math.Phys. 21 (1980) 1103
- [256] D. Voiculescu, Operator algebras and their connections with topology and ergodic

- theory (Bucsteni, 1983), volume 1132 of Lecture Notes in Mathematics, pages 556-558 (Springer, 1985)
- [257] D. Voiculescu, *Invent. Math.*, 104 (1991) 201-220 (1991)
 - [258] D. Voiculescu et al., volume 1 of CRM Monograph Series. American Mathematical Society (1992)
 - [259] I.M. Singer, (1994)
 - [260] L. Accardi, Y. Lu and I. Volovich, (1994), hep-th/9412241
 - [261] P.D. Mitchener, *Non-Commutative Probability Theory*, <http://www.uni-math.gwdg.de/mitch/free.pdf>
 - [262] M.R. Douglas, *Phys.Lett.* B344 (1995) 117, hep-th/9411025
 - [263] M.R. Douglas, *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* 41 (1995) 66, hep-th/9409098
 - [264] R. Gopakumar and D.J. Gross, *Nucl.Phys.* B451 (1995) 379, hep-th/9411021
 - [265] Y. Makeenko and A.A. Migdal, *Nucl.Phys.* B188 (1981) 269
 - [266] Y. Makeenko and A.A. Migdal, *Phys.Lett.* B97 (1980) 253
 - [267] Y. Nambu, *Phys.Rev.* D10 (1974) 4262
 - [268] T. Goto, *Prog.Theor.Phys.* 46 (1971) 1560
 - [269] Y. Nambu, *Phys.Lett.* B80 (1979) 372
 - [270] A.M. Polyakov, *Phys.Lett.* B82 (1979) 247
 - [271] J.L. Gervais and A. Neveu, *Phys.Lett.* B80 (1979) 255
 - [272] D. Foerster, *Phys.Lett.* B87 (1979) 87
 - [273] D. Weingarten, *Phys.Lett.* B87 (1979) 97
 - [274] T. Eguchi, *Phys.Lett.* B87 (1979) 91
 - [275] T. Eguchi and H. Kawai, *Phys. Rev. Lett.* 48 (1982) 1063
 - [276] M. Unsal, talk at the Lattice 2011 conference, Squaw Valley, CA, US, July 10-16, 2011, <https://latt11.llnl.gov/html/plenary.php>
 - [277] G. Bhanot, U.M. Heller and H. Neuberger, *Phys.Lett.* B113 (1982) 47
 - [278] U.M. Heller and H. Neuberger, *Nucl.Phys.* B207 (1982) 1603
 - [279] D.J. Gross and Y. Kitazawa, *Nucl.Phys.* B206 (1982) 440
 - [280] G. Parisi, *Phys.Lett.* B112 (1982) 463
 - [281] G. Parisi and Y.C. Zhang, *Nucl.Phys.* B216 (1983) 408
 - [282] G. Parisi and Y. Zhang, *Phys.Lett.* B114 (1982) 319
 - [283] B. Bringoltz and S.R. Sharpe, *Phys.Rev.* D78 (2008) 034507, 0805.2146
 - [284] B. Bringoltz and S.R. Sharpe, *PoS LATTICE2008* (2008) 055, 0810.1239
 - [285] A. Gonzalez-Arroyo and M. Okawa, *Phys. Lett.* B120 (1983) 174
 - [286] A. Gonzalez-Arroyo and M. Okawa, *Phys.Rev.* D27 (1983) 2397
 - [287] G. 't Hooft, *Nucl.Phys.* B153 (1979) 141
 - [288] J. Goeneveld, J. Jurkiewicz and C. Korthals Altes, *Phys.Scripta* 23 (1981) 1022
 - [289] G. 't Hooft, *Commun.Math.Phys.* 81 (1981) 267
 - [290] P. van Baal, *Commun.Math.Phys.* 92 (1983) 1
 - [291] A. Gonzalez-Arroyo, (1997) hep-th/9807108
 - [292] A. Gonzalez-Arroyo and M. Okawa, *JHEP* 1007 (2010) 043, 1005.1981
 - [293] J. Barbon and C. Hoyos-Badajoz, *JHEP* 0601 (2006) 114, hep-th/0507267
 - [294] M. Unsal and L.G. Yaffe, *Phys.Rev.* D74 (2006) 105019, hep-th/0608180
 - [295] A. Armoni, M. Shifman and G. Veneziano, *Nucl.Phys.* B667 (2003) 170, hep-th/0302163
 - [296] A. Armoni, M. Shifman and G. Veneziano, *Phys.Rev.Lett.* 91 (2003) 191601, hep-

