



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΠΜΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ
ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΚΑΙ ΤΗΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Μεταπτυχιακή Εργασία
Νικόλας Καρπαδόπουλος

Αριθμητικές Μέθοδοι για την Αποτίμηση
και Αντιστάθμιση Αμερικάνικων
Δικαιωμάτων

Επιβλέπων Καθηγητής:
Μιχάλης Λουλάκης

ΑΘΗΝΑ 2014



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF
ATHENS

SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND
PHYSICAL SCIENCES

DIVISION OF MATHEMATICS

MSc MATHEMATICAL MODELLING IN MODERN
TECHNOLOGIES AND FINANCIAL ENGINEERING

Master Thesis
Nikolas Karpathopoulos

Numerical Methods for Pricing and
Hedging American Options

Supervisor:
Michail Loulakis

ATHENS 2014



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΠΜΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΚΑΙ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Μεταπτυχιακή Εργασία
Νικόλας Καρπαθόπουλος

Αριθμητικές Μέθοδοι για την Αποτίμηση και
Αντιστάθμιση Αμερικάνικων Δικαιωμάτων

Επιβλέπων Καθηγητής:
Μιχάλης Λουλάκης

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι:

Μιχάλης Λουλάκης

Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

Κωνσταντίνος Χρυσάφινος

Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

Αντώνης Παπαπαντολέων

JuniorProfessor TU Berlin

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα μου καθηγητή κ. Λουλάκη, για τη συνεχή καθοδήγηση του στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, αλλά και για τη στήριξη του σε οποιοδήποτε ζήτημα αντιμετώπιζα στις σπουδές μου. Επιπροσθέτως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ Χρυσάφινο για τις πολύτιμες παρατηρήσεις του στην παρούσα εργασία, καθώς και τον κ Παπαπαντολέων για την τιμή που μου έκανε να συμμετάσχει στην εξεταστική επιτροπή. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την οικογένεια μου για τη στήριξη τους και την υπομονή τους σε όλα τα φοιτητικά μου χρόνια, αλλά και τους φίλους μου Ίριδα και Albert για την πολύτιμη βοήθεια και συμπαράσταση τους.

Abstract

American Options allow the holder to exercise the option at any time prior to and including its maturity date . Therefore, the evaluation of these options is more complicated than the European ones, since we have to determine not only the option value, but also the time that should be exercised. Thus, numerical methods should be applied to deal with the pricing of these options.

In this thesis, we presented some numerical methods for pricing American Options. More precisely, we introduced the finite elements method, the finite differences and the binomial method, giving emphasis mainly on the finite elements method. Furthermore, based on [2], we introduced an algorithm for evaluating the early exercise, for the finite differences and the finite elements, and we compared this algorithm with the algorithm of the early exercise of the binomial method.

In the process of examining which algorithm is better, we used the early exercise of the American Perpetual Put Option, which has an analytical form. Comparing these methods with the perpetual, we saw that the algorithm for the early exercise of the finite elements method converged asymptotically with the early exercise of the perpetual, while the binomial method exceeded the value of the perpetual. Moreover, we discretized the American Put Option Worst of Two Assets using the finite elements method by transforming the 2D Black Scholes equation to the 2D general diffusion equation. Due to the fact that spurious oscillations may occur based on [35] we introduced the Streamline Upwind Galerkin Method . Finally, we presented some Greeks: Delta Gamma and Theta for the American Put Option using finite differences.

The thesis is divided into 7 chapters. In chapter 1, we introduced some properties of the American Put Option, such as self financing strategies with consumption, early exercise curve and smooth pasting fit condition and their proofs based on [47], [30], [50] as well as the Greeks Delta Gamma and Theta (based on [33], [37]).

In chapter 2, we presented the American Put Option as an LCP problem (Linear Complementarity Problem) and based on [3], we gave a transformation of the Black Scholes equation to the heat equation.

In chapter 3, we introduced the method of finite differences for discretizing the heat equation including the pricing of American and European options. Thereafter, in chapter 4, we presented, the finite elements for pricing the above options. In order to solve the discretized system which came from the finite differences

and finite elements method, we used PSOR and SOR iterative methods, which were presented in chapter 5.

In chapter 6, we introduced the transformation of the 2D Black Scholes equation to the 2D general diffusion equation, and it was discretized using Streamline Upwind Galerkin Method. Lastly, based on the above, we presented some numerical applications for pricing American Call and Put options and the American Put option Worst of two Assets including their Greeks.

In conclusion, all the previous applications were based on the use of MATLAB, which the code is given in the Appendix G.

Keywords: Finite Elements, Finite Differences, Early Exercise, PSOR, Streamline Upwind Galerkin Method, Delta, Gamma, Theta

Information

Title: Numerical Methods for Pricing and Hedging American Options

Author: Nikolas Karpathopoulos

Supervisor: Michail Loulakis

Institute: National Technical University of Athens

Department of Applied Mathematics and Physical Sciences

Msc Mathematical Modelling in Modern Technologies and Financial Engineering

Date: April 2014

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η παρουσίαση αριθμητικών μεθόδων για την τιμολόγηση Αμερικάνικων Δικαιωμάτων. Πιο συγκεκριμένα έγινε χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών. Το γραμμικό σύστημα που προκύπτει από τις ανωτέρω μεθόδους επιλύθηκε με χρήση της επαναληπτικής μεθόδου PSOR. Επιπροσθέτως, για τον προσδιορισμό της πρόωρης άσκησης βασιζόμενοι στο [2], κατασκευάσαμε έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό της και συγκρίναμε τα αποτελέσματα του αλγορίθμου μας, με τον αντίστοιχο αλγόριθμο της διωνυμικής μεθόδου. Επιπλέον με χρήση των πεπερασμένων διαφορών διακριτοποιήσαμε τα Greeks: Delta, Theta, Gamma. Τέλος για την τιμολόγηση Αμερικάνικων Δικαιωμάτων Πώλησης με δύο υποκείμενα προϊόντα, μετασχηματίσαμε τη 2D Black Scholes στη γενικευμένη εξίσωση διαχύσης, όπου στην τελευταία εφαρμόσαμε τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Για την αντιμετώπιση τυχών διαταραχών που προκύπτουν από την εξίσωση διαχύσης βασιζόμενοι στο [35] εισάγαμε τη μέθοδο Streamline Upwind Galerkin . Αξίζει να επισημανθεί ότι οι αριθμητικές εφαρμογές έγιναν με χρήση της MATLAB, οι αλγόριθμοι των οποίων βρίσκονται στο Παράρτημα Γ'.

Πληροφορίες

Τίτλος: Αριθμητικές Μέθοδοι για την Αποτίμηση και Αντιστάθμιση Αμερικάνικων Δικαιωμάτων

Συγγραφέας: Νικόλας Καρπαθόπουλος

Επιβλέπων Καθηγητής: Μιχάλης Λουλάκης

Ίδρυμα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΔΠΜΣ Μαθηματική Προτυποποίηση σε Σύγχρονες Τεχνολογίες και την Οικονομία

Ημερομηνία: Απρίλιος 2014

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων	vii
Κατάλογος Πινάκων	x
1 Εισαγωγή στα Χρηματοοικονομικά Παράγωγα	1
1.1 Χαρακτηριστικά Δικαιωμάτων Προαίρεσης	2
1.1.1 Θέσεις Δικαιωμάτων Προαίρεσης και η Συνάρτηση Αποπληρωμής	2
1.2 Η Εξίσωση Black Scholes	4
1.2.1 Αυτοχρηματοδοτούμενο Χαρτοφυλάκιο	5
1.2.2 Martingale Μέτρα Πιθανότητας	6
1.2.3 Απότιμηση Δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού Τύπου	7
1.3 Αμερικάνικα Δικαιώματα	11
1.3.1 Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης	11
1.3.2 Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς	18
1.3.3 Το Αέναο Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης	21
1.4 Τα Greeks	23
1.4.1 Delta	23
1.4.2 Theta	25
1.4.3 Gamma	27
1.4.4 Σχέση μεταξύ των Greeks	27
2 Η Εξίσωση Black-Scholes και η Εξίσωση της Θερμότητας	29
2.1 Η Εξίσωση της Θερμότητας και το Ευρωπαϊκό Παράγωγο	29
2.2 Καμπύλη Ελεύθερου Συνόρου και το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης	32
2.3 Το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης και το Γραμμικό Συμπληρωματικό Πρόβλημα	35
3 Πεπερασμένες Διαφορές για το Αμερικάνικο Παράγωγο	38
3.1 Διακριτοποίηση της Εξίσωσης της Θερμότητας με Χρήση Πεπερασμένων Διαφορών	38
3.1.1 Η άμεση μέθοδος Euler για την εξίσωση θερμότητας	39
3.1.2 Ευστάθεια της άμεσης μεθόδου Euler	41
3.1.3 Η έμμεση μέθοδος Euler	43

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

3.1.4	Η μέθοδος Crank Nicolson	44
3.2	Πεπερασμένες Διαφορές για το Αμερικάνικο Παράγωγο	49
4	Πεπερασμένα Στοιχεία για το Αμερικάνικο Παράγωγο	53
4.1	Πεπερασμένα Στοιχεία για Εξισώσεις Παραβολικού Τύπου	53
4.1.1	Χώροι Sobolev	54
4.1.2	Μεταβολική Μορφή Παραβολικών Εξισώσεων	57
4.1.3	Εκτίμηση Σφάλματος	61
4.1.4	Σύγκλιση της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων	63
4.2	Πεπερασμένα Στοιχεία για την Εξίσωση της Θερμότητας	63
4.3	Πεπερασμένα Στοιχεία για το Αμερικάνικο Παράγωγο	66
5	Επαναληπτικές Μέθοδοι για την Εξίσωση Black and Scholes	72
5.1	Σύγκλιση των Επαναληπτικών Μεθόδων	72
5.2	Γραμμικές Επαναληπτικές Μέθοδοι	73
5.3	Οι μέθοδοι Jacobi-Gauss-Seidel και οι Μέθοδοι Χάλαρωσης SOR-PSOR	74
5.4	Σύγκλιση των Μεθόδων Χαλάρωσης	78
6	Διακριτοποίηση της 2-D Black and Scholes Εξίσωσης με Χρήση Πεπερασμένων Στοιχείων	83
6.1	Η 2-D Black and Scholes και η Γενικευμένη Εξίσωση Διάχυσης	83
6.2	Διακριτοποίηση της Γενικευμένης Εξίσωσης Διάχυσης με χρήση της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων	85
6.3	Ασιατικά Παράγωγα	93
6.4	Ομόλογα	94
6.5	Αμερικάνικο Παράγωγο με δύο υποκείμενα προϊόντα	95
7	Αριθμητικές Εφαρμογές	97
7.1	Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης	97
7.1.1	Προσδιορισμός Καμπύλης Πρόωρης Άσκησης	101
7.1.2	Αριθμητικά Αποτελέσματα για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης	103
7.1.3	Τετραγωνικές Συναρτήσεις Βάσης για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης	107
7.1.4	Τα Greeks για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης	110
7.2	Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς	111
7.3	Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης με Δύο Υποκείμενα Προϊόντα	115
A	Η Αναλυτική Λύση της Black Scholes Εξίσωσης	119
B	Το Διωνυμικό Μοντέλο για την Αποτιμής Παραγώγων	120
Γ	Οι Αλγόριθμοι στην MATLAB®	124
	Βιβλιογραφία	147

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Θέσεις Δικαιωμάτων Προαίρεσης για $K = 20$	3
1.2	Καμπύλη Πρόωρης Άσκησης για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης, για $K = 50, T = 1$	16
1.3	Η Κυρτή Συνάρτηση $h(x) = (x - K)^+$	19
1.4	Υπολογισμός του Delta	24
1.5	Το Delta Greek για το Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς	26
1.6	Το Delta Greek για το Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Πώλησης	26
1.7	Το Theta Greek για το Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς	27
1.8	Το Gamma Greek για το Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Πώλησης	28
2.1	Το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης	33
2.2	Το Απλό πρόβλημα εμποδίου	36
3.1	Η άμεση μέθοδος Euler	40
3.2	Η έμμεση μέθοδος Euler	43
3.3	Η μέθοδος Crank Nicolson	45
4.1	Συναρτήσεις Στέγες	65
5.1	Γραφική αναπαράσταση των βέλτιστων ω για την επαναληπτική μέθοδο SOR	78
6.1	Συναρτήσεις Βάσης	87
6.2	Αναφορικό Τρίγωνο	89
7.1	Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης για $S_0 = 50, K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1$	98
7.2	Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης για $S_0 = 50, K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 1$ στις 3 διαστάσεις	98
7.3	Καμπύλη Πρόωρης Άσκησης του Αμερικάνικου Δικαιώματος Πώλησης με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων για $K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 5/12$	101

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

7.4	Καμπύλη Πρόωρης Ασκήσης για τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (κόκκινη γραμμή) για την Μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών (μπλέ άστρο) και με το Διωνυμικό Μοντέλο (πράσινη γραμμή) για $K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 5/12$	101
7.5	Σύγκλιση της Πρόωρης Άσκησης S_f για την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων και το Διωνυμικό Μοντέλο για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης $K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4 T = 5/12$	102
7.6	Σύγκλιση της Πρόωρης Άσκησης για την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων και το Διωνυμικό Μοντέλο ως προς το Αέναο Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης για $K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4$ με χρόνο άσκησης έως $T = 30$ με $M = N = 1600$	103
7.7	Αριθμητικά Αποτελέσματα για τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων για το Δικαίωμα Πωλήσης για $K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 5/12$	104
7.8	Αριθμητικά Αποτελέσματα για τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πωλήσης για $S = K = 100, r = 6\%, \sigma = 0.4, \omega = 1.15$ και $T = 0.5$	105
7.9	Σύγκλιση και ο αντίστοιχος υπολογιστικός χρόνος για την μέθοδο των Πεπερασμένων στοιχείων για $K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 5/12$ και $eps = 1e - 7$	106
7.10	Σύγκλιση και ο αντίστοιχος υπολογιστικός χρόνος για την μέθοδο των Πεπερασμένων στοιχείων για $K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 5/12$ και $eps = 1e - 8$	106
7.11	Σύγκριση των Αριθμητικών Αποτελεσμάτων για τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, των Πεπερασμένων Διαφορών και του Διωνυμικού Μοντέλου, για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πωλήσης με $S = K = 50, r = 0.1\%, \sigma = 0.4, \omega = 1.3$ και $T = 5/12 eps = 1e-7$ με αριθμό βημάτων έως 3000	107
7.12	Τετραγωνικές Συναρτήσεις	108
7.13	Συγκλίση και Log Σφάλμα για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης με χρήση τετραγωνικών συναρτήσεων, για $K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 5/12$	110
7.14	Τα Greeks για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης, για $K = 5, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 5/12$	111
7.15	Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς χωρίς καταβολή μερισμάτων για $K = 10, r = 0.25, \sigma = 0.6, T = 1$	112
7.16	Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς χωρίς καταβολή μερισμάτων για $K = 10 r = 0.25, \sigma = 0.6, T = 1$ στις 3 διαστάσεις	112
7.17	Το Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς για $K = 10, r = 0.25, \sigma = 0.6, T = 1$ με χρήση μερίσματος $\delta = 0.2$	113
7.18	Αριθμητικά Αποτελέσματα για το Δικαίωμα Αγοράς, με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων για $K = 10, r = 0.25, \sigma = 0.6, T = 1$, με χρήση μερίσματος $\delta = 0.2$	114
7.19	Πλέγμα Διαμέρισης $[0, 2S_1] \times [0, 2S_2]$, για το Δικαίωμα Πώλησης, με χρήση Ομοιόμορφων Τριγωνισμών, με $S_1 = S_2 = S_0 = 40$	116
7.20	Η συνάρτηση Αποπληρωμής για το Worst Of Two Assets	117

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

7.21 Το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης για το Worst Of Two Assets, με $S_1 = S_2 = 40$, $K = 40$, $T = 0.5$, $r = 0.05$, και $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$	117
7.22 Τα Delta Greeks για το 2D Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης Worst of Two Assets με $S_1 = S_2 = 40$, $K = 40$, $T = 0.5$, $r = 0.05$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$ και $\rho = 0.5$	118
7.23 Τα Gamma Greeks για το 2D Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης Worst of Two Assets με $S_1 = S_2 = 40$, $K = 40$, $T = 0.5$, $r = 0.05$, και $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$	118
B.1 Το Διωνυμικό Μοντέλο	122

Κατάλογος Πινάκων

7.1	Αριθμητικά Αποτελέσματα Δικαιώματος Πώλησης για τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, των Πεπερασμένων Διαφορών και του Διωνυμικού Μοντέλου για $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$	100
7.2	Αριθμητικά Αποτελέσματα Πρόωρης Άσκησης με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων για $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$	102
7.3	Αριθμητικά Αποτελέσματα Πρόωρης Άσκησης με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων και το Διωνυμικό Μοντέλο ως προς το Αντίστοιχο Αέριο Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης για $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$ με $M = N = 1600$	103
7.4	Αριθμητικά Αποτελέσματα για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης με χρήση τετραγωνικών συναρτήσεων P2(FEM) με $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$	109
7.5	Αριθμητικά Αποτελέσματα των μεθόδων των Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM), των Πεπερασμένων Διαφορών και του Διωνυμικού Μοντέλου για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς (Χωρίς Μερίσματα) για $K = 10$, $r = 0.25$, $\sigma = 0.6$, $T = 1$	112
7.6	Αριθμητικά Αποτελέσματα των μεθόδων των Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM), των Πεπερασμένων Διαφορών και του Διωνυμικού Μοντέλου για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς για $K = 10$, $r = 0.25$, $\sigma = 0.6$, $T = 1$ με χρήση μερίσματος $\delta = 0.2$	113
7.7	Αριθμητικά Αποτελέσματα Worst Of Two Assets για $S_1 = S_2 = 40$, $K = 40$, $T = 0.5$, $r = 0.05$, και $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$	116

Κατάλογος Αλγορίθμων

5.3.1 Ο αλγόριθμος της PSOR	77
7.1.1 Ο αλγόριθμος του Αμερικάνικου Δικαιώματος Πώλησης	99
7.1.2 Ο αλγόριθμος Πρόωρης Άσκησης για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης	101

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στα Χρηματοοικονομικά Παράγωγα

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τις βασικές ιδιότητες και χαρακτηριστικά των Ευρωπαϊκών και Αμερικάνικων Παραγώγων, καθώς τα Greeks των οποίων η χρήση γίνεται για αντιστάθμιση κινδύνου. Προτού παρουσιάσουμε τις αντίστοιχες ιδιότητες τους θα παρουσιάσουμε τα κύρια χαρακτηριστικά των παραγώγων. Θα ξεκινήσουμε δίνοντας τον ορισμό του παραγώγου.

Ένα παράγωγο ορίζεται ως ένα χρηματοοικονομικό προϊόν του οποίου η αξία εξαρτάται από την αξία κάποιου άλλου, πιο συγκεκριμένα του υποκείμενου προϊόντος. Το υποκείμενο προϊόν μπορεί να είναι μία μετοχή, ένα ομόλογο, ένα αγαθό (πχ χρυσός, πετρέλαιο), ένας χρηματιστηριακός δείκτης ή ακόμα και ένα άλλο παράγωγο. Χαρακτηριστικά παραδείγματα παραγώγων είναι τα προθεσμιακά συμβόλαια και τα δικαιώματα προαίρεσης. Στην εργασία αυτή θα εστιάσουμε στα δικαιώματα προαίρεσης.

Προθεσμικά Συμβόλαια (Forward Contracts)

Τα προθεσμιακά συμβόλαια αποτελούν την απλούστερη μορφή παραγώγου. Είναι μία συμφωνία μεταξύ δύο συμβαλλόμενων, για αγορά ή πώληση ενός υποκείμενου προϊόντος σε μία προκαθορισμένη χρονική στιγμή T που ονομάζεται χρόνος ωρίμανσης και σε προκαθορισμένη τιμή K που ονομάζεται τιμή παράδοσης. Ο ένας συμβαλλόμενος έχει θετική θέση (long position) όπου συμφωνεί να αγοράσει μία ποσότητα ενός υποκείμενου προϊόντος σε προκαθορισμένη τιμή. Αντίστοιχα ο άλλος συμβαλλόμενος λαμβάνει την αρνητική θέση (short position) κατά την οποία συμφωνεί στην πώληση μίας ποσότητας υποκείμενου προϊόντος σε προκαθορισμένη τιμή και χρόνο ίδιο με αυτού του κατόχου της θετικής θέσης.

1.1. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ

Δικαιώματα Προαίρεσης (Options)

Το δικαίωμα προαίρεσης είναι ένα συμβόλαιο μεταξύ δύο συμβαλλόμενων το οποίο εν αντιθέσει με τα προθεσμιακά συμβόλαια έχει πιο σύνθετη μορφή. Τα απλούστερα δικαιώματα προαίρεσης είναι το δικαίωμα αγοράς (call option) και αντίστοιχα το δικαίωμα πώλησης (put option). Το δικαίωμα αγοράς δίνει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση στον κάτοχο του να αγοράσει από τον συμβαλλόμενο τμήμα υποκείμενου προϊόντος στον χρόνο T έναντι τιμής K . Αντίστοιχα το δικαίωμα πώλησης (put option) δίνει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση στον κάτοχο του να πουλήσει τμήμα του υποκείμενου προϊόντος στον χρόνο T με τιμή K . Ο χρόνος T καλείται χρόνος ωρίμανσης και αντίστοιχα η τιμή K καλείται τιμή άσκησης (exercise price or strike price).

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι για τον κάτοχο των δικαιωμάτων προαίρεσης υπάρχει το δικαίωμα και όχι υποχρέωση να ασκήσει το δικαίωμα. Το γεγονός αυτό είναι που το κάνει να διαφέρει από τα προθεσμιακά συμβόλαια και τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης. Τα κυριότερα δικαιώματα προαίρεσης είναι το Ευρωπαϊκό και το Αμερικάνικο. Το Ευρωπαϊκό δικαίωμα ασκείται μόνο στον χρόνο ωρίμανσης, έναντι των Αμερικάνικων (κυρίως των Αμερικάνικων δικαιωμάτων πώλησης) τα οποία ασκούνται σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Αυτό οφείλεται στην δυνατότητα πρόωρης άσκησης που έχει το Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης.

1.1 Χαρακτηριστικά Δικαιωμάτων Προαίρεσης

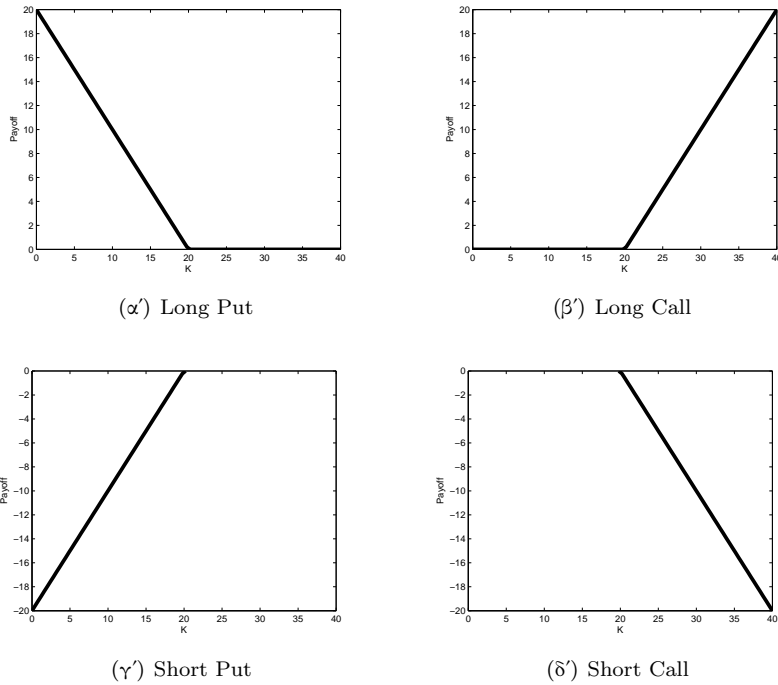
1.1.1 Θέσεις Δικαιωμάτων Προαίρεσης και η Συνάρτηση Αποπληρωμής

Στα δικαιώματα προαίρεσης υπάρχουν 4 τύποι θέσεων:

1. Θετική θέση για το δικαίωμα αγοράς
2. Θετική θέση για το δικαίωμα πώλησης
3. Αρνητική θέση για το δικαίωμα αγοράς
4. Αρνητική θέση για το δικαίωμα πώλησης

Για το δικαίωμα αγοράς η συνάρτηση αποπληρωμής (payoff) εκφράζει το ποσό το οποίο η τιμή της μετοχής θα υπερβαίνει την ανάλογη τιμή άσκησης του δικαιώματος. Συνεπώς τα δικαιώματα αγοράς έχουν μεγαλύτερη αξία όταν αυξάνεται η τιμή της μετοχής, ενώ θα έχουν μικρότερη αξία όταν αυξάνεται η τιμή άσκησης του δικαιώματος. Αντίστοιχα για τα δικαιώματα πώλησης η συνάρτηση αποπληρωμής εκφράζει το ποσό το οποίο η τιμή άσκησης του δικαιώματος θα υπερβαίνει την τιμή της μετοχής. Σε αντίθεση με το δικαίωμα αγοράς το δικαίωμα πώλησης θα έχει μεγαλύτερη αξία όταν η αντίστοιχη τιμή της μετοχής μειώνεται και μικρότερη αξία όταν η τιμή της μετοχής αυξάνεται.

1.1. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ



Σχήμα 1.1: Θέσεις Δικαιωμάτων Προαίρεσης για $K = 20$

Η συνάρτηση αποπληρωμής για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς στην θετική θέση είναι:

$$\max(S_T - K, 0)$$

όπου S_T η τιμή της μετοχής στον χρόνο ωρίμανσης του δικαιώματος T

Η συνάρτηση αποπληρωμής για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς στην αρνητική θέση είναι:

$$-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)$$

Αντίστοιχα για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης στην θετική θέση θα έχουμε:

$$\max(K - S_T, 0)$$

Τέλος για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης στην αρνητική θέση θα έχουμε:

$$-\max(K - S_T, 0) = \min(S_T - K, 0)$$

Αρχή της μη επιτηδειότητας (no arbitrage)

Τέλος για την ανάλυση της εξίσωσης Black Scholes είναι σημαντικό να αναφέρουμε την αρχή της μη επιτηδειότητας. Η επιτηδειότητα εμπλέκει τη δυνατότητα κέρδους χωρίς ανάληψη ρίσκου. Παραδείγματος χάριν, θεωρούμε ότι μία μετοχή διαπραγματεύεται στο χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης και ταυτόχρονα στο χρηματιστήριο

1.2. Η ΕΞΙΣΩΣΗ BLACK SCHOLES

του Λονδίνου. Υποθέτουμε ότι η τιμή της μετοχής στο χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης είναι 175 \$ και 100 £ στο χρηματιστήριο του Λονδίνου. Δεδομένου ότι το αντίστοιχο επιτόκιο επιφέρει 1.7 \$ σε αντιστοιχία με 1 £ ένας κερδοσκόπος θα μπορούσε στιγμιαία να αγοράσει 100 μερίδια μετοχών από το χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης και να τις πουλήσει στο χρηματιστήριο του Λονδίνου με κέρδος χωρίς ρίσκο:

$$100 \times [1.75 \times 100 - 172] = 300\$$$

χωρίς περαιτέρω χρηματοοικονομικά έξοδα. Ωστόσο η επιτηδειότητα αυτή δεν μπορεί να διαρκέσει για μεγάλο χρονικό διάστημα. Καθώς οι κερδοσκόποι όσο αγοράζουν μετοχές από το χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης, από την αρχή του νόμου προσφοράς και ζήτησης το γεγονός αυτό θα επιφέρει αύξηση της τιμής της μετοχής σε δολάρια και ομοίως μία ανάλογη μείωση της τιμής της μετοχής σε λίρες. Συνεπώς πολύ γρήγορα οι δύο τιμές των μετοχών θα έχουν ίδια αξία και στα δύο χρηματιστήρια, έτσι ώστε ο παραπάνω μηχανισμός να μην επιφέρει κέρδος.

Η αρχή της Επιτηδειότητας

Η αρχή της μη επιτηδειότητας αξιώνει ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχει κέρδος χωρίς λήψη ρίσκου. Στην μαθηματική χρηματοοικονομία δεχόμαστε την αρχή της μη επιτηδειότητας ως αξίωμα.

1.2 Η Εξίσωση Black Scholes

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε την εξίσωση Black Scholes της οποίας η χρήση γίνεται για την τιμολόγηση παραγώγων. Πρωτού παρουσιάσουμε την ανάλυση της εξίσωσης, θα πρέπει να κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

- Το επιτόκιο r και η διακύμανση σ είναι σταθερές συναρτήσεις.
- Η διαπραγμάτευση της μετοχής είναι συνεχής.
- Δεν υπάρχουν περαιτέρω χρηματοοικονομικά έξοδα.
- Θεωρούμε ότι δεν υπάρχει επιτηδειότητα (no arbitrage)
- Το υποκείμενο προϊόν- μετοχή η οποία δίνεται απο την στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dS = S\mu dt + S\sigma dW \quad (1.1)$$

- Το υποκείμενο προϊόν δεν αποδίδει μερίσματα. Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να παραληφθεί στην περίπτωση όπου τα μερίσματα είναι γνωστά εκ των προτέρων.

Με βάση τους ανωτέρω ισχυρισμούς είμαστε έτοιμοι να περιγράψουμε το μοντέλο Black Scholes. Σκόπος μας είναι να φτιάξουμε ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο

1.2. Η ΕΞΙΣΩΣΗ BLACK-SCHOLES

από το προϊόν χωρίς ρίσκο και το υποκείμενο προϊόν.

Έστω ότι το υποκείμενο προϊόν ακολουθεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad t \in [0, T] \quad (1.2)$$

Από το Λήμμα του Itô θα έχουμε:

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t\right)$$

Έστω το προϊόν χωρίς ρίσκο δίνεται από την ακόλουθη συνήθη διαφορική εξίσωση

$$dA_t = r A_t dt$$

η λύση της οποίας δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{cases} A_t = A_0 e^{rt} \\ A_0 = 1 \end{cases}$$

1.2.1 Αυτοχρηματοδοτούμενο Χαρτοφυλάκιο

Ένα χαρτοφυλάκιο $\varphi = (\varphi_t)_{0 \leq t \leq T}$ με $\varphi_t = (H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$, όπου H_t^0 είναι η ποσότητα που αντιστοιχεί στο προϊόν χωρίς ρίσκο, και αντίστοιχα H_t η ποσότητα που αντιστοιχεί στο υποκείμενο προϊόν. Η τιμή του χαρτοφυλακίου σε χρόνο t δίνεται από τη σχέση:

$$V_t(\varphi) = H_t^0 A_t + H_t S_t$$

Για να είναι το χαρτοφυλάκιο μας αυτοχρηματοδοτούμενο θα πρέπει

$$dV_t(\varphi) = H_t^0 dA_t + H_t dS_t \quad (1.3)$$

Για να είναι καλά ορισμένη η (1.3) θα πρέπει

$\int_0^T |H_t^0| < \infty$ και $\int_0^T H_t < \infty$. Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^T H_t^0 dA_t = \int_0^T H_t^0 r e^{rt} dt$$

είναι καλά ορισμένο, και αντίστοιχα για το στοχαστικό ολοκλήρωμα θα έχουμε:

$$\int_0^T H_t dS_t = \int_0^T (H_t \mu S_t) dt + \int_0^T \sigma H_t S_t dW_t$$

Ορισμός 1.1. Ένα χαρτοφυλάκιο φ είναι αυτοχρηματοδοτούμενο αν τα $(H_t^0)_{0 \leq t \leq T}$ και $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ ικανοποιούν:

1. $\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t dt < +\infty$ σχεδόν παντού.
2. $H_t^0 A_t + H_t S_t = H_0^0 A_0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0 dA_u + \int_0^t H_u dS_u$ σχεδόν παντού.

1.2. Η ΕΞΙΣΩΣΗ BLACK-SCHOLES

Πρόταση 1.1. Έστω $\varphi_t = (H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$ διαδικασία στον \mathbb{R}^2 με

$$\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t dt < \infty \text{ σχεδόν παντού}$$

Έστω $V_t(\varphi)$ η αξία του χαρτοφυλακίου

$$V_t(\varphi) = H_t^0 A_t + H_t S_t$$

Ορίζουμε:

$$\tilde{V}_t(\varphi) = e^{-rt} V_t(\varphi)$$

την προεξοφλημένη τιμή του χαρτοφυλακίου φ . Τότε η φ ορίζει ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο αν και μόνο αν

$$\tilde{V}_t(\varphi) = V_0(\varphi) + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u \text{ σχεδόν παντού } \forall t \in [0, T]$$

όπου $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ η προεξοφλημένη τιμή του υποκείμενου προϊόντος.

Απόδειξη. Έστω φ αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο. Από την παραγωγή της e^{-rt} και της διαδικασίας $V_t(\varphi)$ θα έχουμε:

$$d\tilde{V}_t(\varphi) = -r\tilde{V}_t(\varphi) + e^{-rt} dV_t(\varphi)$$

καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t(\varphi) &= -re^{-rt} (H_t^0 e^{rt} + H_t S_t) dt + e^{-rt} H_t^0 d(e^{rt}) + e^{-rt} H_t dS_t \\ &= H_t (-re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t) = H_t d\tilde{S}_t \end{aligned}$$

□

1.2.2 Martingale Μέτρα Πιθανότητας

Έστω (Ω, \mathcal{F}, P) χώρος πιθανότητας. Ένα μέτρο πιθανότητας Q στον (Ω, \mathcal{F}) είναι ισοδύναμο με το μέτρο P αν και μόνο αν

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0$$

Θεώρημα 1.1. (Θεώρημα Random Nikodym) Το μέτρο Q είναι ισοδύναμο με το μέτρο P αν και μόνο αν υπάρχει τυχαία μεταβλητή Z στον (Ω, \mathcal{F}) τέτοια ώστε

$$Q(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

τότε η $Z = \frac{dQ}{dP}$ καλείται *Random Nikodym παράγωγος*.

1.2. Η ΕΞΙΣΩΣΗ BLACK-SCHOLES

Θεώρημα 1.2. Θεώρημα του Girsanov Έστω $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ διαδικασία με $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ σχεδόν παντού και αντίστοιχα μία διαδικασία $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ που ορίζεται ως ακολούθως:

$$L_t = \exp \left(- \int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right)$$

τότε η L_t είναι \mathcal{F}_t -martingale. Ορίζουμε στον (Ω, \mathcal{F}_T) το μέτρο πιθανότητας Q με

$$Q(A) = \int_A L_T dP \quad A \in \mathcal{F}_T$$

Τότε η διαδικασία $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds$ είναι μία \mathcal{F}_t τυπική κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q .

Θεώρημα 1.3. (Το Θεωρήμα Αναπαράστασης των Martingales) Έστω $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ τετραγωνικά ολοκληρώσιμο martingale ως προς την διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. Τότε υπάρχει διαδικασία $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ τέτοια ώστε $\mathbb{E} \left[\int_0^T H_s ds \right] < \infty$ και

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s d\tilde{W}_s \quad \forall t \in [0, T] \text{ σχεδόν παντού}$$

1.2.3 Απότιμηση Δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού Τύπου

Βασιζόμενοι στα ανωτέρω θα δείξουμε ότι υπάρχει ισοδύναμο μέτρο του P τέτοιο ώστε η προεξοφλημένη αξία του υποκείμενου προϊόντος $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ να είναι martingale κάτω από το ισοδύναμο μέτρο Q . Από την στοχαστική διαφορική εξίσωση για το υποκείμενο προϊόν θα έχουμε:

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t \\ &= \tilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma d\tilde{W}_t) \end{aligned}$$

Θέτοντας:

$$\tilde{W}_t = W_t + \frac{(\mu - r)}{\sigma} t$$

καταλήγουμε

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\tilde{W}_t$$

Συνεπώς από το Θεωρήμα του Girsanov για $\theta_t = \frac{(\mu - r)}{\sigma}$ θα υπάρχει ισοδύναμο μέτρο Q τέτοιο ώστε η \tilde{S}_t να είναι martingale και συνεπώς

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp \left(\sigma \tilde{W}_t - \frac{\sigma^2 t}{2} \right)$$

Ορισμός 1.2. Ένα χαρτοφυλάκιο $\varphi_t = (H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$ είναι αποδεκτό αν είναι αυτοχρηματοδοτούμενο και η προεξοφλημένη τιμή του $\tilde{V}_t(\varphi) = H_t^0 + H_t \tilde{S}_t$ είναι η αξία του χαρτοφυλακίου για όλα τα t τέτοιο ώστε η $\sup_{t \in [0, T]} \tilde{V}_t$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμο martingale κάτω από το μέτρο Q .

1.2. Η ΕΞΙΣΩΣΗ BLACK-SCHOLES

Ένα δικαίωμα λέμε ότι αναπαράγεται από ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο αν η συνάρτηση αποπληρωμής του δικαιώματος είναι ίση με την τελική αξία του χαρτοφυλακίου. Είναι προφανές ότι ένα δικαίωμα h μπορεί να αναπαραχθεί από ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο αν η h είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη διαδικασία κάτω από το μέτρο Q . Στην περίπτωση του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με $h = (S_T - K)^+$ παρατηρούμε ότι ισχύει η ανωτέρω ιδιότητα αφού $\mathbb{E}^Q[S_T^2] < \infty$.