th/0307097

- [297] A. Armoni, M. Shifman and G. Veneziano, (2004), hep-th/0403071
- [298] A. Armoni, M. Shifman and G. Veneziano, Phys.Rev. D71 (2005) 045015, hep-th/0412203
- [299] T.J. Hollowood and J.C. Myers, JHEP 0911 (2009) 008, 0907.3665
- [300] Azeyanagi et al., Phys.Rev. D82 (2010) 125013, 1006.0717
- [301] S. Catterall, R. Galvez and M. Unsal, JHEP 1008 (2010) 010, 1006.2469
- [302] B. Bringoltz and S.R. Sharpe, Phys.Rev. D80 (2009) 065031, 0906.3538
- [303] B. Bringoltz, M. Koren and S.R. Sharpe, Phys.Rev. D85 (2012) 094504, 1106.5538
- [304] G. Cossu and M. D' Elia, JHEP 0907 (2009) 048, 0904.1353
- [305] A. Hietanen and R. Narayanan, JHEP 1001 (2010) 079, 0911.2449
- [306] A. Hietanen and R. Narayanan, Phys.Lett. B698 (2011) 171, 1011.2150
- [307] M. Hanada, J.W. Lee and N. Yamada, Proceedings of Science Lattice 2012 (2012) 047
- [308] A. Gonzalez-Arroyo and M. Okawa, Proceedings of Science Lattice 2012 (2012) 046
- [309] M. Unsal and L.G. Yaffe, Phys.Rev. D78 (2008) 065035, 0803.0344
- [310] R. Narayanan and H. Neuberger, Phys.Rev. Lett. 91 (2003) 081601, hep-at/0303023
- [311] R. Narayanan and H. Neuberger, Nucl.Phys. B696 (2004) 107, hep-lat/0405025
- [312] R. Narayanan and H. Neuberger, Phys.Lett. B638 (2006) 546, hep-th/0605173
- [313] J. Kiskis and R. Narayanan, JHEP 09 (2008) 080, 0807.1315
- [314] J. Kiskis and R. Narayanan, Phys.Lett. B679 (2009) 535, 0906.3015
- [315] J. Kiskis and R. Narayanan, Phys.Lett. B681 (2009) 372, 0908.1451
- [316] P. Kovtun, M. Unsal and L.G. Yaffe, JHEP 0312 (2003) 034, hep-th/0311098
- [317] P. Kovtun, M. Unsal and L.G. Yaffe, JHEP 0507 (2005) 008, hep-th/0411177
- [318] P. Kovtun, M. Unsal and L.G. Yaffe, Phys.Rev. D72 (2005) 105006, hep-th/0505075
- [319] M. Unsal and L.G. Yaffe, JHEP 1008 (2010) 030, 1006.2101
- [320] E. Poppitz and M. Unsal, JHEP 1001 (2010) 098, 0911.0358
- [321] E. Poppitz and M. Unsal, Phys.Rev. D82 (2010) 066002, 1005.3519
- [322] M.R. Douglas and G.W. Moore, (1996), hep-th/9603167
- [323] S. Kachru and E. Silverstein, Phys.Rev.Lett. 80 (1998) 4855, hep-th/9802183
- [324] M. Bershadsky and A. Johansen, Nucl.Phys. B536 (1998) 141, hep-th/9803249
- [325] M.J. Strassler, (2001), hep-th/0104032
- [326] M. Hanada and N. Yamamoto, JHEP 1202 (2012) 138, 1103.5480
- [327] A. Cherman and B.C. Tiburzi, JHEP 1106 (2011) 034, 1103.1639
- [328] M. Hanada et al., (2012), 1201.3718
- [329] A. Armoni and A. Patella, Phys.Rev. D85 (2012) 125021, 1204.2405
- [330] M. Hanada, Y. Matsuo and N. Yamamoto, (2012) 1205.1030
- [331] F. Bursa, R. Lau and M. Teper, (2012), 1208.4547
- [332] M. Hanada, Y. Matsuo and N. Yamamoto, (2012), 1210.2438
- [333] O. Philipsen (2010) 273, 1009.4089
- [334] P. de Forcrand, PoS LAT2009 010, 1005.0539
- [335] O. Philipsen, (2012), 1207.5999
- [336] M. Blake and A. Cherman, Phys.Rev. D86, 065006 (2012), 1204.5691
- [337] S. Catterall, D.B. Kaplan and M. Unsal, Phys.Rept. 484 (2009) 71, 0903.4881