Θεώρημα 1.4. Στο μοντέλο Black-Scholes οποιοδήποτε παράγωγο που είναι \mathcal{F}_T -μετρήσιμο και είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή κάτω από το μέτρο Q , μπορεί να αναπαραχθεί από ένα χαρτοφυλάκιο φ η τιμή του οποίου δίνεται από

$$V_t = \mathbb{E}^Q \left[e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t \right]$$

και συνεπώς η τιμή του δικαιώματος δίνεται από την $\mathbb{E}^Q [e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t]$

Βασιζόμενοι στο Θεώρημα 1.4 και εκφράζοντας την τυχαία μεταβλητή h ως $h = f(S_T)$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}^Q [e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}^Q \left[e^{-r(T-t)} f \left(S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

Συνεπώς θα έχουμε:

$$V_t = F(t, S_t)$$

με

$$F(t, S_t) = \mathbb{E}^Q \left[e^{-r(T-t)} f \left(x e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \right) \right]$$

Συνεπώς για το Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς με $f(x) = (x - K)^+$ θα έχουμε:

$$F(t, x) = \mathbb{E}^Q \left[e^{-r(T-t)} \left(x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T - W_t)} - K \right)^+ \right]$$

και δεδομένου ότι οι προσαυξήσεις της κίνησης Brown $W_T - W_t$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους με μέση τιμή 0, και διακύμανση $T - t$ καταλήγουμε:

$$= \mathbb{E} \left[x e^{\sigma\sqrt{T-t} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} - K e^{-r(T-t)} \right]$$

Θέτοντας με g μία τυπική γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή και

$$d_1 = \frac{\log(x/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (1.4)$$

$$d_2 = \frac{\log(x/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (1.5)$$

1.2. Η ΕΞΙΣΩΣΗ BLACK-SCHOLES

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left[\left(x e^{\sigma\sqrt{T-t} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} - K e^{-r(T-t)} \right) 1_{\{g+d_2 \geq 0\}} \right] \\
&= \int_{-d_2}^{+\infty} \left(x e^{\sigma\sqrt{T-t}y - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} - K e^{-r(T-t)} \right) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \\
&\quad \int_{-\infty}^{d_2} \left(x e^{-\sigma\sqrt{T-t}y - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} - K e^{-r(T-t)} \right) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy
\end{aligned}$$

με χρήση αλλαγής μεταβλητής για $z = y + \sigma\sqrt{T-t}$ η τιμή του Ευρωπαϊκού Δικαιώματος αγοράς θα είναι ίση με

$$F(t, x) = xN(d_1) - K e^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (1.6)$$

με

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (1.7)$$

και τα d_1, d_2 δίνονται από τις (1.4), (1.5) αντίστοιχα.

Πρόταση 1.2. Έστω $\varphi_t = (H_t^0, H_t)$ χαρτοφυλάκιο τέτοιο ώστε:

1. $\varphi_t = (H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$ είναι αυτοχρηματοδοτούμενο
2. και η αξία του

$$V_t = H_t^0 A_t + H_t S_t \quad t \in [0, T]$$

παίρνει την μορφή $V_t = g(t, S_t)$ για $g \in C^{1,2}((0, +\infty) \times (0, +\infty))$, με $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

τότε η g ικανοποιεί την εξίσωση Black-Scholes

$$r g(t, x) = \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) + r x \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) \quad (1.8)$$

$$\mu \in H_t = \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t)$$

Απόδειξη. Από τη συνθήκη αυτοχρηματοδότησης θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
dV_t &= H_t^0 dA_t + H_t dS_t \\
&= r H_t^0 A_t dt + \mu H_t S_t dt + \sigma H_t S_t dW_t \\
&= r V_t dt + (\mu - r) H_t S_t dt + \sigma H_t^0 S_t dW_t
\end{aligned}$$

Από το Λήμμα του Itô για την $g(t, x)$ θα έχουμε:

$$dg(t, S_t) = g(0, S_0) + \mu S_t \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) dt + \sigma S_t \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) dW_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, S_t) dt$$

1.2. Η ΕΞΙΣΩΣΗ BLACK-SCHOLES

$$\begin{cases} rH_t^0 A_t dt + \mu H_t S_t dt = \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) dt + \mu S_t \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) dt + \frac{1}{2} S_t^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, S_t) dt \\ H_t S_t \sigma dW_t = S_t \sigma \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) dW_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} rV_t - rH_t S_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, S_t) \\ H_t = \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) \end{cases}$$

και συνεπώς

$$\begin{cases} rg(t, S_t) = \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) + rS_t \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, S_t) \\ H_t = \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) \end{cases}$$

□

Αντίστοιχα για το προϊόν χωρίς ρίσκο θα έχουμε:

$$H_t^0 A_t = V_t - H_t S_t = g(t, S_t) - S_t \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t)$$

και H_t^0 δίνεται από:

$$H_t^0 = \frac{V_t - H_t S_t}{A_t}$$

και συνεπώς

$$H_t^0 = \frac{g(t, S_t) - S_t \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t)}{e^{rt}}$$

Βασιζόμενοι στην Πρόταση 1.2 για το Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς με $f(x) = x - K$,

$$g(t, x) = x - Ke^{-r(T-t)} \quad t, x > 0$$

και

$$H_t = \frac{\partial g}{\partial x}(t, S_t) = 1$$

θα έχουμε:

$$rC(t, x) = \frac{\partial C}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial C}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, x)$$

με τελική συνθήκη:

$$C(T, x) = (x - K)^+$$

η λύση της οποίας δίνεται από την (1.6). Παρατηρούμε ότι για $t = T$ καταλήγουμε:

$$d_1 = d_2 = \begin{cases} +\infty & x > K \\ -\infty & x < K \end{cases}$$

και συνεπώς

$$C(T, x) = \begin{cases} xN(+\infty) - KN(+\infty) = x - K & x > K \\ xN(-\infty) - KN(-\infty) = 0 & x < K \end{cases} = (x - K)^+$$

1.3. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ

Αντίστοιχα για το Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Πώλησης με $f(x) = (K - x)^+$

$$rP(t, x) = \frac{\partial P}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial P}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x)$$

με τελική συνθήκη

$$P(T, x) = (K - x)^+$$

η λύση της οποίας είναι:

$$P(t, x) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - xN(-d_1) \quad (1.9)$$

1.3 Αμερικάνικα Δικαιώματα

Όπως είδαμε και στην προηγούμενη ενότητα, τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα ασκούνται μόνο στο χρόνο ωρίμανσης και υπάρχει για αυτά αναλυτική λύση. Ένα παράγωγο του οποίου ο κάτοχος μπορεί να επιλέξει το πότε θα το ασκήσει, σε κάποια χρονική στιγμή μέχρι το χρόνο ωρίμανσης καλείται Αμερικάνικο δικαίωμα. Με βάση τα παραπάνω η αξία του Αμερικάνικου δικαιώματος θα είναι τουλάχιστον ίση με αυτή του Ευρωπαϊκού. Όπως θα δούμε λόγω της κύρτωσης της συνάρτησης αποπληρωμής για τα δικαιώματα αγοράς, το Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς θα έχει ίδια αξία με αυτή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς. Αντίθετα με τα δικαιώματα αγοράς, στα Αμερικάνικα δικαιώματα αγοράς υπάρχει πρόωρη άσκηση, και η τιμή του δικαιώματος αυτού θα είναι πάντα μεγαλύτερη από την αντίστοιχη τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης. Εν αντιθέση με τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα, των οποίων η προεξοφλημένη τιμή κάτω από το επιτοκίο χωρίς κίνδυνο r στον χρόνο ωρίμανσης T είναι martingale, τα Αμερικάνικα δικαιώματα πώλησης όπως θα δούμε είναι supermartingale ενώ τα αντίστοιχα Αμερικάνικα δικαιώματα αγοράς είναι submartingale.

1.3.1 Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης

Λόγω της πρόωρης άσκησης που υπάρχει στο Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης, μας ενδιαφέρει όχι μόνο η τιμή του δικαιώματος, αλλά και ο αντίστοιχος χρόνος άσκησης κατά τον οποίο πραγματοποιείται η πρόωρη άσκηση, και όπως θα παρουσιάσουμε είναι ένας χρόνος στάσης.

Ορισμός 1.3. Έστω $0 \leq t \leq T$ και $x \geq 0$ δοθέν. Υποθέτουμε ότι $S(t) = x$ και έστω $\mathcal{F}_u^{(t)}$ $t \leq u \leq T$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από τη διαδικασία $S(v)$ με $v \in [t, u]$. Ο $\mathcal{T}_{t,T}$ είναι το σύνολο όλων των χρόνων στάσης για τη διήθηση $\mathcal{F}_u^{(t)}$ με τιμές στο $[t, T]$. Δηλαδή:

$$\{\tau \leq u\} \in \mathcal{F}_u^{(t)} \quad \forall u \in [t, T]$$

Συνεπώς ένας χρόνος στάσης στο σύνολο $\mathcal{T}_{t,T}$ παίρνει την απόφαση να κάνει διακοπή της διαδικασίας μας στο χρόνο $u \in [t, T]$. Η διακοπή αυτή βασίζεται στις παρελθοντικές τιμές της μετοχής από το χρόνο t έως το χρόνο u .

1.3. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ

Ορισμός 1.4. Ένα χαρτοφυλάκιο με κατανάλωση ορίζεται ως μία διαδικασία $\varphi = (H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$ με τιμές στο \mathbb{R}^2 που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1.
$$\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T (H_t)^2 dt < \infty \text{ σχεδόν παντού} \quad (1.10)$$

2.
$$H_t^0 A_t + H_t S_t = H_0^0 A_0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0 dA_u + \int_0^t H_u dS_u - C_t \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.11)$$

όπου C_t μία μη φθίνουσα διαδικασία με $C_0 = 0$

το χαρτοφυλάκιο, με κατανάλωση έχει αξία

$$V_t = H_t^0 A_t + H_t S_t$$

Βασιζόμενοι στην (1.11) η συνθήκη αυτοχρηματοδότησης μπορεί να γραφτεί

$$V_t = V_0 + \int_0^t H_s^0 dA_s + \int_0^t H_s dS_s - C_t$$

Ορισμός 1.5. Ένα χαρτοφυλάκιο με κατανάλωση είναι αποδεκτό αν ικανοποιούνται οι (1.10) (1.11) και

$$\forall t \in [0, T] \quad V_t \geq 0$$

Πρόταση 1.3. Έστω $\varphi_t = (H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$ μετρήσιμη διαδικασία με τιμές στο \mathbb{R}^2 που ικανοποιεί τις (1.10) (1.11). Η συνθήκη αυτοχρηματοδότησης (1.11) ισχύει αν και μόνο αν

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t H_s d\tilde{S}_s - \int_0^t e^{-rt} dC_s$$

όπου \tilde{V} και \tilde{S} η προεξοφλημένη διαδικασία για την αξία του χαρτοφυλακίου και αντίστοιχα η προεξοφλημένη αξία για το υποκείμενο προϊόν.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} d(e^{-rt} V_t) &= e^{-rt} d(V_t) + V_t d(e^{-rt}) \\ &= e^{-rt} (H_t^0 dA_t + H_t d\tilde{S}_t - C_t) + V_t d(e^{-rt}) \\ &= H_t (e^{-rt} d\tilde{S}_t) - e^{-rt} dC_t \end{aligned}$$

□

Πρόταση 1.4. Κάτω από το μέτρο Q η προεξοφλημένη αξία του χαρτοφυλακίου φ με κατανάλωση είναι *supermartingale*.

1.3. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ

Απόδειξη. Έστω $\tilde{V}_t = e^{-rt}V_t$ η προεξοφλημένη αξία του χαρτοφυλακίου

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t &= V_0 + \int_0^t H_s d\tilde{S}_s - \int_0^t e^{-rs} dC_s \\ &= V_0 + \int_0^t H_s (\mu \tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t d\tilde{W}_t) - \int_0^t e^{-rs} dC_s \\ &= V_0 + \int_0^t H_s (\sigma \tilde{S}_t d\tilde{W}_t) - \int_0^t e^{-rs} dC_s\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα αναπαράστασης των martingale

$$M_t = V_0 + \int_0^t H_s \sigma \tilde{S}_s d\tilde{W}_s$$

το οποίο είναι ένα μη αρνητικό local martingale κάτω από το μέτρο Q (αφού $V_t \geq 0$ και C_t μη φθίνουσα διαδικασία με $C_0 = 0$) και συνεπώς είναι supermartingale. Συνεπώς και η \tilde{V} είναι supermartingale αφού η $\int_0^t e^{-rs} dC_s$ είναι μία μη φθίνουσα διαδικασία. \square

Ορισμός 1.6. Ένα χαρτοφυλάκιο για το Αμερικάνικο Δικαίωμα που ικανοποιεί την ιδιότητα $\mathbb{E}^Q[\sup_{0 \leq t \leq T} h_t] < \infty$ είναι αποδεκτό αν για την αξία του χαρτοφυλακίου $V = (V_t)_{0 \leq t \leq T}$ έχουμε:

$$V_t \geq h_t \quad \forall t \in [0, T]$$

Πρόταση 1.5. Έστω το Αμερικάνικο Δικαίωμα ορίζεται από μία μη αρνητική διαδικασία $h_t = f(S_t)$, $f(x) = (K - x)^+$ (για την περίπτωση του δικαιώματος πώλησης) με $\mathbb{E}^Q[\sup_{0 \leq t \leq T} h_t] < \infty$. Ορίζουμε με \tilde{U} την Snell περιβάλλουσα (Snell Envelope)¹ βλέπε [52] (σελίδες 18-24) κάτω από το μέτρο Q της προεξοφλημένης διαδικασίας $\tilde{h}_t = e^{-rt}h_t$ και U ορίζεται από την διαδικασία $U_t = A_t \tilde{U}_t$. Τότε θα έχουμε:

$$U_t = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t, T} \mathbb{E}^Q \left[e^{-r(\tau-t)} h_\tau | \mathcal{F}_t \right] \quad (1.12)$$

και V_t η αξία του χαρτοφυλακίου που αναπαράγει το Αμερικάνικο Δικαίωμα μας, τότε

$$V_t \geq U_t \text{ σχεδόν βεβαίως}$$

Απόδειξη. Όπως έχουμε δει η \tilde{V} είναι supermartingale και δεδομένου ότι υπάρχει χαρτοφυλάκιο φ με αξία V για την οποία ισχύει ότι $V \geq h$ και για την προεξοφλημένη διαδικασία $\tilde{V} \geq \tilde{h}$ έπεται ότι Snell περιβάλλουσα της \tilde{U} είναι το μικρότερο supermartingale majorant της \tilde{h} . \square

¹Για διακριτούς χρόνους, ορίζουμε με U_n την Snell περιβάλλουσα της Z_n με $U_n = \max(Z_n, \mathbb{E}[U_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \forall n \leq N-1$ και $U_N = Z_N$

1.3. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ

Θεώρημα 1.5. Κάτω από τις προϋποθέσεις της προηγούμενης πρότασης υπάρχει χαρτοφυλάκιο φ η αξία του οποίου δίνεται από την V_t που ικανοποιεί $V_t = U_t$ με U_t όπως ορίζεται στην (1.12).

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [52] (σελίδες 23-24).
Με βάση τα ανωτέρω η τιμή του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης θα είναι:

$$P(t, x) = \max_{t \in \mathcal{T}_{y, T}} \mathbb{E}^Q \left[e^{-r(\tau-t)} (K - S(\tau)) \mid S(t) = x \right] \quad (1.13)$$

Η $P(t, x)$ ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες γραμμικού συμπληρωματικού προβλήματος:

$$P(t, x) \geq (K - x)^+ \quad \forall t \in [0, T] \quad x \geq 0 \quad (1.14)$$

$$rP(t, x) - P_t(t, x) - rxP_x(t, x) - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 P_{xx}(t, x) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T] \text{ και } x \geq 0 \quad (1.15)$$

Ορισμός 1.7. λ -Υπερβολική Συνάρτηση Έστω f μη αρνητική Borel-μετρήσιμη συνάρτηση, η οποία είναι λ -υπερβολική αν $Q_t^\lambda f \leq f$ για όλα τα $\lambda \geq 0$ και $Q_t^\lambda \rightarrow f$ κατά σημείο σύγκλιση για $t \rightarrow 0$. Το Q είναι μέτρο με την ιδιότητα

$$Q_t f(x) = \int Q_t(x, dy) f(y) = \mathbb{E}^x[f(X_t)]$$

Όπου X_t μία στοχαστική διαδικασία.

Βασιζόμενοι στο [50] έχουμε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 1.1. Η συνάρτηση P του Αμερικάνικου Δικαιώματος Πώλησης είναι r -υπερβολική συνάρτηση ως προς τη στοχαστική διαδικασία για το υποκείμενο προϊόν S_t και συνεπώς για $\mathbb{R}^+ \times [0, T]$ θα έχουμε:

$$\mathbb{L} [e^{-rt} P(x, t)]$$

όπου \mathbb{L} ο τελεστής του Kolmogorou για την γεωμετρική κίνηση Brown με

$$\mathbb{L} := rx \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι για κάθε $t \in [0, T]$

$$P(x, 0) \geq E^Q [e^{-rt} P(S_t, t)] \quad (1.16)$$

το οποίο ισχύει αφού οποιαδήποτε r -υπερβολική συνάρτηση με το όριο της να αυξάνει από μία ακολουθία άπειρων διαφορίσιμων συναρτήσεων. Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ και ένα χρόνο στάσης τ_ε από το σύνολο

$$\left\{ \tau \in \mathcal{T}_{t, T} \mid \mathbb{E}^Q \left[e^{-r(\tau-t)} (K - S_\tau)^+ \mid S_t \right] \geq P(S_t, t) - \varepsilon \right\}$$

1.3. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ

για $S_0 = x$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^Q \left[e^{-r\tau_\varepsilon} (K - S_{\tau_\varepsilon})^+ \right] &= \mathbb{E}^Q \left[e^{-r\tau} \left(\mathbb{E}^Q \left[e^{-r(\tau_\varepsilon - t)} (K - S_{\tau_\varepsilon})^+ \mid S_t \right] \right) \right] \\ &\geq \mathbb{E}^Q \left[e^{-rt} P(S_t, t) \right] - \varepsilon e^{-rt}\end{aligned}$$

Για οποιοδήποτε χρόνο στάση όμως

$$P(x, 0) \geq \mathbb{E}^Q \left[e^{-rT} (K - S_T)^+ \right]$$

και συνεπώς

$$P(x, 0) \geq \mathbb{E}^Q \left[e^{-rt} P(S_t, t) \right] - \varepsilon e^{-rt}$$

για $\varepsilon \downarrow 0$ έχουμε το αποτέλεσμα. \square

Πόρισμα 1.1. Η συνάρτηση του Αμερικάνικου Δικαιώματος Πώλησης P είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^+ \times [0, T]$. Η συνάρτηση $P(\cdot, t)$ είναι κυρτή μη αύξουσα στο \mathbb{R}^+ για κάθε $t \in [0, T]$. Η συνάρτηση $P(x, \cdot)$ είναι μη αύξουσα στο $[0, T]$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$.

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [55].

Ο κάτοχος του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης όπως προαναφέραμε μπορεί να ασκήσει το δικαίωμα του σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Ο κάτοχος του δικαιώματος αυτού θα πρέπει να ασκήσει το δικαίωμα του μόλις η τιμή της μετοχής $S(t)$ φτάσει στο επίπεδο S_f . Με βάση τα άραπανω θα πρέπει να απαντηθούν τα ακόλουθα ερωτήματα:

- Ποιά θα είναι η τιμή του επιπέδου S_f ;
- Ποιά θα είναι η τιμή του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης για το επίπεδο αυτό;

Το επίπεδο S_f εξάρταται από τον αντίστοιχο χρόνο $T - t$. Ο προσδιορισμός την καμπύλης του επιπέδου αυτού όπως θα δούμε γίνεται αριθμητικά. Βασιζόμενοι στο Σχήμα 1.2 είναι φανερό ότι το $S_f(T)$ μειώνεται όταν το T αυξάνεται. Το σύνολο

$$\{(t, x) : 0 \leq t \leq T, S \geq 0\}$$

χωρίζεται σε δύο περιοχές, για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [54]. Στην περιοχή αναμονής \mathcal{C} όπου δεν ασκούμε το δικαίωμα μας (continuation set)

$$\mathcal{C} = \{(t, x) : P(t, x) > (K - x)^+\} \quad (1.17)$$

για την οποία θα έχουμε:

$$rP - P_t - rxP_x - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 P_{xx} = 0 \quad (1.18)$$

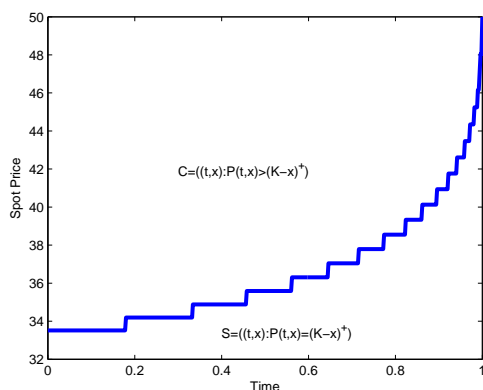
και στο συμπλήρωμα της, την περιοχή άσκησης του δικαιώματος μας (stopping set)

$$\mathcal{S} = \{(t, x) : P(t, x) = (K - x)^+\} \quad (1.19)$$

αντίστοιχα, για την περιοχή άσκησης του δικαιώματος θα έχουμε:

$$rP - P_t - rxP_x - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 P_{xx} = rK \quad (1.20)$$

1.3. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ



Σχήμα 1.2: Καμπύλη Πρόωρης Άσκησης για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης, για $K = 50$, $T = 1$

Επειδή $P(t, x) = K - x$ για $0 \leq x \leq S_f(t)$ θα έχουμε:

$$P_x(t, x_-) = -1 \text{ στην καμπύλη πρόωρης άσκησης } x = S_f(t) \quad (1.21)$$

και αντίστοιχα:

$$P_x(t, x_+) = -1 \text{ στην καμπύλη πρόωρης άσκησης } x = S_f(t) \quad (1.22)$$

Η εξίσωση

$$rP - \frac{\partial P(t, x)}{\partial x} - rx \frac{\partial P(t, x)}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 P(t, x)}{\partial x^2} = 0 \text{ για } x > S_f(t)$$

με χρήση της συνάρτησης αποπληρωμής

$$P(t, x) = K - x \text{ για } 0 \leq x \leq S_f(t)$$

και των (1.21), (1.22) μπορούμε να προσδιορίσουμε με χρήση αριθμητικών μεθόδων την τιμή του παραγώγου και την καμπύλη πρόωρης άσκησης $S_f(t)$. Τα ανωτέρω συνοψίζονται και αποδεικνύονται στα παρακάτω Λήμματα.

Λήμμα 1.2. Η συνάρτηση του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης P ικανοποιεί:

1. $\lim_{x \downarrow S_f} P(x, t) = K - S_f$
2. $\lim_{t \rightarrow T} P(x, t) = (K - x)^+ \quad x \in \mathbb{R}^+$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x, t) = 0 \quad t \in [0, T]$
4. $P(x, t) \geq (K - x)^+ \quad (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T]$

1.3. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ

Απόδειξη. Οι πρώτες δύο συνθήκες χάρις τη βέλτιστη διακοπή του ελεύθερου συνόρου $S_f(t)$ στο S_{f^*} και στο Πρόρισμα 1.1. Για την συνθήκη τρία παρατηρούμε ότι $P(x, t) \leq \mathbb{E}^Q[e^{-r\tau_*}]$ όπου τ_* είναι ο πρώτος χρόνος στάσης που φθάνει στο επίπεδο K και δεδομένου ότι $\mathbb{E}^Q[e^{-r\tau_*}] \sim x^{-1}$, το οποίο τείνει ομοιόμορφα στο 0. Τέλος η τελευταία συνθήκη δίνεται από τον ορισμό του Αμερικάνικου παραγώγου, συνθήκη (1.14) \square

Λήμμα 1.3. Η P_x είναι συνεχής πάνω στο ελεύθερο σύνορο S_f . Συνεπώς για κάθε $t \in [0, T]$ θα έχουμε:

$$\lim_{x \downarrow S_f} P_x(x, t) = -1$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση αποπληρωμής είναι μία r -υπερβολική συνάρτηση. Συνεπώς βασιζόμενοι στο Λήμμα 1.1 έχουμε $\mathbb{L}[e^{-rt}P(x, t)] \leq 0$ $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T]$. Εισάγωντας και τον μετασχηματισμό $\xi := \ln(x)$ και θέτωντας $\hat{P}(\xi, t) = P(\xi(x), t)$ καταλήγουμε:

$$\frac{\sigma^2}{2} \hat{P}_{\xi\xi} \leq - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \hat{P}_\xi - \hat{P}_t + r \hat{P}$$

ολοκληρώνοντας σε μία περιοχή Σ μήκους 2ε πάνω στο ελεύθερο σύνορο $\xi_* = \ln(S_f)$ από t_1 έως t_2 έχουμε:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sigma^2}{2} \left[\hat{P}_\xi(\xi_* + \varepsilon, t) - \hat{P}_\xi(\xi_* - \varepsilon, t) \right] dt \\ & \leq - \int_{t_1}^{t_2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left[\hat{P}(\xi_* + \varepsilon, t) - \hat{P}(\xi_* - \varepsilon, t) \right] dt - \int_\Sigma \left[\hat{P}_t + r \hat{P} \right] d\xi dt \end{aligned}$$

Ορίζοντας τώρα λωρίδες του Σ με Σ_ε όπου ξεκινάνε σε χρόνο $t^-(\xi)$ και τελειώνουν σε χρόνο $t^+(\xi)$ καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sigma^2}{2} \left[\hat{P}_\xi(\xi_* + \varepsilon, t) - \hat{P}_\xi(\xi_* - \varepsilon, t) \right] dt \\ & \leq - \int_{t_1}^{t_2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left[\hat{P}(\xi_* + \varepsilon, t) - \hat{P}(\xi_* - \varepsilon, t) \right] dt \\ & \quad - \int_{\Sigma_\varepsilon} \left[\hat{P}(\xi, t^+) - \hat{P}(\xi, t^-) \right] d\xi + \int_\Sigma r \hat{P} d\xi dt \end{aligned}$$

από το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και δεδομένου ότι $\hat{P}_\xi = -e^\xi$ πάνω στην περιοχή \mathcal{S} έχουμε:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\lim_{\xi \downarrow \xi_*} \hat{P}_\xi + e^{\xi_*} \right] dt \leq 0$$

και από το Λήμμα 4.1, Myneni ([50]) έχουμε ότι $P_\xi \geq -e^\xi$. Συνεπώς καταλήγουμε $\lim_{\xi \downarrow \xi_*} \hat{P}_\xi = -1$ \square

1.3. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ

Θεώρημα 1.6. Έστω $S(u)$ $t \leq u \leq T$ η μετοχή που ξεκινάει από $S(t) = x$ και \mathcal{S} η περιοχή άσκησης του δικαιώματος (1.19). Έστω τ_* χρόνος στάσης που ορίζεται ως ακολούθως:

$$\tau = \min \{u \in [t, T] : (u, S(u)) \in \mathcal{S}\} \quad (1.23)$$

και

$$\tau_* = \tau \wedge T \quad (1.24)$$

τότε η $e^{-ru}P(u, S(u))$, $t \leq u \leq T$ είναι supermartingale κάτω από το ισοδύναμο μέτρο Q και η σταματημένη διαδικασία $e^{-r(u \wedge \tau_*)}P(u, S(u \wedge \tau_*))$, $t \leq u \leq T$ είναι martingale.

Απόδειξη. Από το Λήμμα του Itô για την $e^{-ru}P(u, S(u))$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} d(e^{-ru}P(u, S(u))) &= e^{-ru}[-rP(u, S(u))du + P_u(u, S(u))du \\ &\quad + P_x(u, S(u))dS(u) + \frac{1}{2}P_{xx}(u, S(u))d^2 < S(u) > \\ &= e^{-ru}[-rP(u, S(u)) + P_u(u, S(u)) + rS(u)P_x(u, S(u)) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(u)P_{xx}(u, S(u))]du + e^{-ru}\sigma S(u)P_x(u, S(u))d\tilde{W}(u) \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$(1.26)$$

οι όροι du στην (1.25) με βάση το Σχήμα 1.2 είναι $-e^{ru}rK1_{\{S(u) \leq S_f\}}$ το οποίο είναι αρνητικό και συνεπώς $e^{-ru}P(u, S(u))$ είναι supermartingale κάτω από το μέτρο Q . Επιπλέον η διαδικασία

$$X_u = e^{u \wedge (\tau_* \wedge T)}P(u \wedge (\tau_* \wedge T), S(u \wedge (\tau_* \wedge T)))$$

είναι ένα local martingale έως το χρόνο $\tau_* \wedge T$. □

Τέλος βασιζόμενοι στο [26](Κεφάλαιο 6 σελίδες 137-140) ισχύουν τα ακόλουθα:

$$P(t_2, S, K) > P(t_1, S, K) \quad \text{για } t_2 > t_1 \quad (1.27)$$

$$P(t, S, K_2) > P(t, S, K_1) \quad \text{για } K_1 < K_2 \quad (1.28)$$

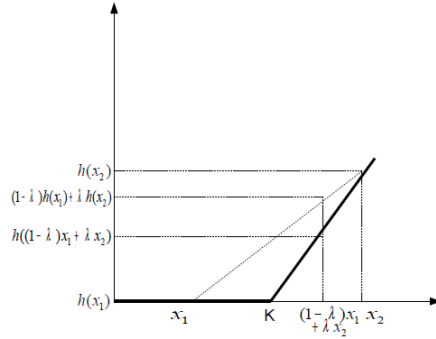
$$P(t, S_2, K) > P(t, S_1, K) \quad \text{για } S_1 < S_2 \quad (1.29)$$

1.3.2 Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς

Στην ενότητα αυτή δεδομένου ότι το υποκείμενο προϊόν-μετοχή δεν αποδίδει μερίσματα στον κάτοχο του δικαιώματος, θα αποδείξουμε ότι το Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς έχει την ίδια ακριβώς τιμή με αυτή του του αντίστοιχου Ευρωπαϊκού.

Λήμμα 1.4. Έστω $h(x)$ θετική κυρτή συνάρτηση με $x > 0$ και $h(0) = 0$. Τότε το προεξοφλημένο Αμερικάνικο παράγωγο $e^{-rt}h(S(t))$ το οποίο αποπληρώνει $h(S(t))$ στην άσκηση του είναι submartingale.

1.3. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ



Σχήμα 1.3: Η Κυρτή Συνάρτηση $h(x) = (x - K)^+$

Απόδειξη. Έστω $h(x)$ κυρτή συνάρτηση για $0 \leq \lambda \leq 1$ και για $0 \leq x_1 \leq x_2$ θα έχουμε:

$$h((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)h(x_1) + \lambda h(x_2)$$

Συνεπώς για $h(x) = (x - K)^+$ βλέπε Σχήμα 1.3 και $x_1 = 0$ και $x_2 = x$ και δεδομένου ότι $h(0) = 0$ θα έχουμε:

$$h(\lambda x) \leq \lambda h(x) \quad \forall x \geq 0, 0 \leq \lambda \leq 1$$

Επειδή $0 \leq u \leq t \leq T$ θα έχουμε $0 \leq e^{-r(t-u)} \leq 1$ συνεπώς

$$\mathbb{E}^Q \left[e^{-r(t-u)} h(S(t)) \middle| \mathcal{F}(u) \right] \geq \mathbb{E}^Q \left[h \left(e^{-r(t-u)} S(t) \right) \middle| \mathcal{F}(u) \right] \quad (1.30)$$

από την ανισότητα Jensen θα έχουμε:

$$\mathbb{E}^Q \left[h \left(e^{-r(t-u)} S(t) \right) \middle| \mathcal{F}(u) \right] \geq h \left(\mathbb{E}^Q \left[e^{-r(t-u)} S(t) \middle| \mathcal{F}(u) \right] \right) \quad (1.31)$$

$$= h \left(e^{ru} \mathbb{E}^Q \left[e^{-rt} S(t) \middle| \mathcal{F}(u) \right] \right) \quad (1.32)$$

Επειδή το $e^{-rt} S(t)$ είναι martingale κάτω από το μέτρο Q θα έχουμε:

$$h \left(e^{ru} \mathbb{E}^Q \left[e^{-rt} S(t) \middle| \mathcal{F}(u) \right] \right) = h(e^{ru} e^{-ru} S(u)) = h(S(u)) \quad (1.33)$$

Συνεπώς με βάση τις (1.30), (1.31), (1.33) καταλήγουμε:

$$\mathbb{E}^Q \left[e^{-r(t-u)} h(S(t)) \middle| \mathcal{F}(u) \right] \geq h(S(u)) \quad (1.34)$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbb{E}^Q \left[e^{-rt} h(S(t)) \middle| \mathcal{F}(u) \right] \geq e^{-ru} h(S(u)) \quad (1.35)$$

□

1.3. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ

Θεώρημα 1.7. Έστω $h(x)$ κυρτή συνάρτηση με $x \geq 0$ που ικανοποιεί $h(0) = 0$. Τότε η τιμή του Αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς με τιμή $h(S(t))$, $0 \leq t \leq T$ έχει την ίδια τιμή με αυτή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με τιμή $h(S(T))$.

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας T αντί για t στην (5.15) θα έχουμε:

$$\mathbb{E}^Q \left[e^{-r(T-u)} h(S(T)) \middle| \mathcal{F}(u) \right] \geq h(S(u)) \quad 0 \leq u \leq T \quad (1.36)$$

□

Με βάση την (1.36) συμπαίρνουμε ότι το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς υπερβαίνει την τιμή του Αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς. Συνεπώς δεν αξίζει να ασκήσουμε πρόωρα το Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς αφού η μέγιστη τιμή του θα είναι στον χρόνο ωρίμανσης T με τιμή ίση με αυτή του αντίστοιχου Ευρωπαϊκού.

Πόρισμα 1.2. Η τιμή του Αμερικάνικου Δικαιώματος Αγοράς, με ένα υποκείμενο προϊόν χωρίς καταβολή μερίσματος, είναι ίδια με αυτή του Ευρωπαϊκού Δικαιώματος Αγοράς κάτω από το ίδιο υποκείμενο προϊόν στον χρόνο ωρίμανσης.

Απόδειξη. Για οποιοδήποτε χρόνο στάσης τ με $\tau < T$, από την ανισότητα του Jensen θα έχουμε:

$$\begin{aligned} (S_\tau - K)^+ &= e^{r\tau} (e^{-r\tau} S_\tau - e^{-r\tau} K)^+ \\ &\leq e^{r\tau} (e^{-r\tau} S_\tau - e^{-rT} K)^+ \\ &\leq e^{-r\tau} \mathbb{E}^Q [(e^{-rT} S_T - e^{-rT} K)^+ | \mathcal{F}_\tau] \\ &\leq e^{-r(T-\tau)} \mathbb{E}^Q [(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_\tau] \end{aligned}$$

Συνεπώς θα έχουμε:

$$\mathbb{E}^Q [e^{-r(T-\tau)} (S_\tau - K)^+] \leq \mathbb{E}^Q [e^{-rT} (S_T - K)^+]$$

Από την άλλη πλευρά έχουμε:

$$\mathbb{E}^Q [(e^{-rT} S_T - e^{-rT} K)^+ | \mathcal{F}_\tau] \geq \mathbb{E}^Q [e^{-rT} S_T - e^{-rT} K | \mathcal{F}_\tau]$$

και δεδομένου ότι $\tilde{S}_\tau = e^{-r(T-\tau)} S_\tau$ είναι martingale κάτω από το μέτρο Q συνεπώς θα έχουμε:

$$\mathbb{E}^Q [(e^{-rT} S_T - e^{-rT} K)^+ | \mathcal{F}_T] \geq e^{-r(T-\tau)} S_\tau - e^{-r(T-\tau)} K$$

και αφού r θετικό, συνεπώς θα έχουμε:

$$\mathbb{E}^Q [(e^{-rT} S_T - e^{-rT} K)^+ | \mathcal{F}_\tau] \geq (e^{-r(T-\tau)} S_\tau - e^{-r(T-\tau)} K)^+$$

Υπολογίζοντας τις δύο ανισότητες καταλήγουμε στο αποτέλεσμα. □

Σε αναλογία με το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης, για το αντίστοιχο Δικαίωμα Αγοράς θα έχουμε:

$$C(t_2, S, K) > C(t_1, S, K) \quad \text{για } t_2 > t_1 \quad (1.37)$$

$$C(t, S, K_2) < C(t, S, K_1) \quad \text{για } K_1 < K_2 \quad (1.38)$$

$$C(t, S_2, K) < C(t, S_1, K) \quad \text{για } S_1 < S_2 \quad (1.39)$$

1.3. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ

1.3.3 Το Αέναο Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης

Το αέναο Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης (perpetual American Put Option) είναι το πιο απλό Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης. Εν αντιθέσει με το πεπερασμένης διάρκειας Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης του οποίου η πρόωρη άσκηση γίνεται αριθμητικά, η πρόωρη άσκηση του αέναου Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης έχει αναλυτικό τύπο. Το γεγονός αυτό θα το χρησιμοποιήσουμε στο Κεφάλαιο 7 Αριθμητικές Εφαρμογές, για να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του αλγορίθμου πρόωρης άσκησης για το πεπερασμένης διάρκειας Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης με το αντίστοιχο αέναο.

Υποθέτουμε ότι ο κάτοχος του αέναου Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης θέτει κάποιο επίπεδο άσκησης $S_f < K$ και ασκεί το δικαίωμα του μόλις η τιμή της μετοχής

$$S(t) = S(0) \exp \left(\sigma W(t) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right) \quad (1.40)$$

πέσει κάτω από το επίπεδο αυτό. Αν η αρχική τιμή της μετοχής είναι κάτω από το επίπεδο S_f τότε ο κάτοχος του δικαιώματος αυτού ασκεί αμέσως το δικαίωμα του (στον χρόνο 0). Η τιμή του δικαιώματος στην περίπτωση αυτή θα είναι $P_{S_f}(S(0)) = K - S(0)$. Αν η τιμή της μετοχής είναι πάνω από το επίπεδο αυτό τότε ο κάτοχος του ασκεί το δικαίωμα στον χρόνο στάσης

$$\tau_{S_f} = \min \{ t \geq 0 : S(t) = S_f \}$$

Στον χρόνο άσκησης του δικαιώματος το αέναο δικαίωμα πώλησης καταβάλλει $K - S(\tau_{S_f}) = K - S_f$. Συνεπώς η τιμή του δικαιώματος θα είναι:

$$P_{S_f}(S(0)) = (K - S_f) \mathbb{E}^Q [e^{-r\tau_{S_f}}] \quad \text{για } S(0) \geq S_f$$

Λήμμα 1.5. Η $P_{S_f}(x)$ δίνεται από τη σχέση:

$$P_{S_f}(x) = \begin{cases} K - x & 0 \leq x \leq S_f \\ (K - S_f) \left(\frac{x}{S_f} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} & x \geq S_f \end{cases} \quad (1.41)$$

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 1.8. Έστω $W(t)$ κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q , με \mathbb{R} και m ένας θετικός αριθμός. Ορίζουμε:

$$X(t) = \mu t + W(t)$$

και τ_m χρόνος στάσης

$$\tau_m = \min \{ t \geq 0 : X(t) = m \}$$

Τότε:

$$\mathbb{E}^Q [e^{-\lambda \tau_m}] = e^{-m(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\lambda})} \quad \forall \lambda \geq 0 \quad (1.42)$$

1.3. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ

Για την απόδειξη του θεωρήματος 1.8 παραπέμπουμε στο [30]

Απόδειξη. Από την (1.41) έχουμε για $x = S_f$ τότε $\tau_{S_f} = 0$ και συνεπώς $P_{S_f}(x) = K - S_f$. Στην περίπτωση όπου $S(0) = x > S_f$ ο χρόνος στάσης τ_{S_f} θα είναι η πρώτη φορά όπου η μετοχή

$$S(t) = x \exp\left(\sigma W(t) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right)$$

φθάσει στο επίπεδο S_f . Η $S(t) = S_f$ αν και μόνο αν

$$-W(t) - \frac{1}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t = \frac{1}{\sigma} \log\left(\frac{x}{S_f}\right)$$

εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.8 με $-W(t) - \frac{1}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$ αντί της $X(t)$, $r = \lambda$, $\mu = -\frac{1}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)$ και $m = \frac{1}{\sigma} \log\left(\frac{x}{S_f}\right)$ συνεπώς θα έχουμε:

$$\begin{aligned} -\mu + 2\lambda &= \frac{1}{\sigma^2}\left(r^2 - r\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^4\right) + 2r \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\left(r^2 + r\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^4\right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\lambda} = \frac{1}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{1}{\sigma}\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) = \frac{2r}{\sigma}$$

Από την (1.42) θα έχουμε:

$$\mathbb{E}^Q [e^{-r\tau_{S_f}}] = \exp\left(-\frac{1}{\sigma} \log\left(\frac{x}{S_f}\right) \frac{2r}{\sigma}\right) = \left(\frac{x}{S_f}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}$$

□

Για την αντίστοιχη πρόωφη άσκηση καταλήξαμε $P_{S_f}(x) = (K - S_f) S_f^{\frac{2r}{\sigma^2}}$ για $x > S_f$. Αναζητούμε ένα S_{f^*} τέτοιο ώστε να μεγιστοποιεί την τιμή του S_f για σταθερό x . Ορίζουμε:

$$g(S_f) = (K - S_f) S_f^{\frac{2r}{\sigma^2}} \quad (1.43)$$

Παρατηρούμε ότι $g(0) = 0$ και $\lim_{S_f \rightarrow \infty} g(S_f) = -\infty$. Επιπλέον

$$\begin{aligned} g'(S_f) &= -S_f^{\frac{2r}{\sigma^2}} + \frac{2r}{\sigma^2} (K - S_f) S_f^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \\ &= \frac{2r + \sigma^2}{\sigma^2} S_f^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} + \frac{2r}{\sigma^2} K S_f^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \end{aligned}$$

1.4. TA GREEKS

Συνεπώς

$$= \frac{2r + \sigma^2}{\sigma^2} S_f^{\frac{2r}{\sigma^2}} + \frac{2r}{\sigma^2} K S_f^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} = 0$$

και λύνοντας ως προς S_f η πρόωρη άσκηση για το αέναο Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης θα δίνεται απο την ακόλουθη σχέση:

$$S_{f*} = \frac{2r}{2r + \sigma^2} K \quad (1.44)$$

Επιπλέον

$$g(S_{f*}) = \frac{\sigma^2}{2r + \sigma^2} \left(\frac{2r}{2r + \sigma^2} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} K^{\frac{2r + \sigma^2}{\sigma^2}} \quad (1.45)$$

1.4 Τα Greeks

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τα Greeks. Τα Greeks είναι χρήσιμα για την αντιστάθμιση κινδύνου του παραγώγου μας. Κάθε ένα από τα Greeks μετράει τον αντίστοιχο κίνδυνο που επιφέρει μία μεταβολή των χαρακτηριστικών του υποκείμενου προϊόντος (τιμή υποκείμενου προϊόντος, τιμή άσκησης, επιτόκιο r , διακύμανση σ). Οι αλλαγές αυτές των χαρακτηριστικών χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

1. Μεταβολή της τιμής του παραγώγου V ως προς την μεταβολή της τιμής του υποκείμενου προϊόντος.
2. Μεταβολή της τιμής του παραγώγου V ως προς την μεταβολή των παραμέτρων r, σ του παραγώγου μας.

και εισάγουμε τις ακόλουθες έννοιες:

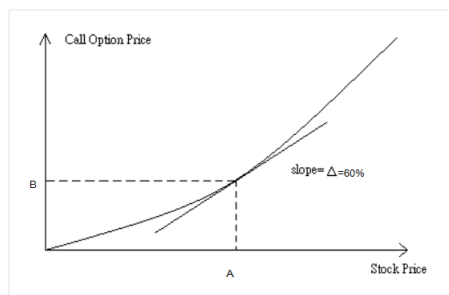
- $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ (Delta)
- $\Gamma = \frac{\partial V}{\partial S^2}$ (Gamma)
- $\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$ (Theta)
- $\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$ (rho)
- $\mathcal{V} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$ (vega)

Όπου τα πρώτα τρία ανήκουν στην πρώτη κατηγορία και τα υπόλοιπα ανήκουν στην δεύτερη κατηγορία.

1.4.1 Delta

Το Delta (Δ) ορίζεται ως ο λόγος της μεταβολής της τιμής του παραγώγου που επέρχεται απο μία αλλαγή της τιμής του υποκείμενου προϊόντος. Είναι η κλίση της καμπύλης που συνδέει την τιμή του παραγώγου με την αντίστοιχη τιμή του υποκείμενου προϊόντος. Παραδείγματος χάριν, υποθέτουμε ότι η τιμή του delta

1.4. TA GREEKS



Σχήμα 1.4: Υπολογισμός του Delta

για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς είναι 0.6, αυτό σημαίνει ότι μικρή μεταβολή της τιμής του υποκείμενου προϊόντος επιφέρει 60% μεταβολή στην τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς. Το Δ για ένα δικαίωμα αγοράς ορίζεται ως:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$$

και αντίστοιχα για το δικαίωμα πώλησης:

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S}$$

Δεδομένου ότι τα Ευρωπαϊκά παράγωγα έχουν αναλυτική λύση, είναι λογικό το Delta και τα υπόλοιπα Greeks να υπολογίζονται αναλυτικά για τα Ευρωπαϊκά παράγωγα.

Συνεπώς για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (χωρίς καταβολή μερισμάτων στο υποκείμενο προϊόν) θα έχουμε:

$$\Delta(Call) = N(d_1) \quad (1.46)$$

όπου d_1 ορίζεται στο (1.4) και N δίνεται από την (1.7). Η (1.46) εύκολα μπορεί να αποδειχθεί αφού, για την περίπτωση του Ευρωπαϊκού Δικαιώματος Αγοράς θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(xN\left(\frac{\log(x/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right) - KN\left(\frac{\log(x/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &= x \frac{\partial}{\partial x} N\left(\frac{\log(x/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - K \frac{\partial}{\partial x} N\left(\frac{\log(x/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &\quad + N\left(\frac{\log(x/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \end{aligned}$$

1.4. TA GREEKS

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{T-t}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right) \\
 &- \frac{K}{\sqrt{2\pi\sigma x\sqrt{T-t}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x/K) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right) \\
 &\quad + N\left(\frac{\log(x/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
 &= N\left(\frac{\log(x/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)
 \end{aligned}$$

Στην περίπτωση καταβολής μερισμάτων θα έχουμε:

$$\Delta(Call) = e^{-qT} N(d_1)$$

όπου q το αντίστοιχο μέρισμα.

Αντίστοιχα για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης, από την σχέση μεταξύ δικαιώματος αγοράς και πώλησης θα έχουμε:

$$Call - Put = S - Ke^{-rt}$$

Άρα

$$\Delta(Call) - \Delta(Put) = 1$$

Συνεπώς

$$\Delta(Put) = N(d_1) - 1$$

και στην περίπτωση καταβολής μερισμάτων:

$$\Delta(Put) = e^{-qT} [N(d_1) - 1]$$

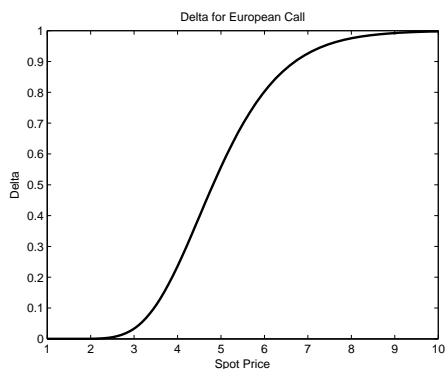
Στα Σχήματα 1.5, 1.6 παρουσιάζουμε το delta για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς και αντίστοιχα για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης για $S = 5$, $r = 0.01$, $T = 5/12$ και $\sigma = 0.3$. Τέλος από το Σχήμα 1.6 παρατηρούμε ότι το delta είναι αρνητικό. Αυτό σημαίνει ότι στην θετική θέση (long position) η αντίστοιχη αντιστάθμιση του κινδύνου για το παράγωγο μας θα πρέπει να γίνει αντίστοιχα στη θετική θέση για το υποκείμενο προϊόν, όμοια και στην περίπτωση της αρνητικής θέσης (short position).

1.4.2 Theta

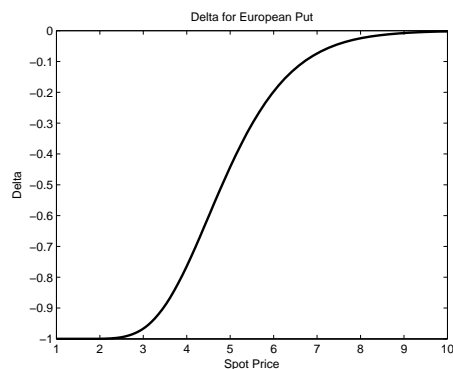
Το Theta(Θ) ενός παραγώγου V είναι ο δείκτης μεταβολής της τιμής του παραγώγου ως προς το χρόνο. Το Theta συχνά αναφέρεται ως η μείωση του χρόνου άσκησης του παραγώγου, όσο περνάει ο χρόνος η δυνατότητα άσκησης του δικαιώματος μειώνεται. Ορίζεται ως:

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial T}$$

1.4. TA GREEKS



Σχήμα 1.5: Το Delta Greek για το Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς



Σχήμα 1.6: Το Delta Greek για το Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Πώλησης

Για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς θα έχουμε:

$$\Theta(Call) = \frac{-S_0 N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT} N(d_2)$$

όπου:

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

όπου τα d_1 , d_2 ορίζονται από τις (1.4), (1.5) αντίστοιχα.

Ομοίως για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης από την συνθήκη μεταξύ δικαιώματος αγοράς και πώλησης θα έχουμε:

$$\Theta(Call) - \Theta(Put) = rKe^{-rT}$$

$$\Theta(Put) = \frac{-S_0 N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT} N(-d_2)$$

Στην περίπτωση καταβολής μερισμάτων στο υποκείμενο προϊόν θα έχουμε:

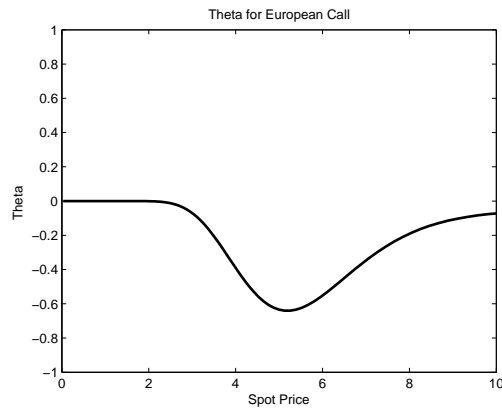
$$\Theta(Call) = \frac{-S_0 N'(d_1) \sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} + qS_0 N(d_1) e^{-qT} - rKe^{-rT} N(d_2)$$

και

$$\Theta(Put) = \frac{-S_0 N'(d_1) \sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} - qS_0 N(-d_1) e^{-qT} + rKe^{-rT} N(-d_2)$$

Το Γράφημα του Theta για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης είναι ίδιο με αυτό του δικαιώματος αγοράς. Από το Σχήμα 1.7 παρατηρούμε ότι το Θ είναι πάντα αρνητικό.

1.4. TA GREEKS



Σχήμα 1.7: Το Theta Greek για το Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς

1.4.3 Gamma

Το Gamma ενός παραγώγου είναι ο δείκτης μεταβολής του Delta ως προς την τιμή του υποκείμενου προϊόντος. Είναι δηλαδή η δεύτερη παράγωγος της τιμής του παραγώγου ως προς το υποκείμενο προϊόν:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

Αν το Gamma είναι μεγάλο τότε το Delta θα είναι αρκετά ευμετάβλητο ως προς τις μεταβολές του υποκείμενου προϊόντος και συνεπώς θα λάβουμε μεγάλο ρίσκο αν δεν πραγματοποιήσουμε αλλαγές στα χαρακτηριστικά του παραγώγου μας (πχ αλλαγή της τιμής ασκήσεως του παραγώγου μας). Στη περίπτωση όπου το Gamma είναι μικρό το ρίσκο μας είναι μικρό και αντίστοιχες μεταβολές των χαρακτηριστικών του παραγώγου μας δε θα γίνονται συχνά.

Για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς το Gamma θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\Gamma(Call) = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

και αντίστοιχα στην περίπτωση καταβολής μερισμάτων για το υποκείμενο προϊόν θα έχουμε:

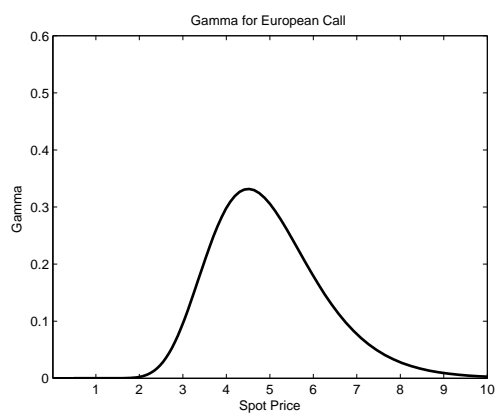
$$\Gamma(Call) = \frac{N'(d_1)e^{-qT}}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

Τέλος η τιμή του Gamma για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης θα είναι ίδια με αυτή του δικαιώματος αγοράς.

1.4.4 Σχέση μεταξύ των Greeks

Τέλος είναι σημαντικό να αναφέρουμε τη σχέση μεταξύ των Delta, Gamma, και Theta με χρήση της εξίσωσης Black Scholes Από την εξίσωση Black Scholes

1.4. TA GREEKS



Σχήμα 1.8: Το Gamma Greek για το Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Πώλησης

έχουμε:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV$$

και αφού $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, $\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$ και $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ έπεται ότι:

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = rV \quad (1.47)$$

Κεφάλαιο 2

Η Εξίσωση Black-Scholes και η Εξίσωση της Θερμότητας

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε τον κατάλληλο μετασχηματισμό για το Ευρωπαϊκό και το Αμερικάνικο παράγωγο στην εξίσωση της θερμότητας. Το μετασχηματισμό αυτό θα τον χρησιμοποιήσουμε για την διακριτοποίηση και την τιμολόγηση των Αμερικάνικων και Ευρωπαϊκών παραγώγων. Όπως θα δούμε η μετασχηματισμένη εξίσωση θερμότητας έχει ακριβώς την ίδια αναλυτική λύση με αυτήν της αναλυτικής λύσης για το Ευρωπαϊκό παράγωγο της Black and Scholes εξίσωσης η οποία δίνεται στο Παράρτημα Α'.

2.1 Η Εξίσωση της Θερμότητας και το Ευρωπαϊκό Παράγωγο

Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε τον μετασχηματισμό της εξίσωσης Black and Scholes στην εξίσωση της θερμότητας. Θα ξεκινήσουμε με το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (European Call Option).

Η εξίσωση Black and Scholes για το παράγωγο αυτό $C(S, t)$ δίνεται ως ακολούθως:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \quad (2.1)$$

Με αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες:

$$C(t, 0) = 0, \quad \text{για } S \rightarrow 0$$

$$C(t, S) \sim S \quad \text{για } S \rightarrow \infty$$

2.1. Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΤΟ ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΠΑΡΑΓΩΓΟ

και αντίστοιχη τελική συνθήκη:

$$C(T, S) = \max(0, S - K)$$

θα μετασχηματίσουμε την (2.1) στην εξίσωση της θερμότητας. Αρχικά θα πρέπει να αποδεσμευτούμε από του όρους S και S^2 , με σκοπό να οδηγηθούμε στην αδιάστατη εξίσωση της θερμότητας. Με χρήση των ακόλουθων μετασχηματισμών:

$$S = Ke^x \quad (2.2)$$

$$t = T - \frac{\tau}{2}\sigma^2 \quad (2.3)$$

$$C(t, S) = Kv(\tau, x) \quad (2.4)$$

οδηγούμαστε στην εξίσωση:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv \quad (2.5)$$

με $k = r/\frac{1}{2}\sigma^2$

και αντίστοιχη αρχική συνθήκη:

$$v(0, x) = \max(0, e^x - 1)$$

Η εξίσωση (2.5) με μία απλή αλλαγή μεταβλητών οδηγούμαστε στην εξίσωση της θερμότητας:

$$v = e^{ax+b\tau}y(\tau, x) \quad (2.6)$$

για κάποιες σταθερές a, b τις οποίες και θα αναζητήσουμε. Από την παραγωγή της (2.6) και αντικαθιστώντας την (2.5) έχουμε:

$$by + \frac{\partial y}{\partial \tau} = a^2y + 2a\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (k-1)\left(ay + \frac{\partial y}{\partial x}\right) - ky$$

από την ισότητα πολυωνύμων για τους όρους $y, \frac{\partial y}{\partial x}$ θα έχουμε:

$$b = a^2 + (k-1)a \quad (2.7)$$

$$0 = 2a + (k-1) \quad (2.8)$$

προκύπτει ότι:

$$a = -\frac{1}{2}(k-1) \text{ και } b = -\frac{1}{4}(k+1)^2$$

Συνεπώς θα έχουμε:

$$v = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}y(\tau, x) \quad (2.9)$$

όπου:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{για } -\infty < x < \infty \quad (2.10)$$

2.1. Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΤΟ ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΠΑΡΑΓΩΓΟ

και αρχική συνθήκη

$$y(0, x) = y_0(x) = \max\left(0, e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}\right) \quad (2.11)$$

Η λύση για την (2.10) δίνεται από την:

$$y(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds \quad (2.12)$$

οπου y_0 δίνεται από την (2.11)

Απομένει ο υπολογισμός του ολοκληρώματος (2.12)

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $x' = \frac{(s-x)}{\sqrt{2t}}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} y(\tau, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y_0\left(x' \sqrt{2\tau} + x\right) e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2t}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+x'\sqrt{2t})} e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx' \\ &= I_1 - I_2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα I_1 θα έχουμε:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'\sqrt{2\tau}) - \frac{1}{2}x'^2} dx \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}\left(x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}\right)^2} dx' \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x\sqrt{2\tau} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho \\ &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) \end{aligned}$$

όπου:

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

και

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

Αντίστοιχα για το δεύτερο ολοκλήρωμα I_2 θα έχουμε:

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx =$$

2.2. ΚΑΜΠΥΛΗ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΣΥΝΟΡΟΥ ΚΑΙ ΤΟ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ

$$\begin{aligned} & \frac{e^{\frac{1}{2}(k-1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(x' - \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau})^2} dx' \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho \\ &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2) \end{aligned}$$

όπου

$$d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}$$

και

$$N(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

έτσι λοιπόν έχουμε:

$$v(\tau, x) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} y(\tau, x)$$

για $x = \log\left(\frac{S}{K}\right)$, $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$, $C = Kv(\tau, x)$ Συνεπώς για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς

$$C(t, s) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Όπου:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\ d_2 &= \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \end{aligned}$$

Αντίστοιχα το Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης, μπορεί εύκολα να τιμολογηθεί κάνοντας χρήση της σχέσης ανάμεσα στο δικαίωμα αγοράς και δικαίωμα πώλησης (Put-Call Parity Formula) η οποία ισχύει για οποιοδήποτε τύπο παραγώγου. Συνεπώς θα έχουμε:

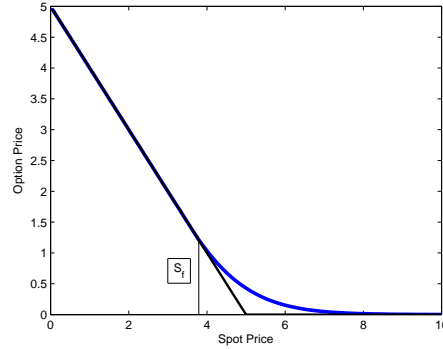
$$C - P = S - Ke^{-r(T-t)}$$

$$P(t, S) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

2.2 Καμπύλη Ελεύθερου Συνόρου και το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης

Πρωτού αναπτύξουμε το Αμερικάνικο παράγωγο ως γραμμικό συμπληρωματικό πρόβλημα (Linear Complementarity Problem), θα παρουσιάσουμε το ελεύθερο σύνορο το οποίο είναι μέρος του προβλήματος για την τιμολόγηση των Αμερικανικών δικαιωμάτων. Όπως έχουμε αναφέρει το Αμερικάνικο παράγωγο ασκείται σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Συνεπώς πέρα από την βέλτιστη αξία μας ενδιαφέρει και ο βέλτιστος χρόνος άσκησης του δικαιώματος. Υποθέτουμε ότι το

2.2. ΚΑΜΠΥΛΗ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΣΥΝΟΡΟΥ ΚΑΙ ΤΟ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ



Σχήμα 2.1: Το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης

υποκείμενο προϊόν δεν αποδίδει μερίσματα στον κάτοχο του συμβολαίου, για το λόγο αυτό θα αναφερθούμε μόνο στην περίπτωση του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης (American Put Option) αφού στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε ότι στην περίπτωση του Αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς για το οποίο στο υποκείμενο προϊόν δεν υπάρχουν μερίσματα τότε το παράγωγο αυτό έχει την ίδια αξία με αυτή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και ο αντίστοιχος βέλτιστος χρόνος άσκησης του παραγώγου είναι στον χρόνο ωρίμανσης T όπως ακριβώς και στην περίπτωση του Ευρωπαϊκού. Επιπλέον όπως έχουμε αναφέρει το ελεύθερο σύνορο ή αλλιώς καμπύλη πρόωρης άσκησης του παραγώγου $S_f(t)$, είναι ένας χρόνος στάσης και χωρίζει το χωρίο μας σε δύο περιοχές. Στην περιοχή άσκησης του παραγώγου και στην περιοχή αναμονής όπου ο κατοχός του συμβολαίου αναμένει και δεν ασκεί το δικαίωμα του. Συνεπώς ο κάτοχος του συμβολαίου θα πρέπει να ακολουθήσει μια στρατηγική για το πότε θα ασκήσει το δικαίωμα αγοράς ή πώλησης

Για το δικαίωμα αγοράς

Αν $S < S_f(t)$ Περιμένουμε και δεν αγοράζουμε το παράγωγο,

Διαφορετικά αν $S \geq S_f(t)$ ασκούμε αμέσως το δικαίωμα

Αντίστοιχα για το δικαίωμα πώλησης θα έχουμε:

Αν $S \leq S_f(t)$ ασκούμε το δικαίωμα,

Διαφορετικά αν $S > S_f(t)$ περιμένουμε και δεν πουλάμε το παράγωγο

Για τον υπολογισμό του ελεύθερου συνόρου $S_f(t)$ χρειαζόμαστε μία επιπλέον συνθήκη, η οποία δίνεται από την σχέση

$$\frac{\partial P}{\partial S}(t, S_f(t)) = -1$$

Η μοναδικότητα της προηγούμενης σχέσης αποδεικνύεται εύκολα λόγω της γεωμετρίας του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, η μερική παράγωγος του δικαιώματος πώλησης ως προς το υποκείμενο προϊόν δεν μπορεί να είναι μικρότερη του -1 δηλαδή $\frac{\partial P}{\partial S} < -1$ αφού στην περίπτωση αυτή η $P(S, t)$ θα είναι κάτω από την συνάρτηση αποπληρωμής το οποίο είναι άτοπο αφού εξ ορισμού ισχύει ότι $P(t, S) \geq \max(0, K - S)$. Όμοια απορρίπτεται και η περίπτωση για

2.2. ΚΑΜΠΥΛΗ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΣΥΝΟΡΟΥ ΚΑΙ ΤΟ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ

$\frac{\partial P}{\partial S} > -1$ αφού στην περίπτωση αυτή η $P(t, S)$ δε θα λαμβάνει την μέγιστη τιμή της $P(t, S) \geq \max(0, K - S)$. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [3].

Συνεπώς για το Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης θα έχουμε:

$$P(t, S_f) = K - S_f(t)$$

και

$$\frac{\partial P}{\partial S}(t, S_f(t)) = -1$$

το ελεύθερο σύνορο θα έχει κάτω φράγμα

$$S_f(t) > \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} K$$

όπου

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sigma^2} \left\{ -\left(r - d - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sqrt{\left(r - d - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma r} \right\}$$

και d το αντίστοιχο μέρισμα, και άνω φράγμα

$$S_f(t) \lim_{t \rightarrow T^-} S_f(t) = \min\left(K, \frac{r}{d}K\right)$$

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [2] (Παράρτημα Α). Αντίστοιχα για το Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς

$$C(t, S_f) = S_f(t) - K$$

και

$$\frac{\partial C}{\partial S}(t, S_f(t)) = 1$$

στην περίπτωση αυτή το αντίστοιχο κάτω φράγμα για το ελεύθερο σύνορο θα είναι:

$$S_f(t) < \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1} K$$

όπου

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sigma^2} \left\{ -\left(r - d - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sqrt{\left(r - d - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\sigma r} \right\}$$

και αντίστοιχα άνω φράγμα

$$\lim_{t \rightarrow T^-} S_f(t) > \max\left(K, \frac{r}{d}K\right)$$

Θεώρημα 2.1. Έστω $\Gamma = \{S_f := S_f(t), (0 \leq t \leq T)\}$ η περιοχή της πρόωρης άσκησης τότε

$$\begin{cases} S_f(t) & \text{είναι μονοτονικά μη φθίνουσα (για το δικαίωμα πώλησης)} \\ S_f(t) & \text{είναι μονοτονικά μη αύξουσα (για το δικαίωμα αγοράς)} \end{cases}$$

2.3. ΤΟ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ ΚΑΙ ΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την περίπτωση του δικαιώματος πώλησης, όμοια με χρήση της put call parity είναι και η απόδειξη για το δικαίωμα αγοράς. Υποθέτουμε αρχικά ότι η $S_f(t)$ δεν είναι μονοτονικά μία μη φθίνουσα τότε, θα υπάρχουν $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ τέτοια ώστε

$$S_f(t_1) > S_f(t_2)$$

και στο $t = t_2$ τότε

$$\{0 \leq S_f \leq S_f(t_2), t = t_2\} \in \mathcal{S} \text{ (περιοχή αναμονής)}$$

Αντίστοιχα

$$\{S_f(t_2) < S_f < \infty, t = t_2\} \in \mathcal{K} \text{ (περιοχή άσκησης)}$$

αντίστοιχα $(t_2, S_f(t_1)) \in \mathcal{C}$

Όμως αφού $(t_1, S_f(t_1)) \in \Gamma$, συνεπώς

$$P(t_1, S_f(t_1)) = (K - S_f(t_1))^+$$

Επομένως όταν $t_2 > t_1$

$$P(t_2, S_f(t_1)) > P(t_1, S_f(t_1))$$

το οποίο αντικρούει με το (1.27). Συνεπώς η καμπύλη πρόωρης άσκησης είναι μονοτονικά μία μη φθίνουσα συνάρτηση. \square

2.3 Το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης και το Γραμμικό Συμπληρωματικό Πρόβλημα

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε την μορφή που θα έχει το πρόβλημα της τιμολόγησης των Αμερικάνικων παραγώγων με χρήση της εξίσωσης της θερμότητας που αναφέραμε σε προηγούμενη ενότητα.

Πρωτού δώσουμε την μορφή του Αμερικάνικου παραγώγου ως γραμμικό συμπληρωματικό πρόβλημα είναι σημαντικό να αναφέρουμε το πρόβλημα του εμποδίου και την αντίστοιχη συνάρτηση εμποδίου (obstacle function) η οποία στην περίπτωση των Αμερικάνικων παραγώγων είναι η συνάρτηση αποπληρωμής.

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα εμποδίου Έστω $g(x)$ η αντίστοιχη συνάρτηση ελεύθερου εμποδίου (obstacle function) για την οποία ισχύει $g(x) > 0$ για $a < x < \beta$, $g \in C^2$ με $g''(x) < 0$ και $g(-1) < 0$, $g(1) < 0$. Πάνω από τη συνάρτηση g υπάρχει η συνάρτηση u η οποία εφάπτεται της g ανάμεσα στα σημεία a και β . Οι τιμές των a και β είναι αρχικά άγνωστες. Το πρόβλημα αυτό είναι το απλούστερο πρόβλημα ελεύθερου συνόρου.

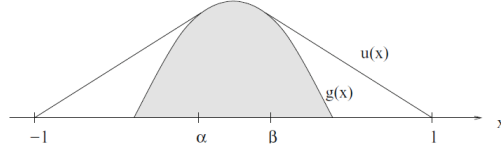
Σκοπός μας είναι να επαναδιατυπώσουμε το πρόβλημα του εμποδίου με τρόπο ώστε οι συνοριακές συνθήκες a και β να μην εμφανίζονται αρχικά στο πρόβλημα μας.

Η συνάρτηση u βλέπε Σχήμα 2.2 για $u \in C^1[-1, 1]$ ορίζεται ως ακολούθως

Για

$$-1 < x < a \quad u'' = 0 \quad (u > g)$$

2.3. ΤΟ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ ΚΑΙ ΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ



Σχήμα 2.2: Το Απλό πρόβλημα εμποδίου

Για

$$a < x < \beta \quad u = g \quad (u'' = g'' < 0)$$

Τέλος για

$$\beta < x < 1 \quad u'' = 0 \quad (u > g)$$

Συνεπώς καταλήγουμε:

Αν

$$u > g \quad \text{τότε} \quad u'' = 0$$

Αν

$$u = g \quad \text{τότε} \quad u'' < 0$$

Σε αναλογία με το απλό πρόβλημα του ελεύθερου συνόρου οδηγούμαστε στο πρόβλημα του Αμερικάνικου δικαίωματος πώλησης ως γραμμικό συμπληρωματικό πρόβλημα.

Θεώρημα 2.2. Το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης ικανοποιεί το ακόλουθο γραμμικό συμπληρωματικό πρόβλημα:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP \leq 0 \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^+ \times [0, T), \quad (2.14)$$

$$P(t, S) \geq (K - S)^+ \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^+ \times [0, T) \quad (2.15)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP \right) (P - (K - S)^+) = 0 \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^+ \times [0, T) \quad (2.16)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$P(T, 0) = K \quad \text{για} \quad S \rightarrow 0$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P(t, S) = 0$$

και τελική συνθήκη

$$P(T, S) = (K - S)^+$$

2.3. ΤΟ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ ΚΑΙ ΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [32].

Με χρήση ανάλογων μετασχηματισμών που παρουσιάσαμε στην Ενότητα 2.1 οδηγούμαστε:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{για } P_{Am}(t, S) > (K - S)^+$$

Εισάγοντας και τη συνθήκη για το Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης θα έχουμε:

$$P_{Am}(t, S) \geq (K - S)^+ = K \max \{0, 1 - e^x\}$$

Το οποίο μας οδηγεί στην ανισότητα:

$$\begin{aligned} y(\tau, x) &\geq \exp \left\{ \frac{1}{2} (k-1)x + \frac{1}{4} (k+1)^2 \tau \right\} \max \{0, 1 - e^x\} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{4} (k+1)^2 \tau \right\} \max \left\{ 0, (1 - e^x) e^{\frac{1}{2}(k-1)x} \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{4} (k+1)^2 \tau \right\} \max \left\{ 0, e^{\frac{1}{2}(k-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k+1)x} \right\} \\ &= g(\tau, x) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Συνεπώς το Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης μπορεί να γραφτεί στην μορφή του γραμμικού συμπληρωματικού προβλήματος ως ακολούθως:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) (y - g) = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \geq 0, \quad y - g \geq 0 \quad (2.19)$$

με αντίστοιχη αρχική συνθήκη:

$$y(0, x) = g(0, x) \quad 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2} \sigma^2 T \quad (2.20)$$

και αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(\tau, x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(\tau, x)$$

Το πρόβλημα του προσδιορισμού του ελεύθερου συνόρου-της πρόωρης ασκήσης του δικαιώματος εντάσσεται απευθείας στην ανωτέρω μορφή.

Κεφάλαιο 3

Πεπερασμένες Διαφορές για το Αμερικάνικο Παράγωγο

Με βάση τον μετασχηματισμό του Ευρωπαϊκού και Αμερικάνικου παραγώγου στην εξίσωση της θερμότητας, είμαστε έτοιμοι να τιμολογήσουμε αυτού του είδους τα παράγωγα, διακριτοποιώντας με κατάλληλες αρχικές και συνοριακές συνθήκες την εξίσωση θερμότητας. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τον τρόπο διακριτοποίησης αυτών των παραγώγων με χρήση της μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών.

3.1 Διακριτοποίηση της Εξίσωσης της Θερμότητας με Χρήση Πεπερασμένων Διαφορών

Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε τη διακριτοποίηση της εξίσωσης της θερμότητας.

Θεωρούμε την εξίσωση της θερμότητας:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad a \leq x \leq b \quad (3.1)$$

για κάποια αρχική συνθήκη y_0 και αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες και αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες $y(\tau, a) = y(\tau, b) = 0$

Η ιδέα των πεπερασμένων διαφορών είναι να αντικαταστήσουμε τις μερικές παραγώγους με κατάλληλες προσεγγίσεις από χρήση της σειράς Taylor. Με χρήση

3.1. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

της σειράς Taylor θα έχουμε:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau}(\tau, x) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{y(\tau + \Delta\tau, x) - y(\tau, x)}{\Delta\tau}$$

Υποθέτοντας τώρα ότι το $\Delta\tau$ είναι αρκετά μικρό καταλήγουμε:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau}(\tau, x) = \frac{y(\tau + \Delta\tau, x) - y(\tau, x)}{\Delta\tau} + \mathcal{O}(\Delta\tau) \quad (3.2)$$

Ο όρος $\mathcal{O}(\Delta\tau)$ προέρχεται από τη χρήση του αναπτύγματος Taylor, και για την συγκεκριμένη προσέγγιση αντιστοιχεί στο αντίστοιχο σφάλμα διακριτοποίησης. Η μέθοδος αυτή καλείται προς τα εμπρός διαφορά. Αντίστοιχα τώρα μια εναλλακτική προσέγγιση της μερικής παραγώγου ως προς τον χρόνο $\frac{\partial y}{\partial \tau}$ γίνεται ως ακολούθως:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau}(\tau, x) = \frac{y(\tau, x) - y(\tau - \Delta\tau, x)}{\Delta\tau} + \mathcal{O}(\Delta\tau) \quad (3.3)$$

Η μέθοδος αυτή καλείται ως προς τα πίσω διαφορά. Παρατηρούμε ότι η προσεγγίση αυτή έχει την ίδια τάξη σφάλματος με αυτή της προς τα εμπρός διαφορά. Εναλλακτικά καλύτερη τάξη σφάλματος μπορεί να επιτευχθεί με χρήση κεντρικών διαφορών ως ακολούθως:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau}(\tau, x) = \frac{y(\tau + \Delta\tau, x) - y(\tau - \Delta\tau, x)}{2\Delta\tau} + \mathcal{O}((\Delta\tau)^2) \quad (3.4)$$

Παρατηρούμε ότι στην προσέγγιση αυτή η αντίστοιχη τάξη σφάλματος είναι $\mathcal{O}(\Delta\tau^2)$. Ωστόσο η χρήση της (3.4) σε πολλές εφαρμογές δίνει κακά αριθμητικά αποτελέσματα. Μια καλύτερη επιλογή χρήσης κεντρικών διαφορών είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau}(\tau, x) = \frac{y(\tau + \frac{\Delta\tau}{2}, x) - y(\tau - \frac{\Delta\tau}{2}, x)}{\Delta\tau} + \mathcal{O}((\Delta\tau)^2) \quad (3.5)$$

Παρατηρούμε ότι η ανωτέρω κεντρική διαφορά έχει την ίδια τάξη σφάλματος με την (3.4). Η ιδέα της (3.5) προέρχεται από την μέθοδο Crank Nicolson. Τέλος για τη διακριτοποίηση της χωρικής παραγώγου θα έχουμε:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(\tau, x) = \frac{y(\tau, x + \Delta x) - 2y(\tau, x) + y(\tau, x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \quad (3.6)$$

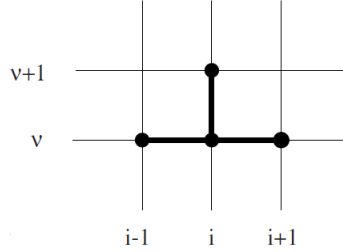
Με βάση τις ανωτέρω προσεγγίσεις είμαστε έτοιμοι να περιγράψουμε τα ανάλογα αριθμητικά σχήματα για την διακριτοποίηση της εξίσωσης της θερμότητας.

3.1.1 Η αμέση μέθοδος Euler για την εξίσωση θερμότητας

Για την εξίσωση θερμότητας

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad a \leq x \leq b$$

3.1. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ



Σχήμα 3.1: Η άμεση μέθοδος Euler

Δεδομένου ότι η προσεγγιστική λύση της $y(\tau, x)$ είναι η $y_i^{(\nu)}$, με χρήση της άμεσης μεθόδου Euler

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{y_i^{(\nu+1)} - y_i^{(\nu)}}{\Delta \tau} + \mathcal{O}(\Delta \tau)$$

και

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{y_{i+1}^{(\nu)} - 2y_i^{(\nu)} + y_{i-1}^{(\nu)}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

Λύνοντας ως προς $y_i^{(\nu+1)}$ θα έχουμε:

$$y_i^{(\nu+1)} = y_i^{(\nu)} + \frac{\Delta \tau}{h^2} (y_{i+1}^{(\nu)} - 2y_i^{(\nu)} + y_{i-1}^{(\nu)}) \quad (3.7)$$

Η μέθοδος ξεκινάει για δοθέν $\nu = 0$

$$y_i^0 = y(0, x) \quad (3.8)$$

και κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Στην περίπτωση αυτή υποθέτουμε ότι $y_0^{(\nu)} = y_m^{(\nu)} = 0$ Η (3.7) μπορεί για $\lambda = \frac{\Delta \tau}{h^2}$ να γραφτεί στην δομή του επαναληπτικού συστήματος:

$$y^{(\nu+1)} = A_{expl} y^{(\nu)} \quad (3.9)$$

Όπου:

$$A_{expl} = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 - 2\lambda & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 1 - 2\lambda \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Από την χρήση του αναπτύγματος Taylor το συνολικό σφάλμα για την άμεση μέθοδο Euler είναι $\mathcal{O}(\Delta \tau + h^2)$

3.1. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

3.1.2 Ευστάθεια της άμεσης μεθόδου Euler

Για την επαναληπτική μέθοδο $y^{(\nu+1)} = A_{exp}y^{(\nu)}$ θα πρέπει να την εξετάσουμε ως προς την ευστάθεια της. Το αντίστοιχο υπολογιστικό σφάλμα:

$$e^{(\nu)} = \bar{y}^{(\nu)} - y^{(\nu)}$$

όπου \bar{y} είναι η υπολογιστική μας λύση από την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών Άρα:

$$\bar{y}^{(\nu+1)} = A_{expl}\bar{y}^{(\nu)} + r^{(\nu+1)}$$

όπου r το αντίστοιχο σφάλμα που έχουμε κατα τον υπολογισμό του $A_{expl}\bar{y}^{(\nu)}$. Δεδομένου ότι $\bar{y}^{(\nu+1)} = A_{expl}\bar{y}^{(\nu)}$ καταλήγουμε:

$$A_{expl}e^{(\nu)} = A_{expl}\bar{y}^{(\nu)} - A_{expl}y^{(\nu)} = \bar{y}^{(\nu+1)} - y^{(\nu+1)} = e^{(\nu+1)}$$

Δηλαδή:

$$e^{(\nu)} = A_{expl}^{\nu}e^{(0)}$$

Για να είναι η μέθοδος ευσταθής θα πρέπει $A_{exp}^{\nu}e^{(0)} \rightarrow 0$ για $\nu \rightarrow \infty$, δηλαδή $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \{A_{expl}^{\nu}\}_{ij} = 0$ για $\nu \rightarrow \infty$. Το ακόλουθο λήμμα προβάλλει το αντίστοιχο κριτήριο.

Λήμμα 3.1. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. $\rho(A) < 1$
2. $A^{\nu}z \rightarrow 0 \forall z, \nu \rightarrow \infty$
3. $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \{A^{\nu}\}_{ij} = 0$

όπου $\rho(A) = \max |\mu_i^A|$ και μ_i^A οι αντίστοιχες ιδιοτιμές του πίνακα A

Για την απόδειξη του Λήμματος 3.1 παραπέμπουμε στο [48] (Θεώρημα 4 σελίδα 14)

Ως συνέπεια του ανωτέρω λήμματος, για να είναι η άμεση μέθοδος Euler ευσταθής θα πρέπει να ελέγξουμε τις αντίστοιχες ιδιοτιμές του A_{expl} . Συνεπώς διαχωρίζοντας τον πίνακα A_{expl}

$$A_{expl} = I - \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=:G} \quad (3.11)$$

Απομένει να εξετάσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα G , ο οποίος είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος

3.1. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Λήμμα 3.2. Έστω:

$$G = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & a & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα G μ_k^G και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα v_k^G είναι:

$$\mu_k = a + 2b\sqrt{\frac{b}{c}} \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)$$

και τα ιδιοδιανύσματα

$$v_k = \left(\sqrt{\frac{c}{b}} \sin\left(\frac{k\pi}{N+1}\right), \left(\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2 \sin\left(\frac{2k\pi}{N+1}\right), \dots, \left(\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^N \sin\left(\frac{Nk\pi}{N+1}\right) \right)$$

Συνεπώς με βάση το προηγούμενο λήμμα για, $a = 2$, και $b = c = -1$ οι αντίστοιχες ιδιοτιμές του πίνακα G θα είναι:

$$\mu_k^G = 1 - 4\lambda \cos^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right) = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)$$

Τέλος οι αντίστοιχες ιδιοτιμές του αρχικού πίνακα A θα είναι:

$$\mu_k^A = 1 - 4\lambda \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)$$

Συνεπώς για να είναι η άμεση μέθοδος Euler ευσταθής θα πρέπει $|\mu_k^A| < 1$. Συνεπώς

$$\left| 1 - 4\lambda \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right) \right| < 1$$

Το οποίο ισοδυναμεί:

$$-1 < 1 - 4\lambda \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right) = \frac{1}{2} > \lambda \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)$$

Άρα για $\lambda = \frac{\Delta\tau}{h^2}$, $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ η επαναληπτική μέθοδος:

$$y^{(\nu+1)} = A_{exp}y^{(\nu)}$$

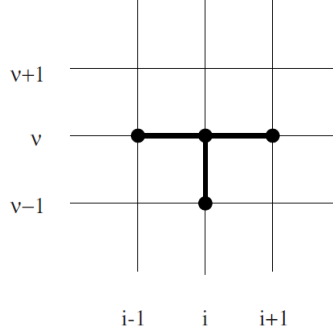
είναι ευσταθής.

Δηλαδή για:

$$\Delta\tau \leq \frac{h^2}{2} \tag{3.12}$$

η άμεση μέθοδος Euler είναι ευσταθής. Η συνθήκη (3.12) καλείται συνθήκη CFL (Courant-Friedrichs-Lewy condition)

3.1. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ



Σχήμα 3.2: Η έμμεση μέθοδος Euler

3.1.3 Η έμμεση μέθοδος Euler

Αντίστοιχα για την εξίσωση θερμοτήτας με χρήση της έμμεσης Euler μεθόδου θα έχουμε:

$$\frac{\partial y_i^{(\nu)}}{\partial t} = \frac{y_i^{(\nu)} - y_i^{(\nu-1)}}{\Delta\tau} + \mathcal{O}(\Delta\tau)$$

το οποίο με διακριτοποίηση της χωρικής παραγώγου με χρήση κεντρικών διαφορών θα έχουμε:

$$- \lambda y_{i+1}^{(\nu)} + (2\lambda + 1) y_i^{(\nu)} - \lambda y_{i-1}^{(\nu)} = y_i^{(\nu-1)} \quad (3.13)$$

Η ανωτέρω μορφή δείχνει τη σχέση ανάμεσα στο χρονικό βήμα ν και $\nu - 1$.

Γράφοντας την (3.13) σε δομή επαναληπτικής μεθόδου θα έχουμε:

$$y^{(\nu-1)} = A_{impl} y^{(\nu)} \quad (3.14)$$

Όπου:

$$A_{impl} = \begin{pmatrix} 2\lambda + 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 2\lambda + 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 2\lambda + 1 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή

$$A_{impl} = I + \lambda G \quad (3.15)$$

Για την ευστάθεια της έμμεσης μεθόδου Euler, Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A_{impl} είναι θετικά ορισμένος συνεπώς είναι αντιστρέψιμος, και η (3.14) μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$y^{(\nu)} = A_{impl}^{-1} y^{(\nu-1)}$$

Για να είναι ευσταθής η έμμεση μέθοδος Euler, βασιζόμενοι στο Λήμμα 3.1 θα πρέπει $\rho(A_{impl}^{-1}) < 1$ δηλαδή

$$|\mu_i^{A_{impl}^{-1}}| < 1$$

3.1. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

από την (3.15) και το λήμμα 3.2 θα έχουμε

$$\left| \frac{1}{1 + 4\lambda \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(N+1)} \right)} \right| < 1 \quad (3.16)$$

δηλαδή

$$4\lambda \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(N+1)} \right) > 0$$

Συνεπώς η έμμεση μέθοδος Euler είναι ευσταθής για όλα τα $\lambda > 0$ όπου $\lambda = \frac{\Delta\tau}{h^2}$. Τέλος, παρατηρούμε ότι η έμμεση μέθοδος και η άμεση Euler έχουν την ίδια τάξη σφάλματος, $\mathcal{O}(\Delta\tau + h^2)$.

3.1.4 Η μέθοδος Crank Nicolson

Στις προηγούμενες δύο μεθόδους η διακριτοποίηση της χρονικής παραγώγου $\frac{\partial y}{\partial \tau}$ ήταν $\mathcal{O}(\Delta\tau)$. Η χρήση της μεθόδου Crank Nicolson έχει τάξη σφάλματος $\mathcal{O}(\Delta\tau^2)$ με χρήση κατάλληλων κεντρικών διαφορών που εισάγαμε στην προηγούμενη ενότητα. Η μέθοδος Crank Nicolson ορίζεται παίρνοντας έμμεση Euler για το χρονικό βήμα ν άμεση Euler για το χρονικό βήμα $\nu + 1$ αλλά και το μέσο τους.

Συνεπώς την εξίσωση της θερμότητας με χρήση της Crank Nicolson θα έχουμε:

$$\frac{y_i^{(\nu+1)} - y_i^{(\nu)}}{\Delta\tau} = \frac{1}{2h^2} \left(y_{i+1}^{(\nu)} - 2y_i^{(\nu)} + y_{i-1}^{(\nu)} + y_{i+1}^{(\nu+1)} - 2y_i^{(\nu+1)} + y_{i-1}^{(\nu+1)} \right) \quad (3.17)$$

Η ανωτέρω εξίσωση συνδέει σε κάθε χρονικό βήμα ν και $\nu + 1$ τρεις όρους της y βλέπε Σχήμα 3.3

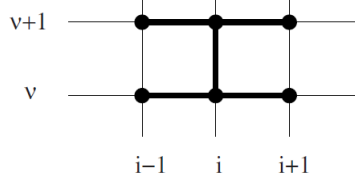
Θεώρημα 3.1. (Crank Nicolson) Υποθέτουμε ότι η y είναι λεία, με την έννοια ότι $y \in C^4$. Τότε:

1. Η τάξη της μεθόδου είναι: $\mathcal{O}(\Delta\tau^2) + \mathcal{O}(h^2)$
2. Για κάθε χρονικό βήμα ν το γραμμικό τριδιαγώνιο σύστημα έχει μοναδική λύση
3. Η μέθοδος είναι ευσταθής για όλα τα $\Delta\tau > 0$

Απόδειξη. 1. Για την αντίστοιχη τάξη της μεθόδου, Συμβολίζοντας:

$$y_{xx} = \frac{y_{i+1}^{(\nu)} - 2y_i^{(\nu)} + y_{i-1}^{(\nu)}}{h^2} = \delta_x^2 y_i^{(\nu)}$$

3.1. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ



Σχήμα 3.3: Η μέθοδος Crank Nicolson

Εφαρμόζοντας το διαφορικό δ_x^2 στην y με χρήση του αναπτύγματος Taylor θα έχουμε:

$$\delta_x^2 y(\tau_\nu, x_i) = \frac{\partial^2 y(\tau_\nu, x_i)}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 y(\tau_\nu, x_i)}{\partial x^4} + \mathcal{O}(h^2)$$

Το αντίστοιχο σφάλμα διακριτοποίησης:

$$\epsilon = \frac{y(\tau_{\nu+1}, x_i) - y(\tau_\nu, x_i)}{\Delta\tau} - \frac{1}{2}(\delta_x^2 y(\tau_\nu, x_i) + \delta_x^2 y(\tau_{\nu+1}, x_i))$$

και δεδομένου ότι για την εξίσωση της θερμότητας έχουμε ότι $\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial y^2}{\partial x^2}$ καταλήγουμε:

$$\epsilon = \mathcal{O}(\Delta\tau^2) + \mathcal{O}(h^2)$$

2. Το σύστημα των εξισώσεων της (3.17) μπορεί να γραφτεί στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{2} y_{i-1}^{(\nu+1)} + (1 + \lambda) y_i^{(\nu+1)} - \frac{\lambda}{2} y_{i+1}^{(\nu+1)} &= \\ &= \frac{\lambda}{2} y_{i-1}^{(\nu)} + (1 - \lambda) y_i^{(\nu)} + \frac{\lambda}{2} y_{i+1}^{(\nu)} \end{aligned}$$

το οποίο μπορεί να γραφτεί στην ακόλουθη επαναληπτική δομή:

$$A_{CN} y^{(\nu+1)} = B_{CN} y^{(\nu)} \quad (3.18)$$

Όπου:

$$A_{CN} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda \end{pmatrix}$$

και

$$B_{CN} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & 1 - \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

3.1. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A_{CL} είναι πραγματικές και $1 < \mu_{CL}^A < 1 + 2\lambda$. Συνεπώς μία τουλάχιστον ιδιοτιμή $\mu_{CL_k}^A$ $k = 0, 1, \dots$, θα είναι μεγαλύτερη της μονάδος, και άρα η λύση του γραμμικού μας συστήματος είναι μοναδικά ορισμένη.

3. Για την αντίστοιχη ευστάθεια της μεθόδου, οι πίνακες A_{CN} και B_{CN} μπορούν να γραφτούν στην ακόλουθη μορφή:

$$A_{CN} = I + \frac{\lambda}{2}G$$

και

$$B_{CN} = I - \frac{\lambda}{2}G$$

που G ο αντίστοιχος πίνακας που ορίσαμε στην άμεση μέθοδο Euler

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Με βάση την ανωτέρω μορφή οδηγούμαστε στην ακόλουθη επαναληπτική δομή:

$$\begin{aligned} (2I + \lambda G)y^{(\nu+1)} &= (2I - \lambda G)y^{(\nu)} \\ &= (4I - 2I - \lambda G)y^{(\nu)} = (4I - \lambda G)y^{(\nu)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Συνεπώς για $C = 2I + \lambda G$ θα έχουμε:

$$y^{(\nu+1)} = (4C^{-1} - I)y^{(\nu)} \quad (3.21)$$

Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές μ_k^C για $k = 1, 2, \dots$ με βάση το Λήμμα 3.2 θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mu_k^C &= 2 + \lambda\mu_k^G = 2 + \lambda \left(2 - 2 \cos \left(\frac{k\pi}{N+1} \right) \right) \\ &= 2 + 4\lambda \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(N+1)} \right) \end{aligned}$$

βασίζόμενοι στην (3.21) καταλήγουμε

$$\left| \frac{4}{\mu_k^C} - 1 \right| < 1 \implies \mu_k^C > 2$$

Συνεπώς η μέθοδος Crank Nicolson είναι ευσταθής για όλα τα $\lambda > 0$. □

Τέλος εισάγοντας μία παραμέτρο $\theta \in [0, 1]$ η οποία μας επιτρέπει να επιλέξουμε είτε την άμεση Euler είτε έμμεση Euler είτε τη μέθοδο Crank Nicolson. Πιο συγκεκριμένα για:

3.1. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

- $\theta = 0$ άμεση Euler
- $\theta = 1$ έμμεση Euler
- $\theta = 1/2$ μέθοδος Crank Nicolson

Με χρήση της μορφής θ καταλήγουμε στην ακόλουθη επαναληπτική δομή:

$$(I + \theta \lambda G) y^{(\nu+1)} = (I - (1 - \theta) \lambda G) y^{(\nu)} \quad (3.22)$$

και η αντίστοιχη δοθείσα αρχική συνθήκη:

$$y(0, x) = y_0$$

όπου G ο αντίστοιχός πίνακας, βλέπε (3.19)

Λήμμα 3.3. (Ευστάθεια της θ -μορφής)

- Αν $1/2 \leq \theta \leq 1$ τότε η (3.22) είναι ευσταθής για όλα τα $\lambda, h > 0$
- Αν $0 \leq \theta \leq 1/2$ τότε η (3.22) είναι ευσταθής αν ικανοποιεί την CFL-συνθήκη (3.12)

Απόδειξη. Έστω $A_\theta = I + \lambda \theta G$ και $B_\theta = I - \lambda(1 - \theta)G$. Για την ευστάθεια της θ -μορφής αρκεί να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $A_\theta^{-1}B_\theta$, για τον οποίο θα έχουμε:

$$\begin{aligned} A_\theta^{-1}B_\theta &= A_\theta^{-1}(I - (1 - \theta)\lambda G) = A_\theta^{-1} \left(I - \frac{(1 - \theta)}{\theta}(A - I) \right) \\ &= \frac{1}{\theta}A_\theta^{-1} - \frac{(1 - \theta)}{\theta}I \end{aligned}$$

Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές του πίνακα θα είναι:

$$\mu_k^{A_\theta^{-1}B_\theta} = \frac{4(1 - \theta)\lambda \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(N+1)} \right) - 1}{1 + 4\theta\lambda \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(N+1)} \right)} \quad \text{για } k = 1, 2, \dots$$

Συνεπώς βασιζόμενοι στο Λήμμα 3.1 για να είναι ευσταθής η θ -μορφή θα πρέπει $\rho(A_\theta^{-1}B_\theta) < 1$, συνεπώς

$$\max |\mu_k^{A_\theta^{-1}B_\theta}| < 1$$

Δηλαδή

$$\lambda \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)} \quad (3.23)$$

από το οποίο για $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ λαμβάνουμε τη συνθήκη CFL ενώ για $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ τότε η θ -μορφή είναι ευσταθής για όλα τα $\lambda \geq 0$. \square

3.1. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Ορίζουμε με

$$\|x\|_{\mathcal{L}^2} = \frac{\|x\|_2}{m-1} \left(\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} |x_i|^1 \right)^{1/2} \quad (3.24)$$

και για $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \quad (3.25)$$

και στην περίπτωση όπου ο A είναι συμμετρικός τότε

$$\|A\| = \sqrt{\rho(A^T A)} \text{ και } \|A\|_2 = \rho(A)$$

Θεώρημα 3.2. Έστω $y_i^{(\nu)}$ η προσεγγιστική λύση με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών για την (3.22) με $y_i^0 = y_0$ και $\mathcal{Y}_i^{(\nu)} = y(\tau_\nu, x_i)$ η ακριβής λύση της (3.1). Αν $y \in C^{4,2}$ τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\max_{0, \dots, \nu_{max}} \|y^{(\nu)} - \mathcal{Y}^{(\nu)}\|_{\mathcal{L}^2} \leq C(\Delta\tau + h^2) \quad (3.26)$$

Αντίστοιχα για την μέθοδο Crank Nicolson για $y \in C^{4,3}$ θα υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\max_{0, \dots, \nu_{max}} \|y^{(\nu)} - \mathcal{Y}^{(\nu)}\|_{\mathcal{L}^2} \leq C((\Delta\tau)^2 + h^2) \quad (3.27)$$

Απόδειξη. Έστω $A_\theta = I + \lambda\theta G$ και $B_\theta = I - \lambda(1-\theta)G$. Για τις $y^{(\nu)}, \mathcal{Y}^{(\nu)}$ ισχύουν οι ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις

$$A_\theta y^{(\nu)} = B_\theta y^{(\nu+1)}$$

και

$$A_\theta \mathcal{Y}^{(\nu)} = B_\theta \mathcal{Y}^{(\nu-1)} + \epsilon^{(\nu-1)}$$

Για την αντίστοιχη σύγκλιση θα έχουμε

$$\begin{aligned} \|y^{(\nu)} - \mathcal{Y}^{(\nu)}\|_2 &= \|A_\theta^{-1} (A_\theta y^{(\nu)} - A_\theta \mathcal{Y}^{(\nu)})\|_2 \\ &= \|A_\theta^{-1} (B_\theta \mathcal{Y}^{(\nu-1)} - B_\theta \mathcal{Y}^{(\nu-1)} - \epsilon^{(\nu-1)})\|_2 \\ &\leq \|A_\theta^{-1} B_\theta\|_2 \underbrace{\|y^0 - \mathcal{Y}^0\|_2}_{=0} + \sum_{i=0}^{\nu-1} \|A_\theta^{-1} B_\theta\|^{(\nu-i-1)} \|A_\theta^{-1}\|_2 \|\epsilon^{(i)}\|_2 \\ &\leq \frac{1 - \|A_\theta^{-1} B_\theta\|_2^{(\nu)}}{1 - \|A_\theta^{-1} B_\theta\|_2} \|A_\theta^{-1}\|_2 \max_{i=0, \dots, \nu_{max}} \|\epsilon^{(i)}\|_2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ο πίνακας $A_\theta^{-1} B_\theta$ και συνεπώς από το Λήμμα 3.1 η θ - μέθοδος είναι ευσταθής αν

$$\|A_\theta^{-1} B_\theta\|_2 = \rho(A_\theta^{-1} B_\theta) < 1$$

3.2. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΠΑΡΑΓΩΓΟ

Δεδομένου ότι το συνολικό σφάλμα για την άμμεση και την έμεση μεθόδο Euler είναι $\mathcal{O}(\Delta\tau + h^2)$, για $\tilde{C} > 0$ καταλήγουμε

$$\|\epsilon^{(\nu-1)}\|_{\mathcal{L}^2} \leq \max_{i=1, \dots, m-1} |\epsilon^{(\nu-1)}| \leq \tilde{C} (\Delta\tau + h^2) \quad \forall \nu = 1, \dots, \nu_{max}$$

Από την (3.28) θα έχουμε

$$\max_{\nu=0, \dots, \nu_{max}} \|y^{(\nu)} - \mathcal{Y}^{(\nu)}\|_{\mathcal{L}^2} \leq \tilde{C} \frac{\|A_\theta^{-1}\|_2}{1 - \|A_\theta^{-1}\|_2}$$

και καταλήγουμε

$$\max_{i=1, \dots, m-1} \|\epsilon^{(\nu)}\|_2 \leq C (\Delta\tau + h^2)$$

για

$$C = \tilde{C} \frac{\|A_\theta^{-1}\|}{1 - \|A_\theta^{-1}\|_2}$$

Η αποδειξη είναι όμοια και για την Crank Nicolson αντικαθιστώντας το συνολικό σφάλμα με $\mathcal{O}((\Delta\tau)^2 + h^2)$. \square

3.2 Πεπερασμένες Διαφορές για το Αμερικάνικο Παράγωγο

Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε τη γενική δομή διακριτοποίησης των Αμερικάνικων παραγώγων με χρήση πεπερασμένων διαφορών.

Υποθέτουμε ότι το υποκείμενο προϊόν (μετοχή) αποδίδει μέρισμα στον κατόχο του παραγώγου. Με βάση το γραμμικό συμπληρωματικό πρόβλημα που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο θα έχουμε:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) (y - g) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \geq 0 \end{cases} \quad y - g \geq 0 \quad (3.29)$$

με αντίστοιχη αρχική συνθήκη:

$$y(0, x) = g(0, x) \quad (3.30)$$

και αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(\tau, x) = g(\tau, x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(\tau, x) = 0$$

οπου η συνάρτηση εμπόδιο (obstacle function) για την περίπτωση του Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης θα είναι:

$$g(\tau, x) = \exp \left\{ \frac{\tau}{4} \left((k_d - 1)^2 + 4k \right) \right\} \max \left\{ 0, e^{\frac{x}{2}(k_d - 1)} - e^{\frac{x}{2}(k_d + 1)} \right\} \quad (3.31)$$

3.2. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΠΑΡΑΓΩΓΟ

αντίστοιχα για το Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς

$$g(\tau, x) = \exp \left\{ \frac{\tau}{4} \left((k_d - 1)^2 + 4k \right) \right\} \max \left\{ 0, e^{\frac{\tau}{2}(k_d+1)} - e^{\frac{\tau}{2}(k_d-1)} \right\} \quad (3.32)$$

όπου: $k_d = \frac{2(r-d)}{\sigma^2}$ και $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ με d το αντίστοιχο μέρισμα του υποκείμενου προϊόντος.

Για την αντίστοιχη χωρική διακριτοποίηση για το απειροδιάστατο χωρίο διακριτοποίησης $[-\infty, +\infty]$ θα πρέπει να κάνουμε μία κατάλληλη διακριτοποίηση. Στο [2] προτείνει τη χρήση του $[-5, 5]$ ως κατάλληλο χωρίο διακριτοποίησης. Συνεπώς για $a = 5$ $[-a, a]$ και το αντίστοιχο χωρικό βήμα $h = 2a/N$ όπου N ο μέγιστος αριθμός βήματων της διακριτοποίησης μας. Έτσι $-a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = a$ με $x_i = -a + ih$ και αντίστοιχα για τη χρονική διακριτοποίηση $\Delta\tau = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 T}{v_{max}}$, καταλήγουμε με χρήση της άμεσης Euler θα έχουμε:

$$\frac{y_i^{(\nu+1)} - y_i^{(\nu)}}{\Delta\tau} - \frac{y_{i-1}^{(\nu)} - 2y_i^{(\nu)} + y_{i+1}^{(\nu)}}{h^2} \geq 0$$

αντίστοιχα με χρήση της έμμεσης Euler θα έχουμε:

$$\frac{y_i^{(\nu+1)} - y_i^{(\nu)}}{\Delta\tau} - \frac{y_{i-1}^{(\nu+1)} - 2y_i^{(\nu+1)} + y_{i+1}^{(\nu+1)}}{h^2} \geq 0$$

Εισάγοντας και την παράμετρο $\theta \in [0, 1]$ καταλήγουμε:

$$\frac{y_i^{(\nu+1)} - y_i^{(\nu)}}{\Delta\tau} - (1-\theta) \frac{y_{i-1}^{(\nu)} - 2y_i^{(\nu)} + y_{i+1}^{(\nu)}}{h^2} - \theta \frac{y_{i-1}^{(\nu+1)} - 2y_i^{(\nu+1)} + y_{i+1}^{(\nu+1)}}{h^2} \geq 0$$

δηλαδή:

$$y_i^{(\nu+1)} - \theta \lambda \left(y_{i-1}^{(\nu+1)} - 2y_i^{(\nu+1)} + y_{i+1}^{(\nu+1)} \right) \geq y_i^{(\nu)} + (1-\theta) \lambda \left(y_{i-1}^{(\nu)} - 2y_i^{(\nu)} + y_{i+1}^{(\nu)} \right) \quad (3.33)$$

Για τις συνοριακές συνθήκες θα έχουμε:

$$y_0^{(\nu)} = g_{x_0}^{(\nu)}$$

και

$$y_N^{(\nu)} = g_{x_N}^{(\nu)}$$

Βασιζόμενοι στην αναδρομική σχέση (3.33) για $i = x_0$ και $i = x_N$ το διάνυσμα των συνοριακών συνθηκών θα είναι:

$$d^{(\nu)} = \begin{pmatrix} \theta \lambda g_{x_N}^{(\nu+1)} + \lambda(1-\theta) g_{x_N}^{(\nu)} \\ 0 \\ \vdots \\ \theta \lambda g_{x_0}^{(\nu+1)} + \lambda(1-\theta) g_{x_0}^{(\nu)} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

3.2. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΠΑΡΑΓΩΓΟ

Συνεπώς, εισάγοντας και τις συνοριακές συνθήκες καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1+2\lambda\theta & -\theta\lambda & 0 & 0 \\ -\theta\lambda & 1+2\lambda\theta & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -\theta\lambda \\ 0 & 0 & -\theta\lambda & 1+2\lambda\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{x_N}^{(\nu+1)} \\ \vdots \\ y_{x_0}^{(\nu+1)} \end{pmatrix} \\ \geq & \begin{pmatrix} 1-2(1-\theta) & (1-\theta)\lambda & 0 & 0 \\ (1-\theta)\lambda & 1-2(1-\theta)\lambda & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & (1-\theta)\lambda \\ 0 & 0 & (1-\theta)\lambda & 1-2(1-\theta)\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{x_N}^{(\nu)} \\ \vdots \\ y_{x_0}^{(\nu)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta\lambda g_{x_N}^{(\nu+1)} + \lambda(1-\theta)g_{x_N}^{(\nu)} \\ 0 \\ \vdots \\ \theta\lambda g_{x_0}^{(\nu+1)} + \lambda(1-\theta)g_{x_0}^{(\nu)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Συνεπώς καταλήγουμε στην ακόλουθη επαναληπτική δομή:

$$Cy^{(\nu+1)} \geq By^{(\nu)} + d^{(\nu)} \quad (3.35)$$

Όπου:

$$C = \begin{pmatrix} 1+2\lambda\theta & -\theta\lambda & 0 & 0 \\ -\theta\lambda & 1+2\lambda\theta & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -\theta\lambda \\ 0 & 0 & -\theta\lambda & 1+2\lambda\theta \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1-2(1-\theta)\lambda & (1-\theta)\lambda & 0 & 0 \\ (1-\theta)\lambda & 1-2(1-\theta)\lambda & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & (1-\theta)\lambda \\ 0 & 0 & (1-\theta)\lambda & 1-2(1-\theta)\lambda \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Συνεπώς για $\nu = 0, 1, 2, \dots$ επιλύουμε το ακόλουθο γραμμικό συμπληρωματικό πρόβλημα:

$$\begin{cases} Cy^{(\nu+1)} \geq b^{(\nu)} \\ y^{(\nu+1)} \geq g^{(\nu+1)} \\ (y^{(\nu+1)} - g^{(\nu+1)})^T (Cy^{(\nu+1)} - b^{(\nu)}) = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

όπου

$$b^{(\nu)} = By^{(\nu)} + d^{(\nu)} \quad (3.39)$$

Το (3.38) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο γραμμικό συμπληρωματικό πρόβλημα

$$\begin{cases} \text{Βρές } z \geq 0 \text{ τέτοιο ώστε} \\ Cz + q \geq 0 \\ z(Cz + q) = 0 \end{cases} \quad q \in \mathbb{R}^N \quad (3.40)$$

3.2. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΠΑΡΑΓΩΓΟ

όπου

$$z = y^{(\nu)} - g^{(\nu)}$$

και

$$q = Cq^{(\nu)} - b^{(\nu)}$$

και δεδομένου ότι ο πίνακας C είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος καταλήγουμε στο ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 3.3. *Αν ο πίνακας C είναι θετικά ορισμένος, τότε το γραμμικό συμπληρωματικό πρόβλημα (3.40) έχει μοναδική λύση για όλα τα $q \in \mathbb{R}^N$*

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [16] (Θεώρημα 3.1.6 σελίδα 141).
Για την αντίστοιχη σύγκλιση, βασιζόμενοι στο [45] καταλήγουμε:

$$\max_{\substack{0, \dots, N \\ 0, \dots, N}} |y_i^{(\nu)}(t) - y(t)| \leq C(h^2 + \Delta\tau)^{1-\epsilon} \quad \forall \epsilon > 0 \quad (3.41)$$

όπου \bar{y} συνάρτηση spline στα σημεία (τ_ν, x_i) της προσέγγισης μας από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

Η επίλυση του (3.38) γίνεται με χρήση της επαναληπτικής μεθόδου PSOR που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 5.

Κεφάλαιο 4

Πεπερασμένα Στοιχεία για το Αμερικάνικο Παράγωγο

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε την διακριτοποίηση του Αμερικάνικου παραγωγού με χρήση πεπερασμένων στοιχείων. Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο Αριθμητικές Εφαρμογές, σε πολλές εφαρμογές η χρήση των πεπερασμένων στοιχείων οδηγεί σε καλύτερη προσεγγιστική λύση έναντι των πεπερασμένων διαφορών. Αυτό οφείλεται στην δομή των πεπερασμένων στοιχείων. Οι πεπερασμένες διαφορές που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο διακριτοποιούν το χώρο σε τετράγωνα μόνο, και σε προβλήματα με περιπλόκη γεωμετρική δομή δεν οδηγούν σε καλή προσέγγιση. Εν αντιθέση με τις πεπερασμένες διαφορές, τα πεπερασμένα στοιχεία ανάλογα με τον τύπο στοιχείων της βάσης (συναρτήσεις στέγες, cubic splines, πολυώνυμα Hermite, wavelets) διακριτοποιούν το χώρο σε τετράγωνα τρίγωνα εξάγωνα κτλ. Συνεπώς σε προβλήματα με περίπλοκη γεωμετρική δομή, κυρίως σε προβλήματα 2-3 διαστάσεων με χρήση κατάλληλων στοιχείων θα έχουμε μια καλή προσέγγιση για το πρόβλημα μας. Για τον λόγο αυτό πολλοί ερευνητές κάνουν χρήση των πεπερασμένων στοιχείων για την τιμολόγηση χρηματοοικονομικών προϊόντων.

Πρωτού παρουσιάσουμε την χρήση των πεπερασμένων στοιχείων για τα Αμερικάνικα παράγωγα, θα παρουσιάσουμε κάποια εισαγωγικά στοιχεία για την χρήση των πεπερασμένων στοιχείων σε προβλήματα παραβολικού τύπου.

4.1 Πεπερασμένα Στοιχεία για Εξισώσεις Παραβολικού Τύπου

Οι περισσότερες εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά ακολουθούν εξισώσεις παραβολικού τύπου με την ακόλουθη δομή:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - Ay = f \quad \text{στο } J \times \Omega$$

4.1. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

με αντιστοίχη αρχική συνθήκη:

$$y(0, x) = y_0(x) \quad x \in \Omega, \quad \Omega \in \mathbb{R}^d$$

όπου A : ο αντίστοιχος ελλειπτικός τελεστής, J το χρονικό πεδίο και Ω , το αντίστοιχο χωρικό πεδίο.

4.1.1 Χώροι Sobolev

Στην ενότητα αυτή εισάγουμε τους χώρους Sobolev, οι οποίοι είναι μία ειδική κατηγορία χώρων Hilbert και είναι απαραίτητοι για την μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Ορισμός 4.1. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε με $\mathcal{D}(\Omega)$ ή $C_0^\infty(\Omega)$ τον χώρο $C^\infty(\Omega)$ συναρτήσεων με συμπαγή φορέα στο Ω .

Ορισμός 4.2. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, το σύνολο των τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων συμβολίζεται με:

$$L^1_{Loc}(\Omega) = \{y : y \in L^1(K) \quad \forall K \text{ συμπαγές } \subseteq \Omega\}$$

Ορισμός 4.3. Λέμε ότι μία συνάρτηση $y \in L^1_{Loc}(\Omega)$ έχει ασθενή παράγωγο $D^n y$ δεδομένου ότι υπάρχει μία συνάρτηση $g \in L^1_{Loc}(\Omega)$ τέτοια ώστε:

$$\int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx = (-1)^n \int_{\Omega} y(x) \varphi(x)^n dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Αν υπάρχει τέτοια συνάρτηση g ορίζουμε $D^n y = g$.

Με βάση τα ανωτέρω μπορούμε να ορίσουμε τους χώρους $H^m(\Omega)$

Ορισμός 4.4. $H^m(\Omega)$ $m \in \mathbb{N}$ είναι ο χώρος όλων των συναρτησέων των οποίων οι ασθενείς παράγωγοι τάξης $\leq m$ ανήκουν στον $L^2(\Omega)$ δηλαδή:

$$H^m(\Omega) = \{y \in L^2(\Omega) : D^n y \in L^2(\Omega) \text{ για } n \leq m\}$$

Εφόδιαζουμε τον χώρο $H^m(\Omega)$ με το ακόλουθο εσωτερικό γινόμενο:

$$(y, v) = \sum_{n=0}^m (D^n y, D^n v)_{L^2(\Omega)}$$

και την αντιστοίχη νόρμα:

$$\|y\|_{H^m(\Omega)}^2 = (y, y)_{H^m(\Omega)} = \sum_{n=0}^m \|D^n y\|_{L^2(\Omega)}^2$$

ο $H^m(\Omega)$ είναι ένας χώρος Hilbert και αποτελεί ένα παράδειγμα του χώρου Sobolev, τους οποίους παρουσιάζουμε αχολούθως:

4.1. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

Ορισμός 4.5. Έστω m θετικός ακέραιος και $y \in L^1_{Loc}(\Omega)$. Υποθέτουμε ότι οι ασθενείς παράγωγοι $D_w^n y$ υπάρχουν για όλα τα $|n| \leq m$. Ορίζουμε τον χώρο

$$W^{m,p} = \{y \in L^1_{Loc}(\Omega) : \|y\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \infty\}$$

όπου για $1 \leq p < \infty$

$$\|y\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|n| < m} \|D^n y\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

και στην περίπτωση όπου $p = \infty$

$$\|y\|_{W^{\infty,m}(\Omega)} = \max_{|n| \leq m} \|D^n y\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Θεώρημα 4.1. Ο χώρος $W^{m,p}(\Omega)$ για $1 \leq p \leq \infty$ είναι ένας πλήρης χώρος Banach.

Απόδειξη. Έστω $\{v_j\}$ ακολουθία Cauchy στον $W^{m,p}$. Τότε η $\{D_w^n v_j\}$, θα και αυτή μία ακολουθία Cauchy στον $L^p(\Omega)$, για $|n| \leq m$. Αφού ο $L^p(\Omega)$ είναι ένας πλήρης χώρος Banach, θα υπάρχει $v^n \in L^p(\Omega)$ τέτοιο ώστε

$$\|D^n v_j - v^n\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$$

καθώς $j \rightarrow \infty$ με $v_j \rightarrow v^{(0,0,\dots,0)} := v$ στον $L^p(\Omega)$

Απομένει να δείξουμε ότι το $D^n v$ υπάρχει και είναι ίσο με με το v^n .

Αρχικά παρατηρούμε ότι αν $w_j \rightarrow w$ στον $L^p(\Omega)$ τότε για όλα τα $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ έχουμε

$$\int_{\Omega} w_j(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} w(x) \varphi(x) dx$$

Απο την ανισότητα Holder θα έχουμε:

$$\|w_j \varphi - w \varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq \|w_j - w\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$$

καθώς το $j \rightarrow \infty$. Για να δείξουμε ότι $D^n v = v^n$ θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v^n \varphi dx &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (D^n v_j) \varphi dx \\ &= (-1)^n \int_{\Omega} v_j \varphi^n dx = (-1)^n \int_{\Omega} v \varphi^n dx \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 4.2. Έστω $\Omega = [a, b]$ και $y \in W^{1,p}(\Omega)$. Τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\tilde{y} \in C^0(\bar{\Omega})$ τέτοια ώστε $y = \tilde{y}$ σ.π στο Ω και για όλα τα $x_1, x_2 \in \Omega$ ισχύει

$$\tilde{y}(x_2) - \tilde{y}(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} y'(\xi) d\xi$$

4.1. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in \Omega$ και $g \in L^p(\Omega)$

$$v(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt \quad x \in \Omega$$

Τότε η $v \in C^0(\bar{\Omega})$ και

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \varphi' dx &= \int_{\Omega} \left(\int_{x_0}^x g(t) dt \right) \varphi'(x) dx \\ &= - \int_a^{x_0} \int_x^{x_0} g(t) \varphi'(x) dt dx + \int_{x_0}^b \int_{x_0}^x g(t) \varphi'(x) dt dx \end{aligned}$$

Από το θεώρημα του Fubini θα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \varphi' dx &= - \int_a^{x_0} g(t) \int_a^t \varphi'(x) dx dt + \int_{x_0}^b g(t) \int_t^b \varphi'(x) dx dt \\ &= - \int_{\Omega} g(t) \varphi(t) dt \end{aligned} \quad (4.1)$$

για κάθε $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Θέτουμε

$$\bar{y}(x) = \int_{x_0}^x y'(\xi) d\xi$$

από την (4.1) θα έχουμε

$$\int_{\Omega} \bar{y} \varphi' dx = - \int_{\Omega} y' \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$$

και από το ορισμό της ασθενούς παραγώγου καταλήγουμε

$$\int_{\Omega} (y - \bar{y}) \varphi' dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$$

Συνεπώς έπεται ότι $y(x) - \bar{y}(x) = C$ σ.π για κάθε $x \in \Omega$ και θέτωντας $\tilde{y} := \bar{y} + C$ λαμβάνουμε το ζητούμενο. \square

Για τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες που επιβάλλουν $u = 0$ στο $\partial\Omega$ θα έχουμε:

Ορισμός 4.6. Έστω $1 \leq p \leq \infty$ τότε ο $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι η κλειστότητα του C_0^1 στην $W^{1,p}$ - νόρμα

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$$

ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος. Συγκεκριμένα αν $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ τότε πάλι είναι ένας χώρος Hilbert με νόρμα: $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

4.1. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

Θεώρημα 4.3. Ανισότητα Poincare Υποθέτουμε ότι $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο, τότε:

Υπάρχει σταθερά $C(\Omega, p) > 0$ τέτοια ώστε:

$$1. \quad \|y\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|y'\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall y \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (4.2)$$

2. Ορίζουμε:

$$W_*^{1,p} = \left\{ y \in W^{1,p}(\Omega) \int_{\Omega} y dx = 0 \right\} \quad (4.3)$$

τότε η (4.2) ισχύει για $\forall y \in W_*^{1,p}$

Απόδειξη. 1. Έστω $y \in W_0^{1,p}(\Omega)$ με $\Omega = (x_1, x_2)$ αυθαίρετο αλλά σταθερό. Από το θεώρημα 4.2 υπάρχει $\tilde{y} \in C^0(\bar{\Omega})$, τέτοιο ώστε $y = \tilde{y}$ σ.π για όλα τα $x \in \bar{\Omega}$ και $\tilde{y}(x_1) = 0$. Συνεπώς από την ανισότητα Holder θα έχουμε:

$$|\tilde{y}(x)| = |\tilde{y}(x) - \tilde{y}(x_1)| = \left| \int_{x_1}^x y'(\xi) d\xi \right| \leq |x - x_1|^{1/q} \|y'\|_{L^p(\Omega)}$$

όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Συνεπώς για

$$C = \left(\int_{\Omega} |x - x_1|^{p/q} dx \right)^{1/p}$$

καταλήγουμε

$$\|y\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|y'\|_{L^p(\Omega)}$$

2. Έστω $y \in W_*^{1,p}(\Omega)$ τότε θα υπάρχει $\tilde{y} \in C^0(\Omega)$ τέτοιο ώστε $y = \tilde{y}$ σ.π για όλα $\forall y \in \Omega$. Επαναλαμβάνοντας τα βήματα της απόδειξης 1, παίρνοντας x_* αντί για x_1 και λάμβανοντας \sup σε όλες τις πιθανές τιμές του x_* , λαμβάνουμε το ζητούμενο. □

4.1.2 Μεταβολική Μορφή Παραβολικών Εξισώσεων

Ορισμός 4.7. Έστω H χώρος Hilbert, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο και είναι πλήρης ως προς την νόρμα $\|y\| = (y, y)^{1/2}$, ένα σύνολο K καλείται κυρτό αν

$$\forall y, v \in K \quad \{\lambda y + (1 - \lambda)v \mid 0 < \lambda < 1\} \subset K$$

Θεώρημα 4.4. (Θεώρημα Προβολής σε Κυρτό Υποσύνολο) Έστω H χώρος Hilbert και $K \subset H$ κλειστό και κυρτό υποσύνολο. Τότε για κάθε $f \in H$ υπάρχει μοναδικό $y \in K$ τέτοιο ώστε:

$$\|f - y\| = \min_{v \in K} \|f - v\| \quad (4.4)$$

4.1. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

Επιπλέον για την αντίστοιχη μεταβολική μορφή θα έχουμε:

Βρες $y \in K$ τέτοιο ώστε:

$$(f - y, v - y) \leq 0 \quad \forall v \in K$$

Ορίζουμε με $y = P_K f$ την προβολή της f στο K

Ορισμός 4.8. (Δυϊκός χώρος ενός χώρου Hilbert) Έστω η γραμμική απεικόνιση $y^* : H \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και μόνο αν:

$$\|y^*\|_{H^*} = \sup_{y \neq 0} \left\{ \frac{|y^*(y)|}{\|y\|} : y \in H \right\} < \infty \quad (4.5)$$

τότε το y^* καλείται γραμμικό και συνεχές συναρτησιακό. Το σύνολο όλων των γραμμικών συναρτησιακών στον H συμβολίζεται με H^* και είναι ένας γραμμικός χώρος με νόρμα όπως αυτή ορίζεται στην (4.5) και καλείται δυϊκός χώρος του H

Θεώρημα 4.5. (Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz) Για κάθε $y^* \in H^*$ υπάρχει μοναδικό $y \in H$ τέτοιο ώστε:

$$\forall v \in H \quad y^*(v) = (y, v) \quad (4.6)$$

και

$$\|y^*\|_{H^*} = \|y\| \quad (4.7)$$

Απόδειξη. Έστω $y^* \in H^*$, το σύνολο $\mathcal{N} := \{v \in H : y^*(v) = 0\}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H . Αν $\mathcal{N} = H$ τότε $y^* \equiv 0$ και επιλέγουμε $y = 0$. Υποθέτουμε τώρα $\mathcal{N} \neq H$, τότε θα υπάρχει $g \in H \setminus \mathcal{N}$ τέτοιο ώστε

$$\|g\| = 1, \quad \forall w \in \mathcal{N} : (g, w) = 0 \quad (4.8)$$

Έστω $g_0 \in H \setminus \mathcal{N}$ και $g_1 = P_{\mathcal{N}} g_0 \neq g_0$. Τότε η $g := \|g_0 - g_1\|^{-1} \times (g_0 - g_1)$ ικανοποιεί την (4.8). Έστω τώρα $v \in H$ το οποίο μπορεί να γραφτεί στην μορφή $v = \lambda g + w \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ και $w \in \mathcal{N}$. Έστω

$$\lambda = \frac{y^*(v)}{y^*(g)}, \quad w = v - \lambda g$$

τότε $0 = (g, w) = (g, v - \lambda g)$ και άρα

$$(g, v) = \lambda = \frac{y^*(v)}{y^*(g)}$$

Συνεπώς η $y := y^*(g)g$ ικανοποιεί την:

$$\begin{aligned} \forall v \in H : y^*(v) &= y^*(\lambda g + w) = \lambda y^*(g) + y^*(w) = \lambda y^*(g) \\ &= (g, v) y^*(g) = (y, v) \end{aligned}$$

και από την (4.5) θα έχουμε:

$$\|y^*\|_{H^*} = \sup_{v \in H} \frac{|y^*(v)|}{\|v\|} = \sup_{v \in H} \frac{|(y, v)|}{\|y\|} \leq \|y\|$$

4.1. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

και

$$\|y\| = \frac{(y, v)}{\|y\|} = \frac{|y^*(y)|}{\|y\|} \leq \sup_{v \in H} \frac{|y^*(v)|}{\|v\|} \leq \|y^*\|_{H^*}$$

□

Έστω $V \subset H$ χώρος Hilbert με συνεχή και πυκνό εγκλεισμό, με αντίστοιχο δυϊκό V^* για τον οποίο ισχύει:

$$V \subset H \subset H^* \subset V^*$$

Συμβολίζουμε με $(\cdot, \cdot)_H$ το εσωτερικό γινόμενο στον H και $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_H$ οι αντίστοιχες νόρμες στον V και H αντίστοιχα.

Για $J = (0, T), T > 0$ και $f \in L^2(J, V^*), y_0 \in H$ η αντίστοιχη διγραμμική μορφή θα είναι η ακόλουθη:

Βρες $y \in L^2(J, V) \cap H^1(J, V^*)$ τέτοια ώστε:

$$\frac{d}{dt} \langle y, v \rangle_{V^* \times V} + a(y, v) = \langle f, v \rangle_{V^* \times V} \quad (4.9)$$

με

$$y(0) = y_0$$

Συνεπώς από το Θεώρημα 4.5 έχουμε ότι:

$$\langle y, v \rangle_{V^* \times V} = (y, v)_H$$

$\forall y \in H, v \in V$. η αντίστοιχη διγραμμική μορφή $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ συνδεεται με τον ελλειπτικό τελεστή $A \in L(V, V^*)$ ως ακολούθως:

$$a(y, v) = - \langle Ay, v \rangle \quad \forall y, v \in V$$

όπου $L(V, W)$ είναι ο αντίστοιχος διανυσματικός χώρος των γραμμικών συνεχών τελεστών $A : V \rightarrow W$

Αξίζει να επισημάνουμε ότι η επιλογή του χώρου V εξαρτάται από τον ελλειπτικό τελεστή A . Η επιλογή του V είναι συνήθως η κλειστότητα ενός πυκνού υποχώρου λείων συναρτήσεων πχ C_0^∞

Θεώρημα 4.6. Υποθέτουμε ότι η διγραμμική μορφή (4.9) είναι συνεχής, τότε υπάρχει σταθερά $C_1 > 0$ τέτοια ώστε:

$$|a(y, v)| \leq C_1 \|y\|_V \|v\|_V \quad \forall y, v \in V \quad (4.10)$$

Επιπλέον η $a(y, v)$ ικανοποιεί την ανισότητα Garding δηλαδή, Υπάρχουν $C_2 > 0$ και $C_3 \geq 0$ τέτοια ώστε:

$$a(y, v) \geq C_2 \|y\|_V^2 - C_3 \|y\|_H^2 \quad \forall y \in V \quad (4.11)$$

τότε η (4.9) θα έχει μοναδική λύση $y \in L^2(J, V) \cap H^1(J, V^*)$ με την ακόλουθη a priori εκτίμηση:

$$\|y\|_{C^0(J, H)} + \|y\|_{L^2(J, V)} + \|y\|_{H^1(J, V^*)} \leq C (\|y_0\|_H + \|f\|_{L^2(J, V^*)})$$

4.1. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [25] (Παράρτημα Β σελίδες 278-284). Για την αντίστοιχη διακριτοποίηση, έστω $V_N \subset V$ πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος με $\dim(V_N) < \infty$. Για κάθε $t \in J$ η $y(t, x)$ προσεγγίζεται από μία συνάρτηση $y_h(t) \in V_N$. Έστω y_h^0 η προσέγγιση του y_0 τότε η ημιδιακριτή μορφή είναι: Βρες $y_h \in C^1(J, v_N)$ τέτοια ώστε για $\forall t \in J$

$$\left(\frac{\partial y_h}{\partial t}, v_h \right)_H + a(y_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle_{V^* \times V} \quad (4.12)$$

με αρχική συνθήκη:

$$y_h(0) = y_h^0$$

Η V_N παράγεται από μία κατάλληλη βάση στοιχείων $V_N = \text{span} \{ \varphi_i(x) : 1 \leq i \leq N \}$ και $y_h \in V_N$ με την έννοια:

$$y_h(t, x) = \sum_{j=1}^N y_{h,j}(t) \varphi_j(x)$$

Συνεπώς καταλήγουμε στην ακόλουθη ημιδιακριτή μορφή:

$$B \dot{y}_h(t) + A y_h(t) = f(t) \quad (4.13)$$

και

$$y_h(0) = y_0$$

Όπου:

$$B_{ij} = (\varphi_j, \varphi_i)_H$$

$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$$

και

$$f_i(t) = \langle f, \varphi_i \rangle_{V^* \times V}$$

Διακριτοποιώντας και ως προς τον χρόνο με χρήση μη ομοιόμορφης διαμέρισης Δt_m , $m = 1, \dots, M$ και $t_0 = 0$, $t_m = \sum_{i=1}^m \Delta t_i$ με $t_M = T$ και εισάγωντας την παράμετρο θ καταλήγουμε στην ακόλουθη διακριτή μορφή Βρες $y_h^m \in V_N$ τέτοια ώστε για $m = 1, \dots, M$

$$\Delta t_m^{-1} (y_h^m - y_h^{m-1}, v_h)_H + a(y_h^{m-1+\theta}, v_h) = \langle f^{m-1+\theta}, v_h \rangle_{V^* \times V} \quad \forall v_h \in V_N \quad (4.14)$$

με αρχική συνθήκη:

$$y_h(0) = y_0$$

όπου

$$y_h^{m+\theta} = \theta y_h(t_{m+1}) + (1-\theta) y_h(t_m)$$

και

$$f^{m+\theta} = \theta f(t_{m+1}) + (1-\theta) f(t_m)$$

Η (4.14) σε μορφή πινάκων γίνεται

Βρες $y_h \in \mathbb{R}^N$ τέτοιο ώστε για $m = 1, \dots, M$

$$(B + \Delta t_m \theta A) y_h^m = (B - \Delta t_m (1-\theta) A) y_h^{m-1}$$

με

$$y_h^0 = y_0$$

4.1. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

4.1.3 Εκτίμηση Σφάλματος

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε την εκτίμηση σφάλματος για τα προβλήματα παραβολικού τύπου. Θεωρούμε ότι η βάση που χρησιμοποιούμε είναι η βάση των συναρτήσεων στεγών $S_\Omega^1 = \text{span}\{\varphi_i(x) : i = 1, \dots, N\}$, όπου $\varphi_i(x)$ οι αντίστοιχες συναρτήσεις στέγες.

Για $y \in H^1(\Omega)$ ορίζουμε την πολυωνυμική παρεμβολή $I_h y \in S_\Omega^1$ ως ακολούθως:

$$I_h y(x) = \sum_{i=0}^{N+1} y(x_i) \varphi_i(x) \quad (4.15)$$

Λήμμα 4.1. *Ο τελεστής παρεμβολής $I_h : H^1(\Omega) \rightarrow S_\Omega^1$ όπως ορίζεται στην (4.15) είναι φραγμένος και υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε:*

$$\|I_h y\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|y\|_{H^1(\Omega)}$$

Για την αντίστοιχη εκτίμηση σφάλματος, έστω $y^m(x) = y(t_m, x)$ και $V_N = S_\Omega^1$, θέλουμε να κάνουμε μία εκτίμηση για το:

$$e_h^m(x) = y^m(x) - y_h^m(x)$$

Συνεπώς:

$$e_h^m = (y^m - I_h y^m) + (I_h y^m - y_h^m) := \eta^m + \xi^m$$

Πρόταση 4.1. *Έστω $I_h : V \rightarrow V_N$ τότε ισχύει η ακόλουθη εκτιμήση σφάλματος:*

$$\|(y - I_h y)^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{i=1}^{N+1} h_i^{2(l-n)} \|y\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \quad n = 0, 1 \quad l = 1, 2 \quad (4.16)$$

όπου $\Omega_i := (x_{i-1}, x_i)$ και $h_i = |\Omega_i| = x_i - x_{i-1}$, για $i = 1, \dots, N+1$

Αντίστοιχα για την περίπτωση της ομοιόμορφης διαμέρισης $h_i = h$ θα έχουμε:

$$\|(y - I_h y)^{(n)}\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^{l-n} \|y^{(l)}\|_{L^2(\Omega)} \quad n = 0, 1 \quad l = 1, 2 \quad (4.17)$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 4.2 για $\hat{\Omega} = (0, 1)$ και $y \in H^2(\hat{\Omega})$ τότε $\hat{y}' - c \in \tilde{H}(\hat{\Omega})$ για $c = \int_0^1 \hat{y}'$. Από την ανισότητα Poincare η οποία ισχύει και για τον χώρο $\tilde{H}^1(\hat{\Omega})$ θα έχουμε:

$$\|\hat{y}' - c\|_{L^2(\hat{\Omega})} \leq \hat{c} \|\hat{y}''\|_{L^2(\hat{\Omega})} \quad (4.18)$$

με

$$I_h \hat{y} = \hat{y}(0) + \int_0^x c dx = \hat{y}(0) + cx$$

έχουμε:

$$\left(\hat{I}_h \hat{y}\right)(1) = \hat{y}(1) \text{ και } \hat{y} - \hat{I}_h \hat{y} \in H_0^1(\hat{\Omega}) \cap H^2(\hat{\Omega})$$

με βάση την (4.2) θα έχουμε:

$$\|\hat{y} - \hat{I}_h \hat{y}\|_{L^2(\hat{\Omega})} \leq \hat{C} \|\hat{y}' - c\|_{L^2(\hat{\Omega})} = \hat{C} \|\hat{y}' - c\|_{L^2(\hat{\Omega})} \leq \hat{C}^2 \|\hat{y}''\|_{L^2(\hat{\Omega})} \quad (4.19)$$

4.1. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

Αν $\Omega = (0, h)$, $h > 0$ τότε από τις (4.18), (4.19) θα έχουμε:

$$\|y' - (I_h y)'\|_{L^2(0,h)} \leq \hat{C} h \|y''\|_{L^2(0,h)}$$

και

$$\|y - I_h y\|_{L^2(0,h)} \leq \hat{C}^2 h^2 \|y''\|_{L^2(0,h)}$$

$(I_h y)(0) = y(0)$ και $(I_h y)(h) = y(h)$. Αθροίζοντας και υψώνοντας στο τετράγωνο για κάθε Ω_i , καταλήγουμε

$$\|(y - I_h y)^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \hat{C} \sum_{i=1}^{N+1} h_i^{2(l-n)} \|y\|_{L^2(\Omega_i)}^2$$

□

Πρόταση 4.2. Έστω $\Omega = (0, 1)$. Για κάθε $y \in H_0^1(\Omega)$ ισχύει ότι

$$\|y\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \leq 2 \|y\|_{L^2(\Omega)} \|y'\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.20)$$

Απόδειξη. Έστω $y \in H_0^1(\Omega)$ τότε $y = \bar{y} C^0(\Omega)$. Έστω $\xi \in \bar{\Omega}$ τέτοιο ώστε:

$$\|y\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_x |\bar{y}(x)| = |\bar{y}(\xi)|$$

Τότε

$$\begin{aligned} \|y\|_{L^\infty(\Omega)}^2 &= |\bar{y}(\xi)|^2 = |\bar{y}(\xi)^2 - \bar{y}(0)^2| \leq \left| \int_0^\xi (\bar{y}(n)^2)' dn \right| \\ &= 2 \left| \int_0^\xi \bar{y}(n) \bar{y}'(n) dn \right| \leq 2 \|\bar{y}'\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{y}\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 4.1. Έστω $\Omega = (0, 1)$ και $y \in H^2(\Omega)$ στην περίπτωση της ομοιόμορφης διαμέρισης h ισχύει:

$$\|y - I_h y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C h^{\frac{3}{2}} \|y''\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.21)$$

Πόρισμα 4.2. Έστω $\Omega = (0, 1)$ και $y \in W^{2,\infty}(\Omega)$ στην περίπτωση της ομοιόμορφης διαμέρισης h ισχύει:

$$\|y - I_h y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C h^2 \|y\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \quad \text{καθώς } h \rightarrow 0 \quad (4.22)$$

4.2. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

4.1.4 Σύγκλιση της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε την σύγκλιση των πεπερασμένων στοιχείων για προβλήματα παραβολικού τύπου. Δεδομένου της ομοιόμορφης χωρικής διαμέρισης h και χρονικής διαμέρισης $\Delta t = \frac{T}{M}$ θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{y_h^m\}$ συγκλίνει στην ακριβή λύση του (4.9) για $h \rightarrow 0$ και $\Delta t \rightarrow 0$. Ορίζουμε:

$$\|v\|_a = (a(v, v))^{1/2} \quad (4.23)$$

και

$$\|f\|_* = \sup_{v_h \in V_N} \frac{(f, v_h)}{\|v_h\|_a} \quad (4.24)$$

Θεώρημα 4.7. Υποθέτουμε ότι $y \in C^1(\bar{J}, H^2(\Omega)) \cap C^3(\bar{J}, H^{-1}(\Omega))$. Έστω $y^m(x) = y(t_m, x)$ και y_h^m να ορίζεται όπως στην (4.14) τότε έχουμε την ακόλουθη σύγκλιση

$$\|y^M - y_h^M\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{m=0}^{M-1} \|y^{m+\theta} - y_h^{m+\theta}\|_a^2 \leq \quad (4.25)$$

$$Ch^2 \max_{0 \leq t \leq T} \|y(t)\|_{H^2(\Omega)} + Ch^2 \int_0^T \|\vartheta_{tt}y(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \quad (4.26)$$

$$+ C \begin{cases} \Delta t^2 \int_0^T \|\vartheta_{ttt}y(s)\|_*^2 ds & 0 \leq \theta \leq 1 \\ \Delta t^4 \int_0^T \|\vartheta_{ttt}y(s)\|_*^2 ds & \theta = 1/2 \end{cases} \quad (4.27)$$

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [25] (σελίδες 43-45).

Παρατήρηση Βασιζόμενοι στο Θεώρημα (4.6) και τις (4.10)-(4.11) με $C_3 = 0$ η νόρμα $\|\cdot\|_a$ όπως ορίζεται στην (4.23) είναι ισοδύναμη με την αντίστοιχη ενεργειακή νόρμα $\|\cdot\|_V$. Συνεπώς από την (4.25) έχουμε ότι $\|y^M - y_h^M\|_V = \mathcal{O}(h + \Delta t)$. Αντίστοιχα για $\theta \in [0, 1] \setminus \{1/2\}$ ως προς την L^2 νόρμα, λαμβάνουμε την σύγκλιση δευτερης τάξης $\|y^M - y_h^M\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(h^2 + k)$, η οποία όπως παρατηρούμε είναι ίδια με την αντιστοιχη τάξη σύγκλισης για την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, Θεώρημα 3.2.

4.2 Πεπερασμένα Στοιχεία για την Εξίσωση της Θερμότητας

Έστω $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ και $J = (0, T)$ με $T > 0$
Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{στο } J \times \Omega \quad (4.28)$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$y(t, x) = 0 \quad \text{στο } J \times \partial\Omega \quad (4.29)$$

4.2. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

και αρχική συνθήκη:

$$y(0, x) = y_0 \quad \text{στο } \Omega \quad (4.30)$$

Για σταθερό $t \in J$ και $v \in C_0^\infty(\Omega)$ με $v(a) = v(b) = 0$ ολοκληρώνοντας κατά μέλη θα έχουμε:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{\partial y}{\partial t} v dx - \int_a^b \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} v dx = 0 \\ \implies & \frac{d}{dt} \int_a^b y v dx - \left[\frac{\partial y}{\partial x} (x, t) v(x) \right] \Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε ότι:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b y v dx + \int_a^b \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \quad (4.31)$$

Αφού η (4.31) ισχύει $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$ θα ισχύει και για $v \in H_0^1(\Omega)$ αφού το $C_0^\infty(\Omega)$ είναι πυκνό στο $H_0^1(\Omega)$. Συνεπώς η αντίστοιχη ασθενής μορφή είναι:
Βρές $y \in C(J, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(J, L^2(\Omega))$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b y v dx + \int_a^b \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \forall t \in J$$

$$y(0, \cdot) = y_0$$

Με χρήση της διακριτοποίησης Galerkin για τον πεπερασμένο διάστασης χώρο $V_N \subset H_0^1(\Omega)$, καταλήγουμε για $y_h \in C^1(J, V_N)$

$$\frac{d}{dt} \int_a^b y_h v_h dx + \int_a^b \frac{\partial y_h}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial x} = 0$$

$$y_h(0) = y_h^0$$

για

$$y_h(t, x) = \sum_{j=1}^N y_{h,j}(t) \varphi_j(x)$$

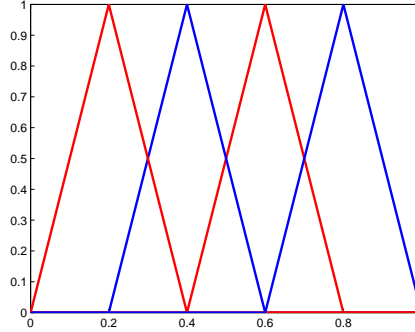
καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_a^b y_h(t, x) v_h(x) dx + \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} y_h(t, x) \frac{\partial v_h}{\partial x}(x) dx \\ \implies & \frac{d}{dt} \int_a^b \sum_{j=1}^N y_{h,j}(t) \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx + \int_a^b \sum_{j=1}^N y_{h,j}(t) \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx = 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$\sum_{j=1}^N \dot{y}_{h,j} \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx + \sum_{j=1}^N y_{h,j} \int_a^b \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx = 0$$

4.2. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ



Σχήμα 4.1: Συναρτήσεις Στέγες

Σε μορφή πινάκων έχουμε την ακόλουθη ημιδιακριτή μορφή:
Βρες $y_h \in C^1(J, \mathbb{R}^N)$ για $t \in J$ τέτοιο ώστε:

$$B\dot{y}_h + Ay_h = 0$$

με αρχική συνθήκη:

$$y_h(0) = y_0$$

Πάιρνοντας ως βάση τις συναρτήσεις στέγες $V_N = \text{span} \{\varphi_i(x) : i = 1, 2, \dots, N\}$, βλέπε Σχήμα 4.1 θα έχουμε:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-1})}{h_i} & \text{για } \Omega_i \\ \frac{(x_{i+1}-x)}{h_{i+1}} & \text{για } \Omega_{i+1} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (4.32)$$

και αντίστοιχα:

$$\varphi'_i(x) = \begin{cases} 1/h_i & \text{για } \Omega_i \\ -1/h_{i+1} & \text{για } \Omega_{i+1} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (4.33)$$

Για τον υπολογισμό των στοιχείων των πινάκων A και B θα έχουμε:

$$A_{ii} = \int_a^b \varphi_i'^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i'^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i'^2 dx \approx \frac{h_i}{h_i^2} + \frac{(-1)^2 h_{i+1}}{h_{i+1}^2} = \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}$$

$$A_{i,i+1} = \int_a^b \varphi_i' \varphi_{i+1}' dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i' \varphi_{i+1}' dx = \frac{(-1)h_{i+1}}{h_{i+1}^2} = -\frac{1}{h_{i+1}}$$

Όμοια για τα στοιχεία του πίνακα B θα έχουμε:

$$B_{ii} = \int_a^b \varphi_i \varphi_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^2 dx = \frac{0 + 4(1/2)^2 + 1}{6} h_i + \frac{1 + 4(1/2)^2 + 0}{6} h_{i+1} = \frac{h_i}{3} + \frac{h_{i+1}}{3}$$

4.3. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΠΑΡΑΓΩΓΟ

$$B_{i,i+1} = \int_a^b \varphi_i \varphi_{i+1} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i \varphi_{i+1} dx = \frac{0 + 4(1/2)^2 + 0}{6} h_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{6}$$

Συνεπώς οι A και B πίνακες έχουν την ακόλουθη δομή:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2} & & \\ -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} & & \\ & & \ddots & -\frac{1}{h_{N-1}} \\ & & -\frac{1}{h_N} & \frac{1}{h_{N-1}} + \frac{1}{h_N} \end{pmatrix}$$

και

$$B = \begin{pmatrix} \frac{h_1}{3} + \frac{h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & & \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2}{3} + \frac{h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & \\ & & \ddots & \frac{h_{N-1}}{6} \\ & & \frac{h_N}{6} & \frac{h_{N-1}}{3} + \frac{h_N}{3} \end{pmatrix}$$

Με χρήση ομοιόμορφης διαμέρισης $x_i = a + ih$ $i = 1, 2, \dots, N$ και $h = \frac{(b-a)}{(N+1)}$ η δομή των πινάκων A και B είναι η ακόλουθη:

$$B = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

και

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

Διακριτοποιώντας και ως προς τον χρόνο για $t_m = m\Delta t$ με $\Delta t = \frac{T}{M}$ και εισάγοντας την παράμετρο $\theta \in (0, 1)$ θα έχουμε:

$$(B + \theta\Delta t A) y_h^{m+1} = (B - (1 - \theta)\Delta t A) y_h^m \quad (4.36)$$

με αντίστοιχη αρχική συνθήκη:

$$y_h^0 = y_0$$

4.3 Πεπερασμένα Στοιχεία για το Αμερικάνικο Παράγωγο

Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε την τιμολόγηση Αμερικάνικων παράγωγων με χρήση πεπερασμένων στοιχείων.

4.3. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΠΑΡΑΓΩΓΟ

Έστω $\Omega = [x_{min}, x_{max}]$ και $J = (0, T)$. Ορίζουμε:

$$\mathcal{K} = \{v \in H^1(\Omega) : (\tau, x) \geq g(\tau, x) \ v(0, x) = g(0, x) \ v(\tau, x_{min}) = g(\tau, x_{min}), \ v(\tau, x_{max}) = g(\tau, x_{max})\}$$

και για $p(\tau, x) := y(\tau, x) - g(\tau, x)$ θα έχουμε:

$$\mathcal{K}_\Omega = \{p \in H_0^1(\Omega) : p(\tau, x) \geq g(\tau, x), \ p(\tau, x_{min}) = p(\tau, x_{max}) = 0\}$$

Έστω $y \in \mathcal{K}$ η ακριβής λύση για το γραμμικό συμπληρωματικό πρόβλημα. Δεδομένου ότι $v \in \mathcal{K}$ με $v \geq g$ θα έχουμε:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \geq 0 \quad v \geq g$$

Για το οποίο θα έχουμε:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) (v - g) dx \geq 0 \quad (4.37)$$

αντίστοιχα από το συμπληρωματικό πρόβλημα έχουμε:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) (y - g) dx = 0 \quad (4.38)$$

Αφαιρώντας τις (4.37), (4.38) καταλήγουμε:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) (v - y) dx \geq 0 \quad (4.39)$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\frac{\partial y}{\partial \tau} (v - y) + \frac{\partial y}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right) dx - \frac{\partial y}{\partial x} (v - y) \Big|_{x_{min}}^{x_{max}} \geq 0$$

Οι μη ολοκληρωτέοι όροι μηδενίζονται στα σύνορα x_{min}, x_{max} αφού έχουμε $v = g$ και $y = g$

Συνεπώς καταλήγουμε:

$$J(y, v) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\frac{\partial y}{\partial \tau} (v - y) + \frac{\partial y}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right) dx \geq 0$$

Για $v = g$ το ολοκλήρωμα παίρνει την ελάχιστη τιμή, δηλαδή:

$$\min_{v \in \mathcal{K}} J(y, v) = J(y, y) = 0$$

Προσέγγιζοντας με χρήση της μεθόδου Galerkin για

$$y_h(\tau, x) = \sum_{i=1}^N y_{h,i}(\tau) \varphi_i(x)$$

4.3. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΠΑΡΑΓΩΓΟ

και

$$v_h(\tau, x) = \sum_{i=1}^N v_{h,j}(\tau) \varphi_i(x)$$

καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\sum_{i=0}^N \frac{\partial y_{h,i}}{\partial \tau} \varphi_i \sum_{j=0}^N (v_{h,j} - y_{h,j}) \varphi_j \right) dx + \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\sum_{i=0}^N y_{h,i} \varphi_i' \sum_{j=0}^N (v_{h,j} - y_{h,j}) \varphi_j' \right) dx \\ & \Leftrightarrow \sum_{i,j=0}^N \frac{\partial y_{h,i}}{\partial \tau} (v_{h,j} - y_{h,j}) \int_{x_{min}}^{x_{max}} \varphi_i \varphi_j dx + \sum_{i,j=0}^N y_{h,i} (v_{h,j} - y_{h,j}) \int_{x_{min}}^{x_{max}} \varphi_i' \varphi_j' dx \geq 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Στο σημείο αυτό πρώτου προχωρήσουμε στον υπολογισμό των στοιχείων, παρουσιάζουμε την μεταβολική μορφή του προβλήματος.

Ασθενής Μορφή Βρες $y \in \mathcal{K}_\Omega$ τέτοιο ώστε:

$$\left\langle \frac{\partial y}{\partial \tau}, p - y \right\rangle + a(y, p - y) \geq f(p - y) \quad \forall p \in \mathcal{K}_\Omega \quad (4.41)$$

όπου $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ και $f : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ και ορίζονται ως ακολούθως:

$$a(y, p) := \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

και

$$f(y) = - \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{\partial g}{\partial \tau} y + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} dx$$

Ο $a(\cdot, \cdot)$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, τότε βασιζόμενοι στο [10] (Κεφάλαιο IV σελίδα 145 Θεώρημα V.11) θα έχουμε μοναδική λύση.

Η ημιδιακριτή μορφή της (4.41) είναι

Βρες $y^{(\nu+1)} \in \mathcal{K}_\Omega$ τέτοιο ώστε

$$a\left(y^{(\nu+1)}, p - u^{(\nu+1)}\right) \geq f^{(\nu)}(p - y^{(\nu+1)}) \quad (4.42)$$

όπου

$$a = \int_{x_{min}}^{x_{max}} (yp + \theta \Delta \tau \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x}) dx$$

και

$$f^{(\nu)} = \Delta \tau f(p) + \int_{x_{min}}^{x_{max}} y^{(\nu)} p - \left((1 - \theta) \Delta \tau \frac{\partial y^{(\nu)}}{\partial x} \right) \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

Διακριτοποιώντας και τον χώρο με χρήση της μεθόδου Galerkin καταλήγουμε στο ακόλουθο διακριτό πρόβλημα: Βρες $y_h^{(\nu)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ τέτοιο ώστε για $\nu = 0, 1, 2, \dots$

$$\left(v - y_h^{(\nu)} \right) \left(C y_h^{(\nu+1)} - b^{(\nu)} \right) \geq 0$$

4.3. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΠΑΡΑΓΩΓΟ

όπου $C = B + \theta \Delta \tau A$ με $A_{ij} = \int \varphi'_i \varphi'_j dx$ και $B_{ij} = \int \varphi_i \varphi_j dx$ και

$$r^\nu = - \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\frac{\partial g}{\partial \tau}(x, \tau_\nu) \varphi_i + \frac{\partial g}{\partial x} \varphi_i \right) dx$$

Επιστρέφουμε τώρα στην (4.40) το οποίο είναι ισοδύναμο με:

$$\left(\frac{\partial y_h}{\partial \tau} \right)^T B(v - y_h) + y_h^T A(v - y_h) \geq 0$$

ή

$$(v - y_h)^T \left(B \frac{\partial y_h}{\partial \tau} + A y_h \right) \geq 0$$

Λόγω των συνοριακών συνθηκών που υπάρχουν στο Αμερικάνικο παράγωγο, η δομή των πινάκων δεν είναι ίδια ακριβώς με αυτή της εξίσωσης της θερμότητας, αλλά διαφέρει η δομή τους στο πρώτο και το τελευταίο στοιχείο δηλαδή:

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

και

$$B = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

Διακριτοποιώντας και ως προς τον χρόνο και εισάγοντας και την παράμετρο $\theta \in [0, 1]$ καταλήγουμε:

$$\left(v^{(\nu+1)} - y_h^{(\nu+1)} \right)^T \left[B \frac{y_h^{(\nu+1)} - y_h^{(\nu)}}{\Delta \tau} + \theta A y_h^{(\nu+1)} + (1 - \theta) A y_h^{(\nu)} \right] \geq 0$$

Εναλλάσσοντας του όρους καταλήγουμε:

$$\left(v^{(\nu+1)} - y_h^{(\nu+1)} \right)^T \left((B + \Delta \tau \theta A) y_h^{(\nu+1)} + (\Delta \tau (1 - \theta) A - B) y_h^{(\nu)} \right) \geq 0$$

Εισάγοντας και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες $d^{(\nu)}$ θα έχουμε:

$$C = B + \Delta \tau \theta A \quad (4.45)$$

και

$$b^{(\nu)} = (B - \Delta \tau (1 - \theta) A) y_h^{(\nu)} + d^{(\nu)} \quad (4.46)$$

4.3. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΠΑΡΑΓΩΓΟ

όπου:

$$d^{(\nu)} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{h}{6} + \theta\Delta\tau\frac{1}{h}\right) g_0^{(\nu+1)} + \left(-\frac{h}{6} + \theta\Delta\tau\frac{1}{h}\right) g_0^{(\nu)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \left(-\frac{h}{6} + \theta\Delta\tau\frac{1}{h}\right) g_m^{(\nu+1)} + \left(-\frac{h}{6} + \theta\Delta\tau\frac{1}{h}\right) g_m^{(\nu)} \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Συνεπώς καταλήγουμε στο ακόλουθο γραμμικό συμπληρωματικό πρόβλημα:
Για $\nu = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} Cy_h^{(\nu+1)} \geq b^{(\nu)} \\ v^{(\nu+1)} \geq g^{(\nu+1)} \\ \left(v^{(\nu+1)} - y_h^{(\nu+1)}\right)^T \left(Cy_h^{(\nu+1)} - b^{(\nu)}\right) = 0 \end{cases} \quad v \geq g \quad (4.48)$$

Θεώρημα 4.8. Η λύση του προβλήματος της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, (4.48) είναι ισοδύναμη με αυτή της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών, (3.38)

Απόδειξη. Πεπερασμένες Διαφορές \implies Πεπερασμένα Στοιχεία

Έστω $y_i^{(\nu)}$ η διακριτή λύση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών, με $y^{(\nu+1)} \geq g^{(\nu+1)}$ και

$$\begin{aligned} & \left(v^{(\nu+1)} - y^{(\nu+1)}\right) \left(Cy^{(\nu+1)} - b^{(\nu)}\right) \\ &= \left(v^{(\nu+1)} - g^{(\nu+1)}\right)^T \underbrace{\left(Cy^{(\nu+1)} - b^{(\nu)}\right)}_{\geq 0} - \underbrace{\left(v^{(\nu+1)} - g^{(\nu+1)}\right)^T \left(Cy^{(\nu+1)} - b^{(\nu)}\right)}_{=0} \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\left(v^{(\nu+1)} - y^{(\nu+1)}\right)^T \left(Cy^{(\nu+1)} - b^{(\nu)}\right) \geq 0 \quad \forall v \geq g$$

Το οποίο είναι ισοδύναμο με τη μορφή των πεπερασμένων στοιχείων.

Πεπερασμένα Στοιχεία \implies Πεπερασμένες Διαφορές

Έστω y_h λύση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, με $y_h \geq g$ και

$$v^{(\nu+1)T} \left(Cy_h^{(\nu+1)} - b^{(\nu)}\right) \geq y_h^{(\nu+1)T} \left(Cy_h^{(\nu+1)} - b^{(\nu)}\right) \quad \forall v \in \mathcal{K}$$

Υποθέτουμε ότι το k -στοιχείο του $Cy_h^{(\nu+1)} - b^{(\nu)}$ είναι αρνητικό και v_k αρκετά μεγάλο. Τότε το αριστερό τμήμα γίνεται αυθαίρετα μικρό, το οποίο αντιτίθεται με το $y_h^{(\nu+1)} \geq g^{(\nu+1)}$, συνεπώς

$$Cy_h^{(\nu+1)} - b^{(\nu)} \geq 0$$

Για $y_h^{(\nu+1)} \geq g^{(\nu+1)}$ θα έχουμε

$$\left(y_h^{(\nu+1)} - g^{(\nu+1)}\right)^T \left(Cy_h^{(\nu+1)} - b^{(\nu)}\right) \geq 0$$

4.3. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΠΑΡΑΓΩΓΟ

θέτωντας $v = g$ για την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων καταλήγουμε

$$\left(y_h^{(\nu+1)} - g^{(\nu+1)}\right)^T \left(Cy_h^{(\nu+1)} - b^{(\nu)}\right) \leq 0$$

Συνεπώς

$$\left(y_h^{(\nu+1)} - g^{(\nu+1)}\right)^T \left(Cy_h^{(\nu+1)} - b^{(\nu)}\right) = 0$$

το οποίο έχει ακριβώς την ίδια μορφή με το (3.38) □

Συνεπώς με βάση τα ανωτέρω και δεδομένου ότι ο πίνακας C της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι θετικά ορισμένος, και βασιζόμενοι στο Θεώρημα 3.3 τότε η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων θα έχει μοναδική λύση.

Βασιζόμενοι στο [10] (σελίδες 145-146) για την αντίστοιχη σύγκλιση θα έχουμε:

$$\max_{\nu} \|y^{(\nu)} - y_h^{(\nu)}\|_{L^2(\Omega)} + \Delta\tau \left(\sum_{\nu=1}^M \|y^{(\nu)} - y_h^{(\nu)}\|_{H^{1,2}(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(h + \Delta\tau^{1/2}) \quad (4.49)$$

Όπως και στις πεπερασμένες διαφορές η επίλυση του (4.48) γίνεται με χρήση της επαναληπτικής μεθόδου PSOR.

Τέλος για χρήση υψηλότερης τάξης στοιχείων, για χρήση τετραγωνικών συναρτήσεων παραπέμπουμε στην Ενότητα 7.1.3, ενώ για χρήση των cubic spline στοιχείων παραπέμπουμε στο [35]. Στο [12] γίνεται χρήση των πολυωνύμων Hermite ως στοιχεία υψηλότερης ακρίβειας για την τιμολόγηση των Ευρωπαϊκών παραγώγων το οποίο μπορεί να επεκταθεί και για την τιμολόγηση των Αμερικάνικων παραγώγων. Στο [6] γίνεται χρήση των wavelets στοιχείων για την τιμολόγηση των Αμερικάνικων παραγώγων.

Κεφάλαιο 5

Επαναληπτικές Μέθοδοι για την Εξίσωση Black and Scholes

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε τους αλγόριθμους επίλυσης της εξίσωσης διάχυσης για το Ευρωπαϊκό και το Αμερικάνικο παράγωγο. Για το Ευρωπαϊκό παράγωγο κάνουμε χρήση του αλγορίθμου SOR και αντίστοιχα για το Αμερικάνικο του PSOR.

Οι επαναληπτικές μέθοδοι αναζητούν λύση για το γραμμικό σύστημα μετά από έναν άπειρο αριθμό επαναλήψεων. Στην περίπτωση όπου ο πίνακας είναι αραιός το υπολογιστικό κόστος είναι $\frac{2}{3}n^2$ έναντι n^2 για τις άμεσες μεθόδους (ανάλυση LU, ανάλυση Choleski, απαλοιφή Gauss).

5.1 Σύγκλιση των Επαναληπτικών Μεθόδων

Η βασική ιδέα των επαναληπτικών μεθόδων τίθεται στην κατασκευή μιας ακολουθίας διανυσμάτων $x^{(k)}$ που συγκλίνουν στη λύση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} \quad (5.1)$$

Στις αριθμητικές εφαρμογές οι επαναληπτικές μέθοδοι σταματούν σε έναν πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων, επιπλέον επειδή η ακριβής λύση δεν είναι διαθέσιμη, είναι σημαντικό να εισάγουμε κριτήρια τερματισμού στον αλγόριθμο μας. Συνεπώς

$$\|x^{(n)} - x\| < \varepsilon \quad (5.2)$$

Όπου ε το αντίστοιχο κριτήριο τερματισμού, n ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων και $\|\cdot\|$ η αντίστοιχη διανυσματική νόρμα. Για την εκκίνηση του αλγορίθμου μας

5.2. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Ξεκινάμε με ένα δοθέν $x^{(0)}$ και τον επαναληπτικό πίνακα B και έχουμε την ακόλουθη επαναληπτική δομή:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \quad (5.3)$$

όπου f ένα διάνυσμα προερχόμενο από το b του αρχικού γραμμικού συστήματος

$$Ax = b \quad (5.4)$$

Ορισμός 5.1. Μια επαναληπτική μέθοδος της μορφής (5.3) καλείται συνεπής ως προς την (5.4) αν για τα f και B ισχύει: $x = Bx + f$ ή ισοδύναμα $f = (I - B)A^{-1}b$ όπου A ο πίνακας του γραμμικού συστήματος $Ax = b$ και συμβολίζοντας με $e^{(k)} = x^{(k)} - x$ το σφάλμα της k επανάληψης από την συνθήκη σύγκλισης (5.1) απαιτούμε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = 0$$

για οποιαδήποτε αρχική επιλογή $x^{(0)}$

Θεώρημα 5.1. Έστω η (5.3) συνεπής μέθοδος ως προς την (5.4), τότε η ακολουθία των διανύσμων $x^{(k)}$ συγκλίνει στη λύση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$ για οποιαδήποτε αρχική επιλογή $x^{(0)}$ αν και μόνο αν

$$\rho(B) < 1$$

όπου $\rho(B)$ η αντίστοιχη φασματική ακτίνα για τον επαναληπτικό πίνακα B .

Απόδειξη. Από την σχέση $e^{(k)} = x^{(k)} - x$ έχουμε ότι $e^{(k+1)} = Be^{(k)}$ αναδρομικά θα έχουμε: $e^{(k)} = B^k e^{(0)} \forall k = 0, 1, \dots$ Συνεπώς έχουμε ότι:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B^k e^{(0)} = 0$$

για οποιαδήποτε $e^{(0)}$ αν $\rho(B) < 1$.

Αντίστροφα αν $\rho(B) > 1$ τότε θα υπάρχει μία τουλάχιστον ιδιοτιμή $|\lambda| > 1$. Έστω $e^{(0)}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή αυτή, τότε $Be^{(0)} = \lambda e^{(0)}$ και έτσι $e^{(k)} = \lambda^k e^{(0)}$. Συνεπώς $e^{(k)} \not\rightarrow 0$ αφού $|\lambda| > 1$

5.2 Γραμμικές Επαναληπτικές Μέθοδοι

Μια γενική τεχνική για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος, βασίζεται στον διαχωρισμό του πίνακα του γραμμικού συστήματος A στη μορφή $A = P - N$ όπου P και N καταλληλοι πίνακες ο πίνακας P καλείται preconditioner matrix. Για δοθέν $x^{(0)}$ μπορούμε να υπολογίσουμε το $x^{(k)}$ λύνοντας την παρακάτω ακολουθία γραμμικών συστημάτων:

$$Px^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \quad (5.5)$$

ο επαναληπτικός πίνακας για την (5.5) είναι ο $B = P^{-1}N$ και αντίστοιχα $f = P^{-1}b$ το αντίστοιχο διάνυσμα για την επαναληπτική μέθοδο. Η (5.5) μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + P^{-1}r^{(k)} \quad (5.6)$$

5.3. ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ JACOBI-GAUSS-SEIDEL ΚΑΙ ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΧΑΛΑΡΩΣΗΣ SOR-PSOR

όπου $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ και υποδηλώνει το υπόλοιπο (residual) της μεθόδου ύστερα από k -βήματα

Ιδιότητα 5.1. Έστω $A = P - N$ με A και P συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι πίνακες. Αν ο $2P - A$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας τότε η επαναληπτική μέθοδος (5.6) συγκλίνει για οποιαδήποτε αρχική επιλογή $x^{(0)}$ και

$$\rho(B) = \|B\|_A = \|B\|_P < 1$$

Επιπλέον η σύγκλιση της επαναληπτικής μεθόδου είναι μονότονη ως προς τις νόρμες $\|\cdot\|_P$ και $\|\cdot\|_A$ αντίστοιχα δηλαδή $\|e^{(k+1)}\|_P < \|e^{(k)}\|_P$ και $\|e^{(k+1)}\|_A < \|e^{(k)}\|_A \forall k = 0, 1, \dots$

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [53] (σελίδες 223-224, Θεώρημα 6.2.5, Πρόσχημα 6.2.5)

Ιδιότητα 5.2. Έστω $A = P - N$ με A συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας. Αν ο $P + P^T - A$ είναι θετικά ορισμένος πίνακας τότε ο P είναι αντιστρέψιμος και η επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει μονότονα ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_A$ και $\rho(B) \leq \|B\|_A < 1$.

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [53] (σελίδα 225, Θεώρημα 6.2.7)

5.3 Οι μέθοδοι Jacobi-Gauss-Seidel και οι Μέθοδοι Χάλαρωσης SOR-PSOR

Στην περίπτωση όπου τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα A είναι μη μηδενικά μπόρουμε να έχουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j \right]$$

Jacobi

Για την μέθοδο Jacobi έχουμε:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

Για επαναληπτική μέθοδο Jacobi έχουμε $A = P - N$ όπου $P = D$ και $N = D - A = E + F$ με D ο πίνακας με στοιχεία τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα A , E ο άνω τριγωνικός και F ο κάτω τριγωνικός πίνακας του A αντίστοιχα. Ο αντίστοιχος επαναληπτικός πίνακας της Jacobi είναι:

$$B_j = D^{-1} (E + F) = I - D^{-1}A \quad (5.7)$$

5.3. ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ JACOBI-GAUSS-SEIDEL ΚΑΙ ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΧΑΛΑΡΩΣΗΣ SOR-PSOR

Gauss-Seidel

Αντίστοιχα για τη μέθοδο Gauss-Seidel έχουμε:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

Αντίστοιχα για το διαχωρισμό του πίνακα A θα έχουμε $P = D - E$ και $N = F$ και ο αντίστοιχος επαναληπτικός πίνακας θα είναι:

$$B_{GS} = (D - E)^{-1} F \quad (5.8)$$

Θεώρημα 5.2. *Αν ο πίνακας A έχει αυστηρά διαγώνεια υπεροχή τότε η Jacobi και η Gauss Seidel μέθοδοι συγκλίνουν.*

Απόδειξη. Για την μέθοδο Jacobi, αν ο A έχει αυστηρά διαγώνεια υπεροχή κατα γραμμές δηλαδή $|a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ $i = 1, \dots, N$ τότε

$$\max_{1 \leq i \leq N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \|B_j\|_{\infty} < 1$$

και συνεπώς $\|B_j\|_{\infty} < 1$ αφού η ακολουθία της επαναληπτικής μεθόδου συγκλίνει για οποιαδήποτε x_0 βλέπε [34] (Κεφάλαιο 1 Πόρισμα 1 σελίδες 41-42) . Αντίστοιχα για την μέθοδο Gauss-Seidel θα δείξουμε ότι $\|B_{GS}\| < \|B_j\| < 1$. Από την διαγώνεια υπεροχή του A ισχύει

$$\|B_j\|_{\infty} = \max_i \sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$$

Για $u \in \mathbb{R}^N$ με $\|u\|_{\infty} = 1$, και θέτοντας $v = (D - E)^{-1} Fu = B_{GS} u$ έχουμε

$$v_i = - \sum_{j < i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} v_j - \sum_{j > i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} u_j$$

Θα δείξουμε πρώτα με επαγωγή ότι

$$|v_i| \leq \|B_j\|_{\infty} \quad \text{για } i = 1, \dots, N$$

Για $i = 1$ ισχύει

$$|v_1| \leq \sum_{j > 1} \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} \right| |u_j| \leq \|u\|_{\infty} \sum_{j > 1} \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} \right| \leq \|B_j\|_{\infty}$$

Ας υποθέσουμε ότι για i σταθερό και $j < i$, $|v_j| \leq \|B_j\| \leq 1$. Τότε

$$|v_i| \leq \sum_{j > i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| |v_j| + \sum_{j > i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| |u_j|$$

5.3. ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ JACOBI-GAUSS-SEIDEL ΚΑΙ ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΧΑΛΑΡΩΣΗΣ SOR-PSOR

$$\begin{aligned} &\leq (\max_{j < i} |v_j|) \sum_{j < i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| + \|u\|_\infty \sum_{j > i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \\ &\leq \sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \leq \|B_J\|_\infty \end{aligned}$$

Επομένως

$$\|v\|_\infty = \|B_{GS}u\|_\infty \leq \|B_J\|_\infty$$

για κάθε u , με $\|u\|_\infty = 1$ και άρα

$$\|B_{GS}\|_\infty = \max_{\|u\|=1} \|B_{GS}u\|_\infty \leq \|B_J\|_\infty < 1$$

Συνεπώς η μέθοδος Gauss Seidel συγκλίνει. Επιπλέον έχουμε την ακόλουθη εκτιμήση σφάλματος

$$\begin{aligned} \|x_k - x\|_\infty &\leq \frac{\|B_{GS}\|_\infty}{1 - \|B_{GS}\|_\infty} \|x_k - x_{k-1}\| \\ &\leq \frac{\|B_J\|_\infty}{1 - \|B_J\|_\infty} \|x_k - x_{k-1}\| \end{aligned}$$

□

SOR

Εισάγωντας μια παράμετρο χαλάρωσης ω στην μέθοδο Gauss-Seidel λαμβάνουμε την μέθοδο SOR.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=i-1}^n a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right] + (1-\omega)x_i^{(k)} \quad (5.9)$$

το οποίο μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$(I - \omega D^{-1}E)x^{(k+1)} = [(1-\omega)I + \omega D^{-1}F]x^{(k)} + \omega D^{-1}b$$

Συνεπώς αντίστοιχος επαναληπτικός πίνακας της μέθοδο SOR είναι:

$$B(\omega) = (I - \omega D^{-1}E)^{-1} [(1-\omega)I + \omega D^{-1}F]$$

PSOR

Για γραμμικά συμπληρωματικά προβλήματα (Linear Complementarity Problems) όπως παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για το Αμερικάνικο παράγωγο για την επίλυση τους κάνουμε χρήση του αλγορίθμου PSOR. Σε κάθε χρονικό βήμα επιλύουμε ένα ανισωτικό γραμμικό σύστημα.

$$x \geq g \quad (5.10)$$

5.3. ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ JACOBI-GAUSS-SEIDEL ΚΑΙ ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΧΑΛΑΡΩΣΗΣ SOR-PSOR

Αλγόριθμος 5.3.1 Ο αλγόριθμος της PSOR

1: $x_0 \geq g$
 2: **for** $k = 0, 1, \dots$ **do**
 for $i = 0, 1, \dots, N$ **do**

3:

$$\hat{x}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij} x_j^{(k)} \right] \quad (5.13)$$

5:

$$x_i^{(k+1)} = \max \left\{ g_i, x_i^{(k)} + \omega \left(\hat{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right) \right\} \quad (5.14)$$

6: Next i
 7: **end for**
 8: **if** $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_2 < \varepsilon$ **then**
 9: Stop
 10: **else**
 11: Next k
 12: **end if**
 13: **end for**

$$Ax \geq b \quad (5.11)$$

$$(x - g)^T (Ax - b) = 0 \quad (5.12)$$

Το ανωτέρω πρόβλημα επιλύθηκε από τον αλγόριθμο του Ceyer κάνοντας χρήση της PSOR (projected successive overrelaxation) μεθόδου, όπου οι πίνακες A είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι. Ωστόσο σε πολλές εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά ο πίνακας A δεν είναι συμμετρικός, έχει αποδειχθεί όμως ότι ο αλγόριθμος είναι αποδοτικός ακόμα και για την περίπτωση μη συμμετρικών πινάκων που είναι όμως θετικά ορισμένοι. Ο αλγόριθμος για την μέθοδο PSOR είναι ο ακόλουθος:

Από τον αλγόριθμο παρατηρούμε ότι αν αντικαταστήσουμε τη σχέση:

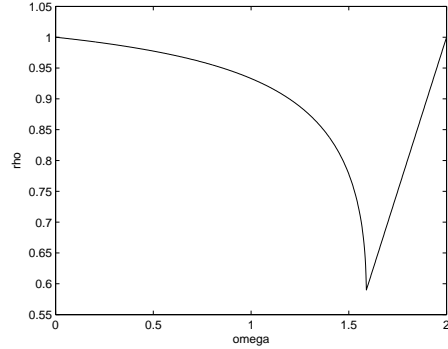
$$x_i^{(k+1)} = \max \left\{ g_i, x_i^{(k)} + \omega \left(\hat{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right) \right\}$$

με την

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \left(\hat{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right)$$

έχουμε τον αλγόριθμο της SOR που περιγράψαμε ανωτέρω. Υπενθυμίζουμε ότι για το Ευρωπαϊκό παράγωγο γίνεται η χρήση του αλγορίθμου SOR, ενώ στο Αμερικάνικο γίνεται χρήση του αλγορίθμου PSOR. Αυτό φανερώνει τη σχέση ανάμεσα στο Ευρωπαϊκό και στο Αμερικάνικο παράγωγο, όπου το Αμερικάνικο παράγωγο ασκείται σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή έναντι του Ευρωπαϊκού το οποίο ασκείται μόνο στον χρόνο ωρίμανσης.

5.4. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΧΑΛΑΡΩΣΗΣ



Σχήμα 5.1: Γραφική αναπαράσταση των βέλτιστων ω για την επαναληπτική μέθοδο SOR

5.4 Σύγκλιση των Μεθόδων Χαλάρωσης

Θεώρημα 5.3. Για οποιοδήποτε $\omega \in \mathbb{R}$ ισχύει $\rho(B(\omega)) \geq |\omega - 1|$ η SOR συγκλίνει ενώ αποτυγχάνει να συγκλίνει για $\omega \leq 0$ ή $\omega \geq 2$

Απόδειξη. Έστω $\{\lambda_i\}$ οι ιδιοτιμές του επαναληπτικού πίνακα της SOR μεθόδου τότε:

$$\left| \prod_{i=1}^n \lambda_i \right| = \left| \det([1 - \omega]I + \omega D^{-1}F) \right| = |1 - \omega|^n$$

Συνεπώς θα πρέπει μία τουλάχιστον ιδιοτιμή $|\lambda_i| > |1 - \omega|$. Για να υπάρχει σύγκλιση θα πρέπει να έχουμε $|1 - \omega| < 1$, δηλαδή: $0 < \omega < 2$ □

Ιδιότητα 5.3. (Ostrowski) Αν ο A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας τότε η SOR μέθοδος συγκλίνει αν $0 < \omega < 2$. Επιπλέον η σύγκλιση είναι μονότονη ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_A$. Τέλος αν ο A έχει αυστηρή κυρίαρχη διαγώνιο η SOR συγκλίνει για $0 < \omega < 1$.

Το Σχήμα 5.1 απεικονίζει τις βέλτιστες τιμές του ω για την μέθοδο SOR. Μια καλή επιλογή για τον αλγόριθμο της SOR είναι για $\omega \in [1.1, 1.6]$, όμοια και για την μέθοδο PSOR κάνουμε χρήση των ίδιων τιμών. Για την τιμολόγηση των Αμερικάνικων παραγωγών επιλέγουμε $\omega = 1.15, 1.3$.

Ιδιότητα 5.4. Αν ο A έχει την A -ιδιότητα και ο επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου Jacobi B_J έχει πραγματικές ιδιοτιμές τότε η SOR συγκλίνει για οποιοδήποτε επιλογή του $x^{(0)}$ αν $\rho(B_J) < 1$ και $0 < \omega < 2$. Επιπλέον ισχύει:

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B_J)^2}}$$

5.4. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΧΑΛΑΡΩΣΗΣ

και η αντίστοιχη ασυμπτωτική σύγκλιση

$$\rho(B(\omega_{opt})) = \frac{1 - \sqrt{1 - \rho(B_j)^2}}{1 + \sqrt{1 - \rho(B_j)^2}}$$

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [53] (σελίδες 241-243).

Στη συνέχεια παραθέτουμε την σύγκλιση της επαναληπτικής μεθόδου PSOR.

Θεώρημα 5.4. (Θεώρημα του Cragg) Έστω $A \in \mathbb{R}^{N-1 \times N-1}$ συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας $b, g \in \mathbb{R}^{N-1}$ και $0 < \omega < 2$ τότε η ακολουθία $(x^{(k)})_k$ που ορίζεται από τον Αλγόριθμο 1 συγκλίνει μοναδικά στη λύση του γραμμικού συμπληρωματικού προβλήματος

$$(x - g)^T (Ax - b) = 0, \quad Ax - b \geq 0 \quad x - g \geq 0 \quad (5.15)$$

Παρατήρηση Το θεώρημα ισχυρίζεται επίσης ότι το γραμμικό συμπληρωματικό πρόβλημα (5.15) έχει μοναδική λύση. Η μοναδικότητα βασίζεται στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 5.1. Το γραμμικό συμπληρωματικό πρόβλημα (5.15) και το

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}^{N-1} \quad \mu \in x \geq g \quad \mu \in \\ J(x) = \min_{u \geq g} J(u) \end{aligned} \quad (5.16)$$

όπου $J(u) = \frac{1}{2} u^T A u - b^T u$ είναι ισοδύναμα.

Απόδειξη. Έστω $x \geq g$ τότε

$$\begin{aligned} J(u) - J(x) &= \frac{1}{2} (u - x)^T A (u - x) - (Ax - b)^T (x - g) + (u - g)^T (Ax - b) \\ &\geq -(Ax - b)^T (x - g) + (u - g)^T (Ax - b) \end{aligned}$$

και αφού ο A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, και δεδομένου $u - g \geq 0$

$$\geq 0$$

Έστω τώρα x η λύση του (5.16) και από υπόθεση έχουμε $x - g \geq 0$ θα δείξουμε ότι $Ax - b \geq 0$.

Ορίζουμε $u = x + \varepsilon e_k$ όπου $\varepsilon > 0$ και $e_k \in \mathbb{R}^{N-1}$ διάνυσμα που λαμβάνει την τιμή 1 στην θέση k . Για $u \geq x \geq g$ και

$$\begin{aligned} 0 \leq J(u) - J(x) &= \varepsilon e_k^T A x + \frac{1}{2} \varepsilon^2 e_k^T A e_k - \varepsilon b^T e_k \\ &= \varepsilon (Ax - b)_k + \frac{\varepsilon^2}{2} a_{kk} < 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Διαιρώντας με $\varepsilon > 0$ και παίρνοντας όριο καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ καταλήγουμε $0 \leq (Ax - b)_k \quad \forall k$ και συνεπώς $(Ax - b) \geq 0$. Απομένει να δείξουμε

5.4. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΧΑΛΑΡΩΣΗΣ

ότι $(Ax - b)(x - g) = 0$. Υποθέτουμε ότι $(Ax - b)_k > 0$ και $x_k > g_k$ για κάποιο k . Επιλέγοντας $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $u := x - \varepsilon e_k$, τότε

$$0 \leq J(u) - J(x) = -\varepsilon(Ax - b)_k + \frac{\varepsilon^2}{2} a_{kk} < 0$$

$\forall \varepsilon$ με $\varepsilon \rightarrow 0$ και συνεπώς $(Ax - b)^T(x - g) = 0$ □

Απόδειξη (Θεωρήματος Coyer). Αρχικά θα αποδείξουμε τη μοναδικότητα της λύσης του (5.15). Απο την (5.16) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 &= J(x_1) - J(x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^T A(x_1 - x_2) - (Ax_2 - b)^T(x_2 - g) + (x_1 - g)^T(Ax_2 - b) \\ &= \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^T A(x_1 - x_2) + (x_1 - g)^T(Ax_2 - b) \\ &\geq (x_1 - x_2)^T A(x_1 - x_2) \geq 0 \end{aligned}$$

και αφού ο A συμμετρικός και θετικά ορισμένος, έπεται ότι

$$(x_1 - x_2)^T A(x_1 - x_2) = 0$$

και συνεπώς $x_1 = x_2$.

Για την ύπαρξη του (5.15), αποδεικνύουμε ότι η ακολουθία $x^{(k)}$ που παράγεται από τον Αλγόριθμο 5.3.1 έχει μοναδικό όριο. Χωρίζουμε την απόδειξη μας σε 4 βήματα.

Βήμα 1

Θα δείξουμε πρώτα ότι για όλα τα i, k υπάρχει $\omega_{ik} \in [0, \omega]$ τέτοιο ώστε:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega_{ik}(\tilde{x}_i^{(k)} - x_i^{(k)})$$

Αν $g_i \leq x_i^{(k)} + \omega(\tilde{x}_i^k - x_i^k)$ τότε από την (5.13) έπεται ότι $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega(\tilde{x}_i^{(k)} - x_i^{(k)})$ επιλέγωντας $\omega_{ik} = \omega$. Αντίστοιχα στην περίπτωση όπου $g_i > x_i^{(k)} + \omega(\tilde{x}_i^k - x_i^k)$ τότε αφού $x_i^{(k)} \geq g_i$ επιλέγουμε $g_i = x_i^{(k+1)}$ και στην περίπτωση αυτή, θα έχουμε ότι

$$\omega_{ik} = \frac{x_i^{(k)} - g_i}{x_i^{(k)} - \tilde{x}_i^{(k+1)}}$$

όπου $\omega_{ik} \leq \omega$ και συνεπώς καταλήγουμε

$$x_i^{(k)} + \omega_{ik}(\tilde{x}_i^{(k)} - x_i^{(k)}) = g_i = x_i^{(k+1)}$$

Βήμα 2

5.4. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΧΑΛΑΡΩΣΗΣ

Έστω $x^{(k,i)}$ να είναι το i βήμα της k επανάληψης

$x^{(k,i)} = (x_1^{(k+1)}, \dots, x_i^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_{N-1}^{(k)})^T$ θα δείξουμε ότι η ακολουθία $J_j = J(x^{(k,i)})$ όπου $j = (N-1)(k-1) + i, 0 \leq i \leq N-1, k \geq 1$ συγχλίνει. Παρατηρούμε ότι

$$x^{(k+1,0)} = (x_1^{(k+1)}, \dots, x_{N-1}^{(k+1)})^T =: x^{(k,N)}$$

και

$$x^{(k,i)} - x^{(k,i-1)} = (0, \dots, 0, x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}, 0, \dots, 0)^T = (x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})e_i \quad (5.18)$$

Από την (5.13) θα έχουμε

$$a_{ii}(\tilde{x}_i^{(k)} - x_i^{(k)}) = -(Ax^{(k,i)} - b)_i \quad (5.19)$$

Με βάση τα ανωτέρω υπολογίζουμε για την περίπτωση όπου $\omega_{ik} > 0$

$$\begin{aligned} J_j - J_{j-1} &= J(x^{(k,i)}) - J(x^{(k,i-1)}) \\ &= \frac{1}{2}(x^{(k,i)} - x^{(k,i-1)})^T A(x^{(k,i)} - x^{(k,i-1)}) + (x^{(k,i)} - x^{(k,i-1)})^T (Ax^{(k,i)} - b) \\ &= \frac{1}{2}a_{ii}(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})^2 - (x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})a_{ii}(\tilde{x}_i^{(k)} - x_i^{(k)}) \end{aligned}$$

Από τις (5.18), (5.19) έχουμε:

$$\begin{aligned} &= -\frac{a_{ii}}{2} \left(\frac{2}{\omega_{ik}} - 1 \right) (x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})^2 \quad (5.20) \\ &\leq -\frac{a_{ii}}{2} \left(\frac{2}{\omega} - 1 \right) (x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})^2 \quad \text{και για } \omega_{ik} \leq \omega \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

για όλα τα $0 < \omega < 2$. Στην περίπτωση όπου $\omega_{ik} = 0$ έχουμε $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)}$ και $J_j - J_{j-1} = 0$. Αφού ο A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος εύκολα βλέπουμε ότι η ακολουθία J_j είναι γνησίως φθίνουσα.

Βήμα 3

Θα δείξουμε ότι η $(x_i^{(k)})_k$ ακολουθία συγχλίνει. Από την (5.20) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| &= \left(\frac{2}{a_{ii} \left(\frac{2}{\omega_{ik}} - 1 \right)} (J_{j-1} - J_j) \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{2}{\min \left(\frac{2}{\omega} - 1 \right)} (J_{j-1} - J_j) \right)^{1/2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

για $k \rightarrow \infty$ και $J = J(k) \rightarrow \infty$. Συνεπώς η $\{x(k, i)\}$ είναι μία Cauchy ακολουθία για όλα τα k και συνεπώς $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$

5.4. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΧΑΛΑΡΩΣΗΣ

Βήμα 4

Απομένει να δείξουμε ότι η $x = (x_1, \dots, x_{N-1})^T$ είναι λύση του γραμμικού συμπληρωματικού προβλήματος (5.15). Από την (5.13) παίρνοντας όριο για $k \rightarrow \infty$ θα έχουμε:

$$\tilde{x}_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_i^{(k)} = x_i - a_{ii}^{-1}(Ax - b)_i$$

και

$$x_i = \max \{x_i + \omega(\tilde{x}_i - x_i), g_i\} = \max \{x_i - \omega a_{ii}^{-1}(Ax - b)_i, g_i\}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το γραμμικό συμπληρωματικό πρόβλημα (5.15). \square

Εναλλακτικές μέθοδοι επίλυσης για την τιμολόγηση των Αμερικάνικων παραγώγων είναι οι μέθοδοι *Front-Tracking*, ο αλγόριθμος *Brennan-Schwartz* που περιγράφονται στο [1] καθώς και *Primal-Dual Active Set Algorithm* που περιγράφεται στο [25]. Μια επιπλέον εναλλακτική μέθοδος αντί της επαναληπτικής μεθόδου *PSOR* είναι η μέθοδος της ποινής (*penalty method*). Στη μέθοδο *PSOR* συγκρίνουμε κάθε λύση του γραμμικού μας συστήματος με τη συνάρτηση εμπόδιο (*obstacle function*), στη μέθοδο της ποινής το ελεύθερο σύνορο (*free boundary*) εντάσσεται απευθείας στην μέθοδο προσθέτοντας απλά τον επιπλέον όρο της συνάρτησης φράγματος, και λύνουμε ένα γραμμικό σύστημα. Η μέθοδος αναφέρεται και περιγράφεται στα [9], [38],[20].

Κεφάλαιο 6

Διακριτοποίηση της 2-D Black and Scholes Εξίσωσης με Χρήση Πεπερασμένων Στοιχείων

Σε πολλές εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά απαιτείται η διακριτοποίηση της γενικευμένης εξίσωσης Black and Scholes. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι η τιμολόγηση Ασιατικών Παραγώγων, ομόλογα, καθώς και Ευρωπαϊκά και Αμερικάνικα Παραγώγα αποτελούμενα από δύο υποκείμενα προϊόντα (Better Options, Worst of Two Assets, Basket Options, Rainbow Options). Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε την διακριτοποίηση των προαναφερθέντων χρηματοοικονομικών προϊόντων με χρήση Πεπερασμένων Στοιχείων.

6.1 Η 2-D Black and Scholes και η Γενικευμένη Εξίσωση Διάχυσης

Υποθέτουμε ότι η U είναι συνάρτηση δύο στοχαστικών μεταβλητών S_1 και S_2 σε χρόνο t . Η εξέλιξη των δύο υποκείμενων προϊόντων S_1 και S_2 περιγράφονται από τις ακόλουθες στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις:

$$dS_1 = \mu_1(S_1, S_2, t) dt + \sigma_1(S_1, S_2, t) dW_1 \quad (6.1)$$

$$dS_2 = \mu_2(S_1, S_2, t) dt + \sigma_2(S_1, S_2, t) dW_2 \quad (6.2)$$

6.1. Η 2-D BLACK AND SCHOLES ΚΑΙ Η ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΧΥΣΗΣ

η εξίσωση *Black-Scholes* που περιγράφεται από τα δύο αυτά υποκείμενα προϊόντα είναι η:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{(\sigma_1 S_1)^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial S_1^2} + \frac{(\sigma_2 S_2)^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial S_2^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 U}{\partial S_1 \partial S_2} + r S_1 \frac{\partial U}{\partial S_1} + r S_2 \frac{\partial U}{\partial S_2} - r U = 0 \quad (6.3)$$

$$\mathbb{E}[dW_i dW_j] = \rho_{ij} dt \quad \mu\epsilon \quad i, j = 1, 2$$

όπου $\rho_{12} = \rho_{21} = \rho$ ο αντίστοιχος συντελεστής συσχέτισης με $-1 \leq \rho \leq 1$. Όταν ο συντελεστής συσχέτισης λαμβάνει θετικές τιμές τότε η συσχέτιση είναι θετική. Στην περίπτωση αυτή η άξηση της τιμής του υποκείμενου προϊόντος S_1 θα οδηγήσει σε μία ανάλογη άξηση της τιμής του υποκείμενου προϊόντος S_2 . Στην περίπτωση όπου ο συντελεστής συσχέτισης λαμβάνει την τιμή 1 τότε η συσχέτιση καλείται τέλεια θετική συσχέτιση. Από χρηματοοικονομικής πλευράς η τέλεια θετική συσχέτιση συνεπάγεται ότι η άξηση της τιμής του υποκείμενου προϊόντος S_1 θα οδηγήσει σε μία ισόποση άξηση της τιμής του υποκείμενου προϊόντος S_2 . Αντίθετα όταν ο συντελεστής συσχέτισης λαμβάνει αρνητικές τιμές τότε η συσχέτιση καλείται αρνητική, με την άξηση του υποκείμενου προϊόντος S_1 να οδηγεί σε μία ανάλογη μείωση της τιμής του υποκείμενου προϊόντος S_2 . Όταν ο συντελεστής συσχέτισης λαμβάνει την τιμή -1 τότε η συσχέτιση καλείται τέλεια αρνητική συσχέτιση και η άξηση της τιμής του υποκείμενου προϊόντος S_1 να οδηγεί σε μία ισόποση μείωση της τιμής του υποκείμενου προϊόντος S_2 . Τέλος στην περίπτωση όπου $\rho = 0$ τότε οι τιμές των δύο υποκείμενων προϊόντων S_1, S_2 είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Η (6.3) για $\tau = T - t$ μετασχηματίζεται στην γενικευμένη εξίσωση διάχυσης:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + a \nabla U - (D \nabla) \nabla U + r U = 0 \quad (6.4)$$

$$\text{όπου } a = - \begin{pmatrix} r S_1 \\ r S_2 \end{pmatrix} \text{ και } D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 S_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 & \sigma_2^2 S_2^2 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας διάχυσης είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος. Μια συνήθη τεχνική διακριτοποίησης της (6.4) είναι με χρήση Πεπερασμένων Ογκών, αντ' αυτού θα τη διακριτοποιήσουμε με χρήση Περασμένων Στοιχείων. Υπάρχουν σημαντικές δυσκολίες στη διακριτοποίηση της (6.4) με χρήση πεπερασμένων στοιχείων. Μια πρώτη δυσκολία είναι η επιβολή κατάλληλων συνοριακών συνθηκών. Σε κάθε παράγωγο με διαφορετική συνάρτηση αποπληρωμής (*payoff function*) εισάγουμε κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Η επιλογή των συνοριακών συνθηκών είναι αρκετά τεχνική και ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτής της εργασίας. Για την εφαρμογή κατάλληλων συνοριακών συνθηκών για τα παράγωγα παραπέμπουμε στο [13]. Μια επιπλέον δυσκολία στην διακριτοποίηση της ανωτέρω εξίσωσης είναι ότι μπορεί να οδηγηθούμε σε ταλαντούμενες λύσεις. Το διάνυσμα a (*convective terms*) μπορεί να οδηγήσει σε ιδιομορφίες (*singularities*) στην επίλυση μας. Στην πραγματικότητα οι λύσεις επιδέχονται διαταραχές, που εμφανίζονται στην περίπτωση όπου η μερική

6.2. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

διαφορική εξίσωση μας κυριαρχείται από τους μεταφορικούς όρους a . Ένας τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος αυτού είναι με κατάλληλη αναδιαμέριση, εναλλακτικά μπορούμε να προσθέσουμε κάποιους επιπλέον όρους για μεγαλύτερη ευστάθεια και αντιμετώπιση των αυτών ταλαντούμενων λύσεων. Ο τρόπος εφαρμογής των επιπλέον όρων-όροι τεχνητής διαχύσης (*artificial diffusion*) εξαρτάται από τη διακριτοποίηση μας αλλά και από τον συντελεστή Peclet, ο οποίος εξαρτάται από την νόρμα του πίνακα διάχυσης D και τη αντίστοιχη νόρμα του διανύσματος a , για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [35]. Η εξίσωση (6.4) εναλλακτικά μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = - \left(-a - (\nabla' D)' \right) \nabla U + \nabla D \nabla U - rU \quad (6.5)$$

Όπου ∇' και D' οι ανάστροφοι των ∇ και D αντίστοιχα. Η χρήση της (6.5) γίνεται σε μοντέλα με στοχαστική μεταβλητότητα (*stochastic volatility models*), για περισσότερες λεπτομέρειες στο παραπέμπουμε στο [46].

Ωστόσο η (6.5) έχει αρκετές αλγοριθμικές δυσκολίες στον τρόπο χειρισμού των συνοριακών συνθηκών. Για τη διακριτοποίηση του Αμερικάνικου παραγώγου με δύο υποκείμενα προϊόντα κάνουμε χρήση της (6.4) της οποίας την διακριτοποίηση της με χρήση πεπερασμένων στοιχείων θα την περιγράψουμε στην ακόλουθη ενότητα.

6.2 Διακριτοποίηση της Γενικευμένης Εξίσωσης Διάχυσης με χρήση της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων

Στην ενότητα αυτή θα διακριτοποιήσουμε την εξίσωση (6.4) με χρήση πεπερασμένων στοιχείων. Η εξίσωση (6.4) εναλλακτικά για $\tau = T - t$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = -a \nabla U + (D \nabla) \nabla U - rU \quad (6.6)$$

Η ασθενής μορφή για την (6.6) με χρήση των τύπων Green θα είναι:

$$\int_{\Omega} (-a \nabla U \nabla v + (D \nabla U) \cdot \nabla v - rUv) dS = \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} v dS \quad \forall v \in \Omega \quad (6.7)$$

με v συνεχή συνάρτηση και κατά τμήματα C^1 στο Ω από την χρήση των τύπων Green για τον όρο της διάχυσης θα έχουμε:

$$\int_{\Omega} (-a \nabla U v - (D \nabla U) \nabla v - rUv) dS - \int_{\partial \Omega} (D \nabla U) \vec{n} d\zeta = \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial \tau} v dS \quad (6.8)$$

το ολοκλήρωμα

$$\int_{\partial \Omega} (D \nabla U) \vec{n} d\zeta = 0$$

6.2. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

γιατί δεν υπάρχει διάχυση στο σύνορο μας.

Έτσι λοιπόν οδηγούμαστε στην ακόλουθη ολοκληρωτική μορφή

$$\int_{\Omega} (-a\nabla Uv - (D\nabla U)\nabla v - rUv)dS = \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial \tau} v dS \quad (6.9)$$

ή

$$\int_{\Omega} (a\nabla Uv + (D\nabla U)\nabla v + rUv)dS = - \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial \tau} v dS$$

Συνεπώς η ασθενής μορφή θα είναι:

Βρες $u \in L^2((0, T), H^1(\mathbb{R}^2)) \cap H^1((0, T), L^2(\mathbb{R}^2))$ τέτοιο ώστε:

$$(\partial_t u, v) + a(u, v) = 0 \quad (6.10)$$

με αρχική συνθήκη

$$u_0 = U_0$$

όπου

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (a\nabla uv + (D\nabla u)\nabla v + ruv)dS$$

Πρόταση 6.1. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας D είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, τότε υπάρχει σταθερά γ τέτοια ώστε $x^T D x \geq \gamma x^T \forall x \in \mathbb{R}^2$. Επιπλέον υπάρχουν σταθερές C_i , $i = 1, 2, 3$ τέτοιες ώστε:

$$|a(u, v)| \leq C_1 \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \quad (6.11)$$

και

$$a(u, v) \geq C_2 \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 - C_3 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \quad (6.12)$$

Απόδειξη. Από την Holder ανισότητα έχουμε:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq |D_{ij}| \int \nabla u \nabla v dS + |a_i| \int \nabla u v dS + r \int |u| |v| dS \\ &\leq C_1 \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} a(u, v) &\geq \gamma \int |\nabla u|^2 dS + r \int |u|^2 dS \\ &\geq \gamma \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 + (r - \gamma) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \end{aligned}$$

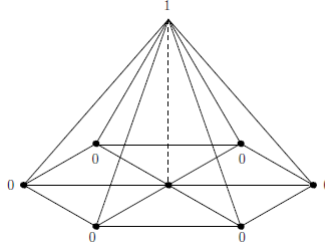
□

Για την αριθμητική επίλυση με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων κατασκευάζουμε αρχικά ένα μερισμό της περιοχής Ω σε τρίγωνα (στοιχεία), βλέπε Σχήμα 6.1

$$\Omega = \bigcup_n \Omega_n$$

για την οποία ισχύει:

6.2. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ



Σχήμα 6.1: Συναρτήσεις Βάσης

$$\varphi_{ij} = \delta_{ij}$$

Όπου δ_{ij} η συνάρτηση δέλτα Dirac:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Η προσεγγιστική λύση για το πρόβλημα μας δίνεται από την:

$$\bar{U}(S_1, S_2) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(S_1, S_2) \quad (6.13)$$

Για μεγαλύτερη ευστάθεια όπως προαναφέραμε προσθέτουμε κάποιους επιπλέον όρους και έτσι αντί των απλών και κατά τμήματα συνεχών συναρτήσεων v κάνουμε χρήση των:

$$\tilde{v} = v + \varepsilon \alpha \nabla v \quad (6.14)$$

Όπου ε ο συντελεστής Peclet¹. Όπως προαναφέραμε ο συντελεστής αυτός εξαρτάται από τη διαμέριση μας, και την αντίστοιχη νόρμα του πίνακα διάχυσης, παραπέμπουμε [35].

$$\tilde{\varphi}_i = \varphi_i + \varepsilon \alpha \nabla \varphi_i \quad (6.15)$$

Με βάση την μέθοδο Galerkin θα έχουμε:

$$\int_{\Omega} (-a \nabla \varphi_j \tilde{\varphi}_i - (D \nabla \varphi_j) \nabla \tilde{\varphi}_i - r \varphi_j \tilde{\varphi}_i) dS = \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial \tau} \varphi_j \tilde{\varphi}_i \quad (6.16)$$

Αντικαθιστώντας της (6.15) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -a \nabla \varphi_j (\varphi_i + \varepsilon \alpha \nabla \varphi_i) dS - \int_{\Omega} (D \nabla \varphi_j) (\nabla (\varphi_i + \varepsilon \alpha \nabla \varphi_i)) dS \\ - \int_{\Omega} r \varphi_j (\varphi_i + \varepsilon \alpha \nabla \varphi_i) dS = \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial \tau} \varphi_j (\varphi_i + \varepsilon \alpha \nabla \varphi_i) \end{aligned}$$

¹ Η μέθοδος για την (6.14) όπου προσθέτουμε επιπλέον όρους για μεγαλύτερη ευστάθεια ονομάζεται Petrov Streamline Upwind Galerkin Method

6.2. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ
ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Όπότε τελικά θα έχουμε:

$$\begin{aligned} & \sum_{\Omega \in \Omega_h} \left(\int_{\Omega} -(a \nabla \varphi_j) \varphi_i dS - \int_{\Omega} (D \nabla \varphi_j) \nabla \varphi_i dS - r \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i dS \right. \\ & \left. + \varepsilon \left(\int_{\Omega} (-a \nabla \varphi_j) (a \nabla \varphi_i) dS - r \int_{\Omega} \varphi_j (a \nabla \varphi_i) dS \right) \right) w(\tau) \\ & = \sum_{\Omega \in \Omega_h} \left(\int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i dS + \varepsilon \int_{\Omega} \varphi_j (a \nabla \varphi_i) dS \right) \dot{w}(\tau) \end{aligned}$$

Οι πράξεις βρίσκονται αναλυτικότερα στο [35] (Κεφάλαιο 7 σελίδες 97-98). Διακριτοποιώντας και ως προς τον χρόνο με την μέθοδο Crank Nicolson και εισάγοντας τη μέθοδο των γραμμών, καταλήγουμε σε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής:

$$Cw(\tau) = b\dot{w}(\tau) \quad (6.17)$$

Όπου:

$$C = G - dt\theta A$$

Όπου:

$$\begin{aligned} A & = \sum_{\Omega \in \Omega_h} \left(\int_{\Omega} (-a \nabla \varphi_j) \varphi_i dS - \int_{\Omega} (D \nabla \varphi_j) \nabla \varphi_i dS - r \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i dS \right) \\ & + \varepsilon \sum_{\Omega \in \Omega_h} \left(\int_{\Omega} (-a \nabla \varphi_j) (a \nabla \varphi_i) dS - r \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i dS \right) \end{aligned}$$

και αντίστοιχα

$$G = \sum_{\Omega \in \Omega_h} \left(\int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i dS + \varepsilon \int_{\Omega} \varphi_j (a \nabla \varphi_i) dS \right)$$

δηλαδή $G = B + R$ όπου:

$$B = \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i dS \quad (6.18)$$

ο πίνακας μάζας (mass matrix)

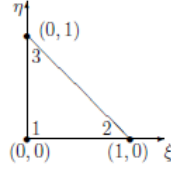
$$R = \int_{\Omega} \varepsilon \varphi_j (a \nabla \varphi_i)$$

και

$$b = (G + dt(1 - \theta)A) \dot{w}(\tau)$$

Επιβάλλοντας κατάλληλες συνοριακές συνθήκες Neumann και Dirichlet αντίστοιχα μπορούμε να λύσουμε το σύστημα (6.17) με χρήση των επαναληπτικών μεθόδων *SOR* και *PSOR* (για το Αμερικάνικο Παράγωγο). Απομένει ο υπολογισμός των στοιχείων των C και b . Για τον πίνακα A θα πρέπει να υπολογίσουμε τα στοιχεία

6.2. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ



Σχήμα 6.2: Αναφορικό Τρίγωνο

1. $\int_{\Omega} (a \nabla \varphi_j) \varphi_i dS$
2. $\int_{\Omega} (D \nabla \varphi_j) \nabla \varphi_i dS$
3. $r \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i dS$
4. $\int_{\Omega} (a \nabla \varphi_j) (a \nabla \varphi_i)$
5. $r \int_{\Omega} \varphi_j (a \nabla \varphi_i) dS$

Για τον προσδιορισμό των στοιχείων 1-5 θα πρέπει να κάνουμε χρήση ενός αναφορικού τριγώνου (reference triangle) και κατάλληλη αλλαγή συντεταγμένων (local-to-global) με βάση το αναφορικό τρίγωνο, βλέπε Σχήμα 6.2. Παραπέμπουμε στα [35], [15], [13].

Το διαφορικό ∇ με βάση το τρίγωνο αναφοράς μετασχηματίζεται στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial S_1} \\ \frac{\partial}{\partial S_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

όπου:

$$J = \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \quad (6.19)$$

και $x_1 - x_3$, $y_1 - y_3$ οι αντίστοιχες τοπικές συντεταγμένες για τα S_1 και S_2 αντίστοιχα. Η αντίστοιχη αναφορική βάση θα είναι:

$$\varphi_{J_1}(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$\varphi_{J_2}(\xi, \eta) = \xi$$

$$\varphi_{J_3}(\xi, \eta) = \eta$$

Με χρήση των τοπικών συντεταγμένων θα έχουμε:

$$\varphi_{J_1} = \frac{1}{2J} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3) S_1 + (x_3 - x_2) S_2]$$

6.2. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ
ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

$$\varphi_{J_2} = \frac{1}{2J} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_1 - y_3) S_1 + (x_1 - x_3) S_2]$$

$$\varphi_{J_3} = \frac{1}{2J} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2) S_1 + (x_2 - x_1) S_2]$$

Για τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων θα χρειαστούμε τον Εσσιανό πίνακα (Hessian Matrix)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{J_1}}{\partial S_1} & \frac{\partial \varphi_{J_1}}{\partial S_2} \\ \frac{\partial \varphi_{J_2}}{\partial S_1} & \frac{\partial \varphi_{J_2}}{\partial S_2} \\ \frac{\partial \varphi_{J_3}}{\partial S_1} & \frac{\partial \varphi_{J_3}}{\partial S_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} =: \frac{1}{J} H \quad (6.20)$$

Με βάση τις (6.19), (6.20) είμαστε έτοιμοι να υπολογίσουμε τα στοιχεία 1.- 5.
Για τον υπολογισμό του 1. θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (a \nabla \varphi_j) \varphi_i dS &= \int_{\Omega} \begin{pmatrix} r S_1 \\ r S_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_j}{\partial S_1} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial S_2} \end{pmatrix} \varphi_i dS \\ &= \int_{\Omega} \left(r S_1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial S_1} \varphi_i + r S_2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial S_2} \varphi_i \right) dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} r S_1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial S_1} \varphi_i dS &= r \tilde{S}_1 \int_{\Omega} \varphi_i dS \frac{\partial \varphi_j}{\partial S_1} = r \tilde{S}_1 \begin{pmatrix} \int \varphi_{J_1} \\ \int \varphi_{J_2} \\ \int \varphi_{J_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{J_1}}{\partial S_1} & \frac{\partial \varphi_{J_2}}{\partial S_1} & \frac{\partial \varphi_{J_3}}{\partial S_1} \end{pmatrix} \\ &= r \tilde{S}_1 \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{r \tilde{S}_1}{6} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

όπου

$$\tilde{S}_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

Όμοια για

$$\int_{\Omega} r S_2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial S_2} \varphi_i dS = r \tilde{S}_2 \int_{\Omega} \varphi_i dS \frac{\partial \varphi_j}{\partial S_2} = r \tilde{S}_2 \begin{pmatrix} \int \varphi_{J_1} \\ \int \varphi_{J_2} \\ \int \varphi_{J_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{J_1}}{\partial S_2} & \frac{\partial \varphi_{J_2}}{\partial S_2} & \frac{\partial \varphi_{J_3}}{\partial S_2} \end{pmatrix}$$

όπου:

$$\tilde{S}_2 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

6.2. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ
ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Συνεπώς το στοιχείο 1. του πίνακα A θα είναι:

$$\int_{\Omega} (a \nabla \varphi_j) \varphi_i dS = \frac{r \tilde{S}_1}{6} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \end{pmatrix} + \frac{r \tilde{S}_2}{6} \begin{pmatrix} x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

Για το στοιχείο 2 θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (D \nabla \varphi_j) \nabla \varphi_i dS &= \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sigma_1^2 & \frac{1}{2} \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \frac{1}{2} \rho \sigma_1 \sigma_2 & \frac{1}{2} \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_j}{\partial S_1} \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial S_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial S_1} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial S_2} \end{pmatrix} dS \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial S_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial S_2} + \frac{1}{2} \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial S_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial S_2} + \frac{1}{2} \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial S_2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial S_1} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial S_2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial S_2} \right) dS \end{aligned}$$

Συνεπώς θα πρέπει να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες μερικές παραγώγους
 $\frac{\partial \varphi_j}{\partial S_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial S_2}, \frac{\partial \varphi_j}{\partial S_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial S_1}, \frac{\partial \varphi_j}{\partial S_2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial S_1}, \frac{\partial \varphi_j}{\partial S_2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial S_2}$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial S_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial S_1} = \frac{1}{2J} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} (y_2 - y_3 \quad y_3 - y_1 \quad y_1 - y_2) \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial S_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial S_2} = \frac{1}{2J} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} (x_3 - x_2 \quad x_1 - x_3 \quad x_2 - x_1) \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial S_2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial S_1} = \frac{1}{2J} \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} (y_2 - y_3 \quad y_3 - y_1 \quad y_1 - y_2) \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial S_2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial S_2} = \frac{1}{2J} \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} (x_3 - x_2 \quad x_1 - x_3 \quad x_2 - x_1) \quad (6.24)$$

Εκτελώντας τις ανάλογες πράξεις για το στοιχείο 2. θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (D \nabla \varphi_j) \nabla \varphi_i dS &= \\ & \frac{1}{2} \sigma_1^2 \tilde{S}_1^2 \frac{1}{2J} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} (y_2 - y_3 \quad y_3 - y_1 \quad y_1 - y_2) + \\ & \frac{1}{2} \rho \sigma_1 \sigma_2 \tilde{S}_1 \tilde{S}_2 \frac{1}{2J} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} (x_3 - x_2 \quad x_1 - x_3 \quad x_2 - x_1) + \end{aligned}$$

6.2. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ
ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

$$\frac{1}{2}\rho\sigma_1\sigma_2\tilde{S}_1\tilde{S}_2\frac{1}{2J}\begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} (y_2 - y_3 \quad y_3 - y_1 \quad y_1 - y_2) +$$

$$\frac{1}{2}\sigma_2^2\tilde{S}_2^2\frac{1}{2J}\begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} (x_3 - x_2 \quad x_1 - x_3 \quad x_2 - x_1)$$

Όπου $\tilde{S}_1^2 = \frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3}$ και $\tilde{S}_2^2 = \frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3}$

Αντίστοιχα για το στοιχείο 3. του πίνακα A , δηλαδή τον πίνακα μάζας πολλαπλασιασμένο με τη σταθερά r του επιτοκίου θα έχουμε:

$$r \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i dS = \frac{2rJ}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

Για το στοιχείο 4. θα έχουμε:

$$\int_{\Omega} (a\nabla\varphi_j)(a\nabla\varphi_i) dS =$$

$$r^2\tilde{S}_1^2\frac{1}{2J}\begin{pmatrix} y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} (y_3 - y_2 \quad x_1 - y_3 \quad y_2 - y_1) +$$

$$r^2\tilde{S}_2^2\frac{1}{2J}\begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} (x_3 - x_2 \quad x_1 - x_3 \quad x_2 - x_1) +$$

$$+r\tilde{S}_1\tilde{S}_2\frac{1}{2J}\begin{pmatrix} y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} (x_3 - x_2 \quad x_1 - x_3 \quad x_2 - x_1) +$$

$$r\tilde{S}_1\tilde{S}_2\frac{1}{2J}\begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} (y_2 - y_3 \quad y_3 - y_1 \quad y_1 - y_2)$$

Τέλος για το στοιχείο 5. θα έχουμε:

$$r \int_{\Omega} \varphi_j (a\nabla\varphi_i) dS =$$

$$\frac{r\tilde{S}_1}{6} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_2 - y_3 & y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 & y_3 - y_1 & y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 & y_1 - y_2 & y_1 - y_2 \end{pmatrix} +$$

$$\frac{r\tilde{S}_2}{6} \begin{pmatrix} x_3 - x_2 & x_3 - x_2 & x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 & x_1 - x_3 & x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

Όμοια για τα στοιχεία του b θα έχουμε:

6.3. ΑΣΙΑΤΙΚΑ ΠΑΡΑΓΩΓΑ

$$1. \int_{\Omega} \varepsilon \varphi_j (a \nabla \varphi_i) dS$$

$$2. \int_{\Omega} \varepsilon \varphi_j (a \nabla \varphi_i) dS$$

Για το στοιχείο 1. του πίνακα μάζας θα έχουμε:

$$\int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i dS = \frac{2J}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Τέλος για το στοιχείο 2. έχουμε:

$$\int_{\Omega} \varepsilon \varphi_j (a \nabla \varphi_i) dS = \varepsilon \left(\frac{r\tilde{S}_1}{6} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_2 - y_3 & y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 & y_3 - y_1 & y_3 - y_1 \\ y_1 - y_2 & y_1 - y_2 & y_1 - y_2 \end{pmatrix} + \frac{r\tilde{S}_2}{6} \begin{pmatrix} x_3 - x_2 & x_3 - x_2 & x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 & x_1 - x_3 & x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \right)$$

6.3 Ασιατικά Παράγωγα

Τα ασιατικά παράγωγα έχουν ως συνάρτηση αποπληρωμής τη συνάρτηση του γεωμετρικού μέσου των δύο υποκείμενων προϊόντων, η χρήση της οποίας μειώνει την ευαισθησία του παραγώγου σε αλλαγές που γίνονται στη μεταβολή της τιμής του υποκείμενου προϊόντος.

Υποθέτουμε ότι η μετοχή ακολουθεί την παρακάτω εξίσωση:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

Ορίζουμε τον γεωμετρικό μέσο σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή ως ακολούθως:

$$A = \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) dt$$

για για $\tau = T - t$ ο αντίστοιχος πίνακας διάχυσης D για το συγκεκριμένο παράγωγο θα είναι:

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^2 S^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και το αντίστοιχο διάνυσμα:

$$a = - \begin{pmatrix} rS \\ \frac{S-A}{T-\tau} \end{pmatrix}$$

όπου το αντίστοιχο διαφορικό θα ορίζεται:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial S} \\ \frac{\partial}{\partial A} \end{pmatrix}$$

η συνάρτηση αποπληρωμής για ένα *fixed Asian Call* σε χρόνο $\tau = 0$ ή $\tau = T$ θα είναι:

$$U(S = A, \tau = 0) = \max(A - K, 0) \quad (6.26)$$

6.4. ΟΜΟΛΟΓΑ

όπου K η αντίστοιχη τιμή άσκησης
Οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες θα είναι:

$$U(S, A, \tau) = A \text{ καθώς } S, A \rightarrow \infty, S = A \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = -\frac{A}{T-\tau} \frac{\partial U}{\partial A} - rU \text{ καθώς } S \rightarrow 0 \quad (6.28)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \left(\frac{S-A}{T-t}\right) \frac{\partial U}{\partial A} - rU \text{ για } S \rightarrow \infty, S \neq A \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS \frac{\partial U}{\partial S} + \left(\frac{S-A}{T-\tau}\right) \frac{\partial U}{\partial A} - rU \text{ για } A \rightarrow 0 \quad (6.30)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS \frac{\partial U}{\partial S} + \left(\frac{S-A}{T-\tau}\right) \frac{\partial U}{\partial A} - rU \text{ για } A \rightarrow \infty, S \neq A \quad (6.31)$$

6.4 Ομόλογα

Στην ενότητα αυτή με βάση τη γενικευμένη εξίσωση διάχυσης (6.4) θα περιγράψουμε την αριθμητική τιμολόγηση ομολόγων και συγκεκριμένα των μετατρέψιμων ομολόγων (*convertible bonds*). Τα μετατρέψιμα ομόλογα είναι τύποι ομολόγων, των οποίων ο κάτοχος μπορεί να μετατρέψει το ομόλογο σε μια μετοχή ίδιας ονομαστικής αξίας έχει χρόνο ωρίμανσης 10 έτη και άνω, και εκδίδονται συνήθως από εταιρείες με χαμηλή πιστοληπτική ικανότητα.

Θεωρούμε το μοντέλο επιτοκίου με εξίσωση και το υπόδειγμα της μετοχής που περιγράφεται από την ακόλουθη стоχαστική διαφορική εξίσωση

$$dr = \tilde{a}(b-r)dt + \sigma_r r_c dW_r$$

$$\tilde{a}(r, t) = w(r, t)\lambda(r, t) - u(r, t)$$

όπου w, u είναι συναρτήσεις που καθορίζουν τη συμπεριφορά της καμπύλης του r και λ το επιτοκίο ρίσκου της χρηματαγοράς, για περαιτέρω πληροφορίες παραπέμπουμε στο [3] (Κεφάλαιο 15 σελίδες 256-257).

$$dS = \mu S dt + \sigma_S S dW_s$$

για $\tau = T - t$ θα έχουμε:

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_S S^2 & \rho \sigma_S \sigma_r S r_c \\ \rho \sigma_S \sigma_r S r_c & \sigma_r^2 r_c^2 \end{pmatrix}$$

το αντίστοιχο διάνυσμα a :

$$a = - \begin{pmatrix} rS \\ \tilde{a}(b-r) - \lambda \sigma_r r_c \end{pmatrix}$$

6.5. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΠΑΡΑΓΩΓΟ ΜΕ ΔΥΟ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ

ο αντίστοιχος διαφορικός τελεστής

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial S} \right)$$

Η αρχική συνθήκη για το πρόβλημα

$$U(S, r, \tau = 0) = \max(F, \omega S)$$

όπου F είναι η ονομαστική αξία του ομολόγου, ω είναι ο λόγος μετατροπής (conversion ratio) ο οποίος εκφράζει τον αριθμό των μετοχών που μπορεί να ανταλλάξει κάποιος με το αντίστοιχο ομόλογο. Από το λόγο μετατροπής ω και από την συνθήκη για το δικαίωμα αγοράς call έχουμε:

$$U(S, r, \tau) \geq \omega S$$

$$U(S, r, \tau) \leq C_p$$

όπου C_p είναι η τιμή για το αντίστοιχο δικαίωμα αγοράς call

Οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες θα είναι:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma_r^2 r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + (\tilde{a}(b-r) - \lambda \sigma_r r c) \frac{\partial U}{\partial r} - rU \quad \text{καθώς } S \rightarrow 0 \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \tilde{a}b \frac{\partial U}{\partial r} \quad (6.33)$$

$$U(S, r, \tau) = C_p \quad (6.34)$$

$$U(S, r, \tau) = \min(\omega S, C_p) \quad (6.35)$$

Το ανωτέρω μοντέλο είναι ενδιαφέρον αριθμητικά για πολλούς λόγους. Πρώτά από όλα εφαρμόζουμε παντού συνοριακές συνθήκες *Dirichlet*. Επιπλέον υπάρχουν περιοχές στο χωρίο μας όπου οι όροι διάχυσης D σχετίζονται με τους όρους μεταφοράς a (convective terms)

6.5 Αμερικάνικο Παράγωγο με δύο υποκείμενα προϊόντα

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε το Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης με δύο υποκείμενα προϊόντα *Worst of two Assets*.

Ορίζουμε το διαφορικό τελεστή

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial S_1} \right)$$

6.5. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΠΑΡΑΓΩΓΟ ΜΕ ΔΥΟ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ

και $U(S_1, S_2, t)$ η αξία του Αμερικάνικου παραγώγου με δύο υποκείμενα προϊόντα. Ο αντίστοιχος πίνακας διάχυσης για $\tau = T - t$ θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 S_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 & \sigma_2^2 S_2^2 \end{pmatrix}$$

Το αντίστοιχο διάνυσμα a θα δίνεται:

$$a = - \begin{pmatrix} r S_1 \\ r S_2 \end{pmatrix}$$

Η συνάρτηση αποπληρωμής για το παράγωγο με δύο υποκείμενα προϊόντα (*Worst of Two Assets*)

$$U(S_1, S_2, 0) = \max(K - \min(S_1, S_2), 0)$$

Για το Αμερικάνικο παράγωγο η πρόωρη άσκηση (*early exercise*) δίνεται από την συνάρτηση εμποδίου (*obstacle function*):

$$U(S_1, S_2, \tau) \geq \max(K - \min(S_1, S_2), 0)$$

Οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες:

$$U(S_1, S_2, \tau) = K \quad \text{για } S_1, S_2 \rightarrow 0 \quad (6.36)$$

$$U(S_1, S_2, \tau) = 0 \quad \text{για } S_1, S_2 \rightarrow \infty, S_1 = S_2 \quad (6.37)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S_1^2} + r S_1 \frac{\partial U}{\partial S_1} - r U \quad \text{για } S_2 \rightarrow \infty, S_1 \neq S_2 \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S_2^2} + r S_2 \frac{\partial U}{\partial S_2} - r U \quad \text{για } S_1 \rightarrow \infty, S_1 \neq S_2 \quad (6.39)$$

Κεφάλαιο 7

Αριθμητικές Εφαρμογές

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τρεις βασικές εφαρμογές για την αποτίμηση Αμερικάνικων παραγώγων. Συγκεκριμένα θα παρουσιάσουμε το Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης με χρήση πεπερασμένων στοιχείων, πεπερασμένων διαφορών και του διωνυμικού μοντέλου, καθώς και του αντίστοιχου Αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς με και χωρίς απόδοση μερισμάτων στο υποκείμενο προϊόν. Τέλος θα αποτιμήσουμε το Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης με δύο υποκείμενα προϊόντα και συγκεκριμένα του *Worst of Two Assets*. Όλες οι ανωτέρω εφαρμογές έγιναν με χρήση της *MATLAB(R2009)* και χρήση υπολογιστή με επεξεργαστή *Intel Pentium 2.20 GHz*.

7.1 Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης

Ως πρώτη εφαρμογή θα ξεκινήσουμε με την τιμολόγηση των Αμερικάνικων δικαιωμάτων πώλησης, καθώς και των αντίστοιχων *Greeks* για το παράγωγο αυτό. Η δυσκολία στην τιμολόγηση των Αμερικάνικων δικαιωμάτων πώλησης έγκειται στον προσδιορισμό του ελευθέρου συνόρου, ο οποίος θα γίνει αριθμητικά. Με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων όπως περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 4 καταλήξαμε:

$$\left(v^{(\nu+1)} - y_h^{(\nu+1)}\right) \left(Cy_h^{(\nu+1)} - b\right) \geq 0 \quad (7.1)$$

όπου

$$C = B + \Delta\tau\theta A \quad (7.2)$$

και

$$b = (B - \Delta\tau(1 - \theta)A) y_h^{(\nu+1)} + d^{(\nu)} \quad (7.3)$$

με τα A , B και $d^{(\nu)}$ να δίνονται από τις (4.43), (4.44), (4.47) αντίστοιχα. Επισημαίνουμε ότι η (7.1) θα λυθεί με χρήση του αλγορίθμου *PSOR* βλέπε Κεφάλαιο 5, Αλγόριθμος 5.3.1

Για τη χωρική διακριτοποίηση βασιζόμενοι στο [2] κάνουμε χρήση του

7.1. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ

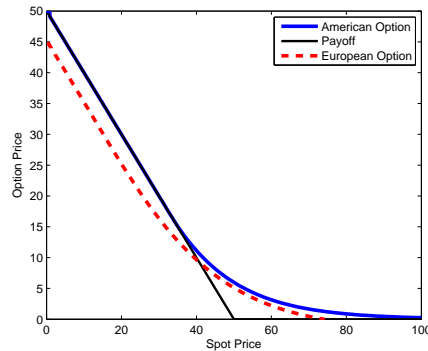
διαστήματος $(-a, a)$ με $a = 5$ και $h = \frac{2a}{N}$ το αντίστοιχο χωρικό βήμα διακριτοποίησης όπου N το μέγεθος της διακριτοποίησης μας. Αντίστοιχα για τη χρονική διακριτοποίηση θα έχουμε $[0, \tau_{max}]$ όπου $\tau_{max} = \frac{1}{2}\sigma^2 T$ και $\Delta\tau = \frac{\tau_{max}}{M}$ το αντίστοιχο χρονικό βήμα και M το αντίστοιχο μέγεθος του αριθμού των χρονικών διακριτοποιήσεων.

Αντίστοιχα για τις πεπερασμένες διαφορές καταλήγουμε:

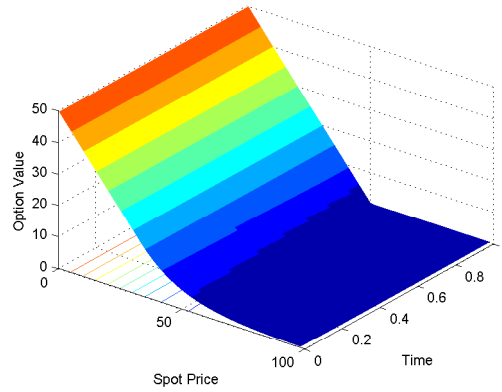
$$(Cy - b)(y - g) = 0 \quad (7.4)$$

όπου τα C , b και g δίνονται από (3.36), (3.39), (2.17)

Με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων για $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 1$ και για $M = N = 600$ θα έχουμε:



Σχήμα 7.1: Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης για $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 1$



Σχήμα 7.2: Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης για $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 1$ στις 3 διαστάσεις

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια με χρήση της επαναλήπτικής μεθόδου PSOR το γενικό αλγόριθμο για τις μεθόδους των πεπερασμένων στοιχείων και πεπερασμένων διαφορών όπως αυτός περιγράφεται στο [35].

Βασίζομενοι στον Αλγόριθμο 7.1.1, η τιμολόγηση του Ευρωπαϊκού Δικαιώματος Πώλησης (αλγόριθμος SOR) μπορεί να γίνει εύκολα αντικαθιστώντας το:

$$x_{2i} = \max\{\omega temp + (1 - \omega)x_{1i}, g(x_{i+1}, \tau_j)\}$$

με το:

$$x_{2i} = (\omega temp + (1 - \omega)x_{1i})$$

στον αλγόριθμο μας.

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια τα αριθμητικά αποτελέσματα για τις 3 μεθόδους για

7.1. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ

Αλγόριθμος 7.1.1 Ο αλγόριθμος του Αμερικάνικου Δικαιώματος Πώλησης

Δεδομένα $K, S_0, T, \sigma, r, M, N$
 $a = -5$
 $h = \frac{2a}{N}$
 $x = -a : h : a$
 $\tau_{max} = \frac{1}{2}\sigma^2 T, \Delta\tau = \frac{\tau_{max}}{M}$
 $k_1 = \frac{2r}{\sigma^2}$ (χωρίς απόδοση μερισμάτων)
 g για το δικαίωμα πώλησης βλέπε (2.17)
 Πεπερασμένα Στοιχεία (FEM) C, b βλέπε (4.45), (4.46)
 Πεπερασμένες Διαφορές (FDM) C, b βλέπε (3.36), (3.39)
 $y_i = g(x_i, 0)$
 PSOR loop
for $v = 1 : M$ **do**
 FEM $b_i^{(v)} = (B - \Delta\tau(1 - \theta)A)y_i^{(v)} + d_i^{(v)}$
 FDM $b_i^{(v)} = By_i^{(v)} + d_i^{(v)}$
 $x_2^{(v-1)} = \max\{y_i^{(v-1)}, g(x_i, \tau_{v-1})\}$
for $i = 1 : N - 1$ **do**
while (**do** $|x_1 - x_2| > eps$)
 $x_1 = x_2$
 $temp = (b_i - \sum_{j=i-1} (C_{ij}x_{2j}^{(k-1)}) - \sum_{j=i+1} C_{ij}x_{2j}^{(k)})$
 $x_{2i} = \max\{\omega temp + (1 - \omega)x_{1i}, g(x_{i+1}, \tau_j)\}$
end while
end for
 $y(\tau_j, x_{i+1}) = x_{2i}$
end for
 $exact = \text{Interpolate}(M : M + 1, y(M : M + 1, N/2))$
 $Final\ Value = K \exp(-0.5(k_1 - 1)exact - 0.25((k_1 - 1)^2 + 4k_1)\tau_{max})exact$

7.1. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ

το Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης για $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$ και αντίστοιχα για την επαναληπτική μέθοδο *PSOR* με $\omega = 1.3$ και $\text{eps} = 1e - 7$, θα έχουμε:

Πίνακας 7.1: Αριθμητικά Αποτελέσματα Δικαιώματος Πώλησης για τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, των Πεπερασμένων Διαφορών και του Διωνυμικού Μοντέλου για $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$

$M = N$	FEM	FDM	Binomial
300	4,284484	4,27665	4,28300
500	4,284440	4,28006	4,28349
800	4,284320	4,28245	4,28377
1600	4,284167	4,283809	4,28399
2000	4,284184	4,283932	4,284040

Από τα αποτελέσματα του αλγορίθμου μας και βασιζόμενοι στο [2] ότι η υπολογιστική μας λύση για το Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης με τα ανωτέρω χαρακτηριστικά είναι 4,2842, παρατηρούμε ότι η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων προσεγγίζει ελαφρώς καλύτερα από τις υπόλοιπες μεθόδους την ακριβή μας λύση. Τέλος το διωνυμικό μοντέλο είναι πολύ πιο γρήγορο από τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, όμως έχει πιο αργή σύγκλιση στην ακριβή μας λύση, και η προσέγγισή της έχει παρόμοια αποτελέσματα με αυτή των δύο μεθόδων.

7.1. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ

Αλγόριθμος 7.1.2 Ο αλγόριθμος Πρόωρης Άσκησης για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης

$$\varepsilon^* = K \cdot 10^{-5}$$

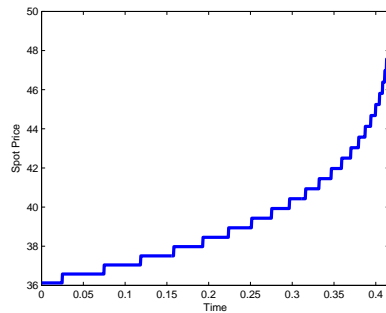
$$if_* = \max\{i : |P(0, S_i) + S_i - K| < \varepsilon^*\}$$

if $S_0 < S_{if_*}$ **then**

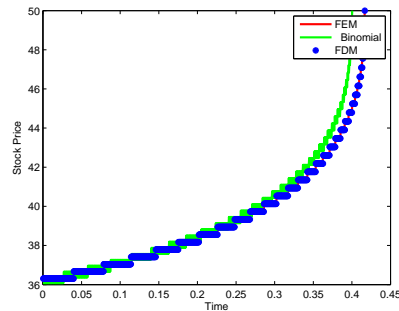
STOP
end if

7.1.1 Προσδιορισμός Καμπύλης Πρόωρης Άσκησης

Για τον προσδιορισμό της πρόωρης άσκησης βασιζόμενοι στο [2] θα έχουμε τον Αλγόριθμο 7.1.2



Σχήμα 7.3: Καμπύλη Πρόωρης Άσκησης του Αμερικάνικου Δικαιώματος Πώλησης με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων για $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$



Σχήμα 7.4: Καμπύλη Πρόωρης Άσκησης για τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (κόκκινη γραμμή) για την Μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών (μπλέ άστρο) και με το Διωνυμικό Μοντέλο (πράσινη γραμμή) για $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$

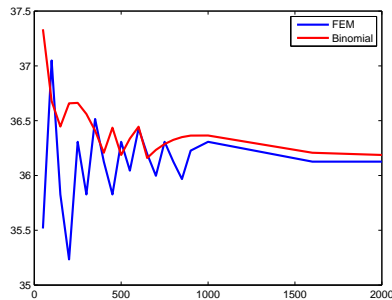
Από το Σχήμα 7.4 παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος πρόωρης άσκησης για την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων έχει όμοια αποτελέσματα με τον αντίστοιχο της μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών.

Βασιζόμενοι στον Αλγόριθμο 7.1.2 παρουσιάζουμε στον πίνακα 7.2 την τιμή πρόωρης άσκησης για το Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης με $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$ Από τα στοιχεία τα αποτελέσματα του αλγοριθμού η τιμή πρόωρης άσκησης για $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$ θα είναι 36,1264.

7.1. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ

Πίνακας 7.2: Αριθμητικά Αποτελέσματα Πρόωρης Άσκησης με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων για $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$

$M = N$	$S_f(0)$
300	35,8266
500	36,3075
800	36,1264
1600	36,1264
2000	36,1264



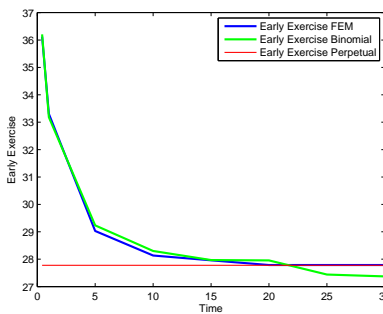
Σχήμα 7.5: Σύγκριση της Πρόωρης Άσκησης S_f για την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων και το Διωνυμικό Μοντέλο για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$ $T = 5/12$

Από τα στοιχεία του Πίνακα 7.3 και δεδομένου ότι η πρόωρη άσκηση για το αέναο Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης, η οποία όπως παρουσιάσαμε δίνεται αναλυτικά βλέπε (1.44), για $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$ έχει τιμή 27,7778 συμπαίρνουμε ότι ο αλγόριθμος πρόωρης άσκησης για την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων έχει ικανοποιητικά αποτελέσματα.

7.1. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ

Πίνακας 7.3: Αριθμητικά Αποτελέσματα Πρόωρης Άσκησης με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων και το Διωνυμικό Μοντέλο ως προς το Αντίστοιχο Αέναο Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης για $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$ με $M = N = 1600$

T	FEM	Binomial
5/12	36,1264	36,2078
1	33,3072	33,1825
5	29,0284	29,2350
10	28,1352	28,2986
15	27,9599	27,9684
20	27,7857	27,9564
25	27,7857	27,4406
30	27,7857	27,3722

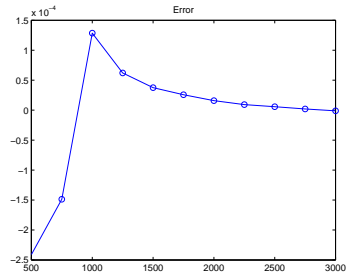


Σχήμα 7.6: Σύγκλιση της Πρόωρης Άσκησης για την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων και το Διωνυμικό Μοντέλο ως προς το Αέναο Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης για $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$ με χρόνο άσκησης έως $T = 30$ με $M = N = 1600$

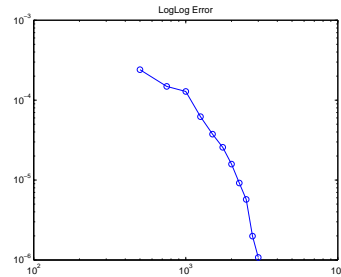
7.1.2 Αριθμητικά Αποτελέσματα για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης

Στη συνέχεια παραθέτουμε το σφάλμα, το log-απόλυτο σφάλμα, τη σύγκλιση και τον υπολογιστικό χρόνο για τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για το Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης με τα ανωτέρω χαρακτηριστικά.

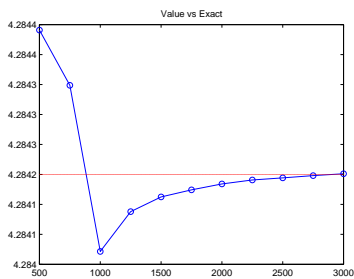
7.1. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ



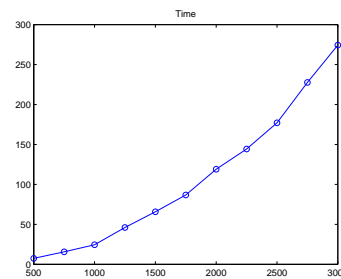
(α) Error



(β) Log Error



(γ) Convergence

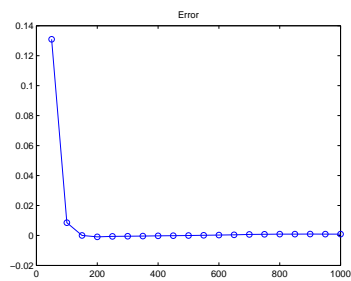


(δ) Computational Time

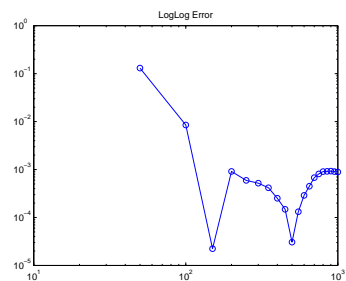
Σχήμα 7.7: Αριθμητικά Αποτελέσματα για τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων για το Δικαίωμα Πωλήσης για $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$

Αντίστοιχα για $S = K = 100$, $r = 6\%$, $\sigma = 0.4$, $\omega = 1.15$ και $T = 0.5$ και βασιζόμενοι στο [19] όπου η υπολογιστική λύση $P(S, T)$ είναι ο αριθμητικός μέσος 1000 βημάτων και 1001 βημάτων του διωνυμικού μοντέλου με τιμή 9,9458 θα έχουμε:

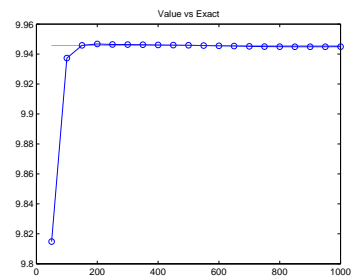
7.1. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ



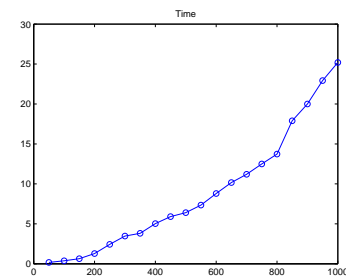
(α') Error



(β') Log Error



(γ') Convergence

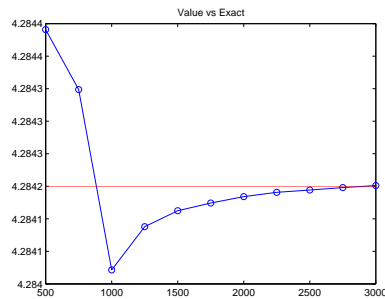


(δ') Computational Time

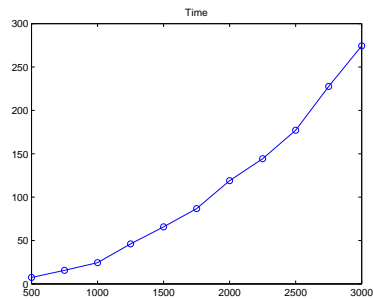
Σχήμα 7.8: Αριθμητικά Αποτελέσματα για τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πωλήσης για $S = K = 100$, $r = 6\%$, $\sigma = 0.4$, $\omega = 1.15$ και $T = 0.5$

7.1. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ

Αξίζει να επισημανθεί η σημασία του συντελεστή eps στον αλγόριθμο της επαναληπτικής μεθόδου $PSOR$ για τον οποίο παρατηρείται ότι όσο αυξάνεις την ακρίβεια του, αυξάνει η αντίστοιχη σύγκλιση της μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων στην αναλυτική μας λύση, αυξάνει όμως σημαντικά και ο αντίστοιχος υπολογιστικός χρόνος για την υλοποίηση του αλγορίθμου. Ενδεικτικά για $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$, $\omega = 1.30$ και $eps = 1e - 7$ θα έχουμε:



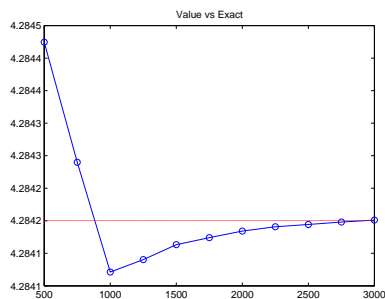
(α') Convergence



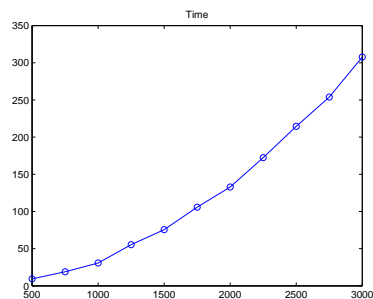
(β') Computational Time

Σχήμα 7.9: Σύγκλιση και ο αντίστοιχος υπολογιστικός χρόνος για την μέθοδο των Πεπερασμένων στοιχείων για $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$ και $eps = 1e - 7$

Αντίστοιχα για $eps = 1e - 8$ θα έχουμε:



(α') Convergence

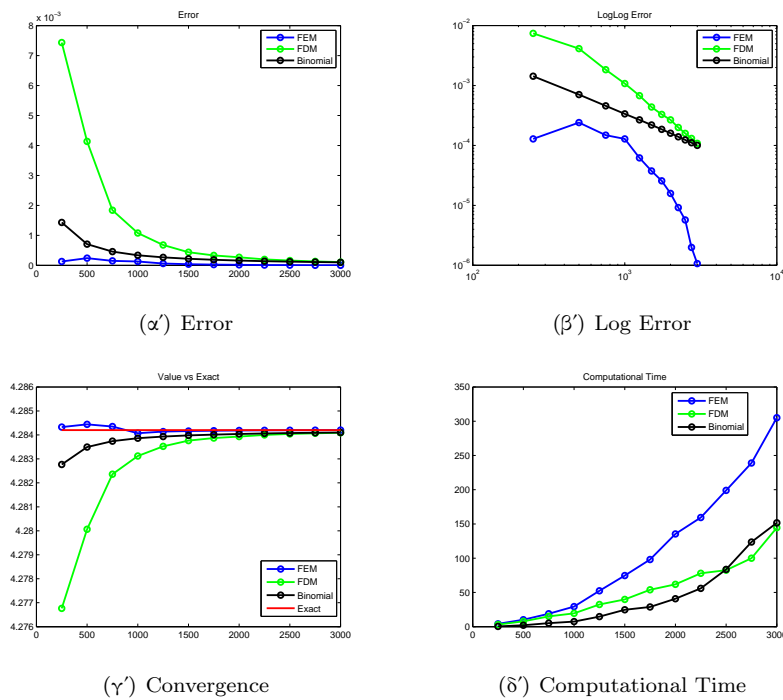


(β') Computational Time

Σχήμα 7.10: Σύγκλιση και ο αντίστοιχος υπολογιστικός χρόνος για την μέθοδο των Πεπερασμένων στοιχείων για $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$ και $eps = 1e - 8$

7.1. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ

Στο Σχήμα 7.11 παραθέτουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα για την μέθοδο των Πεπερασμένων στοιχείων την μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών και του Διωνυμικού Μοντέλου. Από τα Σχήμα 7.11(α'), Σχήμα 7.11(β'), Σχήμα 7.11(γ'), και Σχήμα 7.11(δ'), παρατηρούμε ότι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων συγκλίνει καλύτερα από την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών και του διωνυμικού μοντέλου, ωστόσο, ο υπολογιστικός χρόνος είναι αισθητά μεγαλύτερος σε σχέση με τις υπόλοιπες δύο μεθόδους.

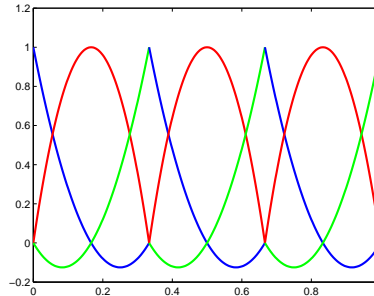


Σχήμα 7.11: Σύγκριση των Αριθμητικών Αποτελεσμάτων για τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, των Πεπερασμένων Διαφορών και του Διωνυμικού Μοντέλου, για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης με $S = K = 50$, $r = 0.1\%$, $\sigma = 0.4$, $\omega = 1.3$ και $T = 5/12$ $eps = 1e - 7$ με αριθμό βημάτων έως 3000

7.1.3 Τετραγωνικές Συναρτήσεις Βάσης για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε την χρήση των τετραγωνικών συναρτήσεων (Quadratic shape functions) ως βάση υψηλότερης τάξης στοιχείων, για την αποτίμηση του Αμερικάνικου Δικαιώματος Πώλησης. Ορίζουμε με $V_N = \{v(x), \text{ τέτοια ώστε η } v(x) \text{ είναι κατά τμήματα τετραγωνική συνάρτηση}\}$

7.1. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ



Σχήμα 7.12: Τετραγωνικές Συναρτήσεις

Η τετραγωνική συνάρτηση θα έχει την μορφή:

$$\varphi(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

και θα πρέπει να ικανοποιεί:

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} \varphi(x) \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Συνεπώς θα έχουμε:

$$a_{i-1} x_{i-1}^2 + b_{i-1} x_{i-1} + c_{i-1} = a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i$$

Υπάρχουν $N-1$ εσωτερικοί κόμβοι και συνολικοί βαθμοί ελευθερίας είναι $3N - (N-1) \cdot 2 = 2N-1$. Συνεπώς ορίζουμε τις μεταβλητές

$$z_{2i} = x_i, \quad z_{2i+1} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad z_{2i+2} = x_{i+1}$$

και

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{για } i = j \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η βάση στο $[x_i, x_{i+1}]$ θα έχει την ακόλουθη μορφή

$$\varphi_{2i}(z) = \begin{cases} 0 & z < x_i \\ \frac{(z-z_{2i+1})(z-z_{2i+2})}{(z_{2i}-z_{2i+1})(z_{2i}-z_{2i+2})} & x_{i-1} \leq z < x_i \\ 0 & x_{i+1} < z \end{cases}$$

$$\varphi_{2i+1}(z) = \begin{cases} 0 & z < x_{i+1} \\ \frac{(z-z_{2i})(z-z_{2i+2})}{(z_{2i+1}-z_{2i+2})(z_{2i+1}-z_{2i})} & x_i \leq z < x_{i+1} \\ 0 & x_{i+1} < z \end{cases}$$

7.1. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ

και

$$\varphi_{2i+2}(z) = \begin{cases} 0 & z < x_i \\ \frac{(z-z_{2i})(z-z_{2i+1})}{(z_{2i+2}-z_{2i})(z_{2i+2}-z_{2i+1})} & x_i \leq z < x_{i+1} \\ 0 & x_{i+1} < z \end{cases}$$

Συνεπώς η χωρική διακριτοποίηση με χρήση των τετραγωνικών συναρτησέων θα έχει την μορφή:

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{2N-1} y_{h,i} \varphi_i(x)$$

Με χρήση της ολοκλήρωσης Gauss τύπου 3, δηλαδή με τρία βαρή w_1, w_2, w_3 και σημεία x_1, x_2, x_3 τέτοια ώστε:

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = w_1 g(x_1) + w_2 g(x_2) + w_3 g(x_3)$$

με $w_1 = w_3 = 5/9$ $w_2 = 8/9$ και $x_1 = -\sqrt{3/5}$ $x_2 = 0$ $x_3 = \sqrt{3/5}$ Ευκόλα μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία του τοπικού πίνακα μάζας B^{e_i} και του stiffness A^{e_i}

$$B^{e_i} = \begin{pmatrix} \int_{e_i} \varphi_{2i} \varphi_{2i} dx & \int_{e_i} \varphi_{2i} \varphi_{2i+1} dx & \int_{e_i} \varphi_{2i} \varphi_{2i+2} dx \\ \int_{e_i} \varphi_{2i+1} \varphi_{2i} dx & \int_{e_i} \varphi_{2i+1} \varphi_{2i+1} dx & \int_{e_i} \varphi_{2i+1} \varphi_{2i+2} dx \\ \int_{e_i} \varphi_{2i+2} \varphi_{2i} dx & \int_{e_i} \varphi_{2i+2} \varphi_{2i+1} dx & \int_{e_i} \varphi_{2i+2} \varphi_{2i+2} dx \end{pmatrix}$$

και

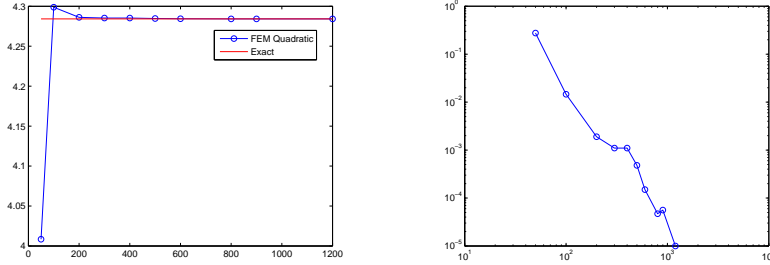
$$A^{e_i} = \begin{pmatrix} \int_{e_i} \varphi'_{2i} \varphi'_{2i} dx & \int_{e_i} \varphi'_{2i} \varphi'_{2i+1} dx & \int_{e_i} \varphi'_{2i} \varphi'_{2i+2} dx \\ \int_{e_i} \varphi'_{2i+1} \varphi'_{2i} dx & \int_{e_i} \varphi'_{2i+1} \varphi'_{2i+1} dx & \int_{e_i} \varphi'_{2i+1} \varphi'_{2i+2} dx \\ \int_{e_i} \varphi'_{2i+2} \varphi'_{2i} dx & \int_{e_i} \varphi'_{2i+2} \varphi'_{2i+1} dx & \int_{e_i} \varphi'_{2i+2} \varphi'_{2i+2} dx \end{pmatrix}$$

Τέλος οι πίνακες C και b δίνονται από τις (4.45) και (4.46) με εφαρμογή αντίστοιχων συνοριακών συνθηκών. Εν αντιθέσει με τις πεπερασμένες διαφορές και τα P1 πεπερασμένα στοιχεία ο υπολογιστικός χρόνος, για την υλοποίηση της PSOR είναι αρκετά μεγάλος, για τον λόγο αυτό, παίρνουμε μικρότερο αριθμό βημάτων.

Πίνακας 7.4: Αριθμητικά Αποτελέσματα για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης με χρήση τετραγωνικών συναρτήσεων P2(FEM) με $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$

$M = N$	P2 FEM	Sf P2
300	4,28535	35,8265
500	4,28435	36,3075
800	4,28414	36,1263
1200	4,28421	36,1263

7.1. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ



(α) Convergence P2 για $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$, (β) Log Error P2 για $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$

Σχήμα 7.13: Συγκλίση και Log Σφάλμα για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης με χρήση τετραγωνικών συναρτήσεων, για $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$

7.1.4 Τα Greeks για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης

Τέλος για τα *Greeks* εν αντιθέσει με τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα όπου υπάρχουν αναλυτικές σχέσεις για τον προσδιορισμό τους, στα Αμερικάνικα δικαιώματα ο προσδιορισμός του θα γίνει αριθμητικά. Στην εργασία αυτή ο προσδιορισμός γίνεται με τη χρήση των πεπερασμένων διαφορών, για τον προσδιορισμό τους με χρήση πεπερασμένων στοιχείων παραπέμπουμε στα [1], [7]. Βασιζόμενοι στο [40] με χρήση των πεπερασμένων διαφορών θα έχουμε:

Δεδομένου την τελική αξία του Αμερικάνικου διακαιωματος πώλησης από τον αλγόριθμο 7.1.1 :

$$\text{Delta}(\Delta) = \frac{P(x_{i+1}, \tau_{final}) - P(x_{i-1}, \tau_{final})}{2h} \quad (7.5)$$

$$\text{Gamma}(\Gamma) = \frac{P(x_{i+1}, \tau_{final}) - 2P(x_i, \tau_{final}) + P(x_{i-1}, \tau_{final})}{2h} \quad (7.6)$$

Αντί της χρονικής διακριτοποίησης με χρήση πεπερασμένων στοιχείων, βασίζομενοι στην σχέση αναμέσα στα *Greeks* βλέπε (1.47) θα έχουμε:

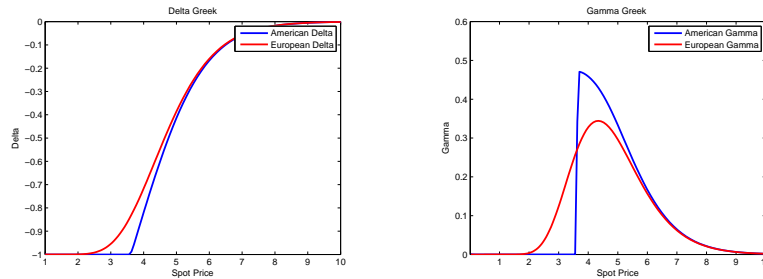
$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = rP$$

Λύνοντας ως προς Θ την ανωτέρω εξίσωση θα έχουμε:

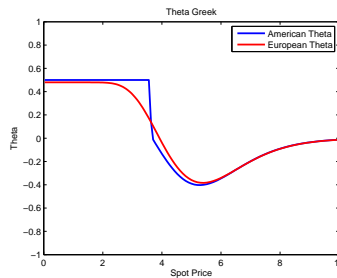
$$\Theta = rP - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma - rS\Delta$$

Για $K = 5$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$, θα έχουμε:

7.2. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΑΓΟΡΑΣ



(α') Delta για $K = 5$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$ (β') Gamma για $K = 5$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$



(γ') Theta για $K = 5$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$

Σχήμα 7.14: Τα Greeks για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης, για $K = 5$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5/12$

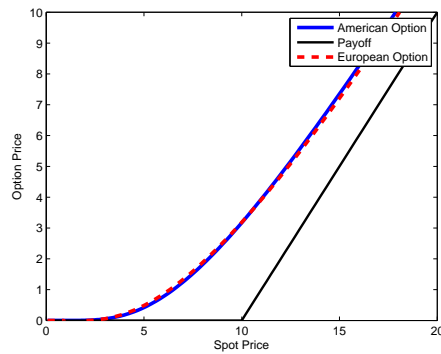
7.2 Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς

Ως δεύτερη εφαρμογή θα παρουσιάσουμε το Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς χωρίς απόδοση μερισμάτων που όπως προαναφέραμε η τιμή του θα είναι ίδια με αυτή του Ευρωπαϊκού Δικαιώματος Αγοράς και στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την ίδια εφαρμογή με απόδοση μερισμάτων με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων.

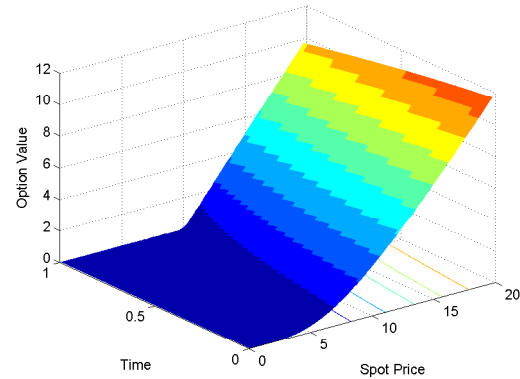
Με χρήση της (3.32) ως συνάρτηση εμπόδιο, μπορούμε να κάνουμε την διακριοποίηση μας με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και των πεπερασμένων διαφορών αντίστοιχα.

Συνεπώς για $K = 10$, $r = 0.25$, $\sigma = 0.6$, $T = 1$ και χωρίς απόδοση μερισμάτων στο υποκείμενο προϊόν, με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων θα έχουμε:

7.2. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΑΓΟΡΑΣ



Σχήμα 7.15: Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς χωρίς καταβολή μερισμάτων για $K = 10$, $r = 0.25$, $\sigma = 0.6$, $T = 1$



Σχήμα 7.16: Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς χωρίς καταβολή μερισμάτων για $K = 10$, $r = 0.25$, $\sigma = 0.6$, $T = 1$ στις 3 διαστάσεις

Πίνακας 7.5: Αριθμητικά Αποτελέσματα των μεθόδων των Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM), των Πεπερασμένων Διαφορών και του Διωνυμικού Μοντέλου για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς (Χωρίς Μερίσματα) για $K = 10$, $r = 0.25$, $\sigma = 0.6$, $T = 1$

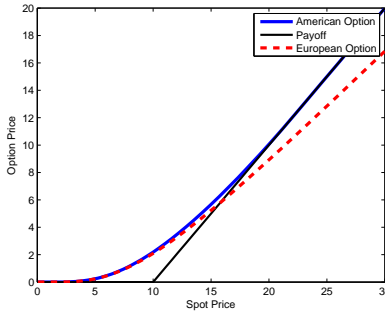
$M = N$	FEM	FDM	Binomial
150	3,3742	3,3752	3,3692
300	3,1955	3,3761	3,3728
500	3,1713	3,3763	3,3743
800	3,1559	3,3764	3,3751
1600	3,1488	3,3764	3,3758
2000	3,1276	3,3764	3,3759

Από τα στοιχεία του Πίνακα 7.5 και δεδομένου ότι η αναλυτική λύση για το Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς είναι 3,3766, παρατηρούμε εν αντιθέσει με τα πεπερασμένα στοιχεία, η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών προσεγγίζει πολύ καλά την αναλυτική μας λύση.

Στον Πίνακα 7.6 παρουσιάζουμε το Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς στην περίπτωση καταβολής μερισμάτων για $K = 10$, $r = 0.25$, $\sigma = 0.6$, $T = 1$ και μερίσμα $\delta = 0.2$

Από τα αριθμητικά αποτελέσματα του Πίνακα 7.6 και βασιζόμενοι στο [2] όπου η υπολογιστική μας λύση είναι 2,18728 παρατηρούμε ότι και οι τρεις μέθοδοι συγκλίνουν εξίσου καλά στην αναλυτική μας λύση. Στο Σχήμα 7.18 παρουσιάζουμε το σφάλμα, τον υπολογιστικό χρόνο, και τη σύγκλιση στην

7.2. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΑΓΟΡΑΣ



Σχήμα 7.17: Το Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς για $K = 10$, $r = 0.25$, $\sigma = 0.6$, $T = 1$ με χρήση μερίσματος $\delta = 0.2$

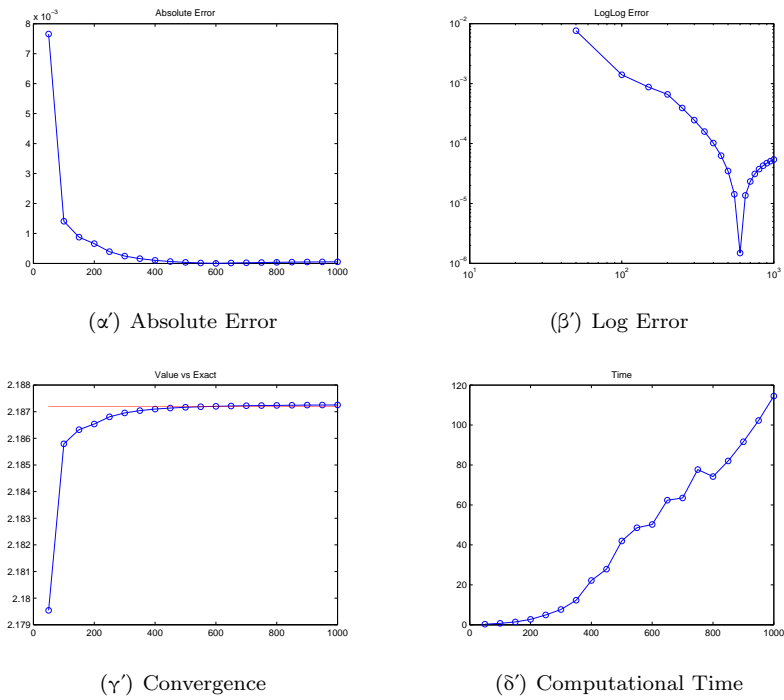
Πίνακας 7.6: Αριθμητικά Αποτελέσματα των μεθόδων των Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM), των Πεπερασμένων Διαφορών και του Διωνυμικού Μοντέλου για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς για $K = 10$, $r = 0.25$, $\sigma = 0.6$, $T = 1$ με χρήση μερίσματος $\delta = 0.2$

$M = N$	FEM	FDM	Binomial
300	2,1870	2,1866	2,1876
500	2,1872	2,1870	2,1875
800	2,1872	2,1872	2,1874
1600	2,1873	2,1872	2,1874
2000	2,1873	2,1872	2,1873

αναλυτική μας λύση, για τη μεθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Τέλος η διακριτοποίηση των Greeks είναι ακριβώς ίδια με αυτή της διακριτοποίησης στο Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης των οποίων η περιγραφή έγινε στην προηγούμενη ενότητα.

7.2. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΑΓΟΡΑΣ



Σχήμα 7.18: Αριθμητικά Αποτελέσματα για το Δικαίωμα Αγοράς, με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων για $K = 10$, $r = 0.25$, $\sigma = 0.6$, $T = 1$, με χρήση μερίσματος $\delta = 0.2$

7.3. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ ΜΕ ΔΥΟ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ

7.3 Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης με Δύο Υποκείμενα Προϊόντα

Βασιζόμενοι στη διακριτοποίηση της γενικευμένης εξίσωσης διάχυσης με χρήση πεπερασμένων στοιχείων, που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 6 είμαστε έτοιμοι για την τιμολόγηση Αμερικάνικων δικαιώματων πώλησης με χρήση δύο υποκείμενων προϊόντων.

Η εξίσωση Black Scholes που περιγράφει το Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης με δύο υποκείμενα προϊόντα δίνεται από την:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma_1^2 S_1^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S_1^2} + \frac{\sigma_2^2 S_2^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S_2^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 P}{\partial S_1 \partial S_2} + r S_1 \frac{\partial P}{\partial S_1} + r S_2 \frac{\partial P}{\partial S_2} - r P = 0 \quad (7.7)$$

η οποία όπως παρουσιάσαμε μετασχηματίζεται στην (6.4).

Η συνάρτηση αποπληρωμής μπορεί να έχει πολλές μορφές ενδεικτικά:

1. $P(S_1, S_2, T) = \max\{0, K - (a_1 S_1 + a_2 S_2)\}$ με $a_1 + a_2 = 1$
2. $P(S_1, S_2, T) = \max\{S_1, S_2\}$
3. $P(S_1, S_2, T) = \max_{1 \leq i \leq 2} \{\max\{0, K - S_i\}\}$
4. $P(S_1, S_2, T) = \max(K - \max\{S_1, S_2\})$
5. $P(S_1, S_2, T) = \max(K - \min\{S_1, S_2\})$

Για τη διακριτοποίηση μας κάνουμε χρήση της 5). Επισημαίνουμε ότι για κάθε συνάρτηση αποπληρωμής εφαρμόζουμε διαφορετικές συνοριακές συνθήκες.

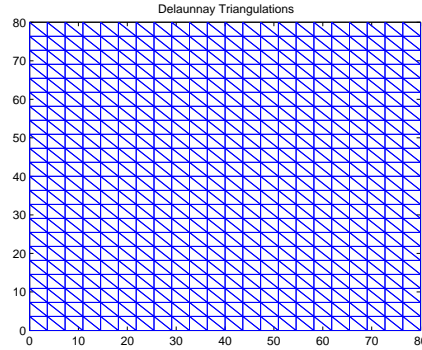
Η διακριτοποίηση των πεπερασμένων στοιχείων στις δυο διαστάσεις, ξεκινάει από την κατασκευή του πλέγματος της διακριτοποίησης μας. Υπάρχουν αρκετά προγράμματα τα οποία κατασκευάζουν περίπλοκα πλέγματα, όπως το Freefem++, Gmsh, καθώς και το pde toolbox του MATLAB.

Στην εργασία αυτή θα κατασκευάσουμε ένα απλό πλέγμα ομοιόμορφης διακριτοποίησης $[0, 2S_1] \times [0, 2S_2]$, βασιζόμενοι στους ομοιόμορφους τριγωνισμούς Delaunay που αναπαράγει το MATLAB με χρήση της συνάρτησης delaunay.

Στο Σχήμα 7.19 παρουσιάζουμε το πλέγμα διακριτοποίησης για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης με δύο υποκείμενα προϊόντα με τιμές $S_1 = S_2 = S_0 = 40$. Βασιζόμενοι στην διακριτοποίηση για το Worst of Two Assets, είμαστε έτοιμοι για την εφαρμογή κατάλληλων συνοριακών συνθηκών. Στο [35] προτείνει ως κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, την εφαρμογή συνοριακών συνθηκών Neumann στην κάτω και στην αριστερή πλευρά του χωρίου της διακριτοποίησης μας και συνοριακές συνθήκες Dirichlet με τιμή K στην άνω και στην δεξιά πλευρά του χωρίου της διακριτοποίησης μας.

Για την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών Neumann θα πρέπει να

7.3. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ ΜΕ ΔΥΟ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ



Σχήμα 7.19: Πλέγμα Διαμέρισης $[0, 2S_1] \times [0, 2S_2]$, για το Δικαίωμα Πώλησης, με χρήση Ομοιόμορφων Τριγωνισμών, με $S_1 = S_2 = S_0 = 40$.

υπολογιστεί αριθμητικά το ακόλουθο ολοκλήρωμα, $-\int_{\partial\Omega} \vec{n} ad\varsigma$, και βασιζόμενοι στο [27] θα έχουμε:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{n} ad\varsigma = \frac{|J|}{2} a(x_m, y_m)$$

όπου a η κατάλληλη συνάρτηση για τη συνοριακή συνθήκη Neumann (στην περίπτωση μας θα είναι $a = 0$) και x_m, y_m οι συντεταγμένες στο μέσο (μεταξύ δύο κόμβων), στην περιοχή που εφαρμόζουμε τη συνοριακή συνθήκη Neumann. Αντίστοιχα, για την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών Dirichlet, επιλύουμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

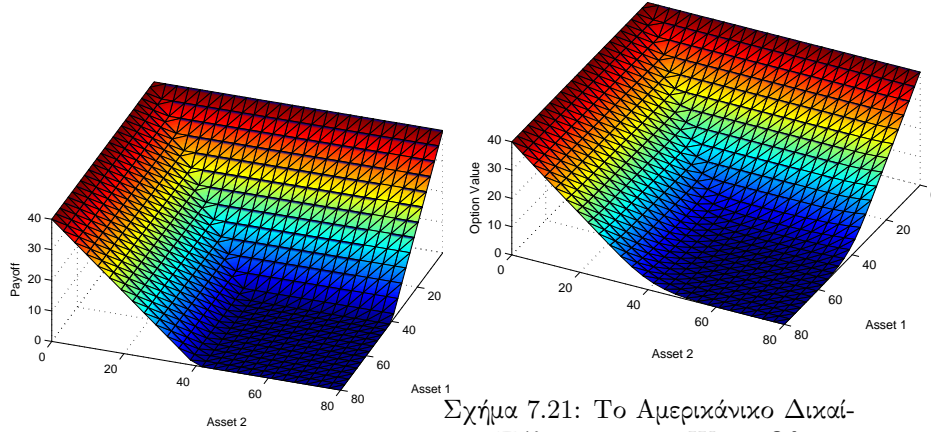
$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12}^T & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ p_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b_D \end{pmatrix}$$

όπου p οι τιμές στα σημεία των ελεύθερων κόμβων και p_D οι τιμές στα σημεία όπου εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet, τις οποίες και γνωρίζουμε εκ των προτέρων. Εναλλακτικά μπορεί να γίνει απευθείας ανάθεση των συνοριακών συνθηκών στα σημεία μας αφού πρώτα λύσουμε το γραμμικό μας σύστημα, παραπέμπουμε στο [15].

Πίνακας 7.7: Αριθμητικά Αποτελέσματα Worst Of Two Assets για $S_1 = S_2 = 40$, $K = 40$, $T = 0.5$, $r = 0.05$, και $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$

Στοιχεία	$dt = 0.01$	$dt = 0.02$
800	4,1860	4,1868
1058	4,3714	4,3716
1250	4,3389	4,3396
1458	4,3144	4,3188

7.3. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ ΜΕ ΔΥΟ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ



Σχήμα 7.20: Η συνάρτηση Αποπληρωμής για το Worst Of Two Assets

Σχήμα 7.21: Το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης για το Worst Of Two Assets, με $S_1 = S_2 = 40$, $K = 40$, $T = 0.5$, $r = 0.05$, και $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$

Για 1250 στοιχεία και βασιζόμενοι στο [20] όπου για $\Delta t = 0.02$ και 2664 στοιχεία, έχουμε 4,336 ως αριθμητική λύση, παρατηρούμε ότι η μέθοδος μας είναι ικανοποιητική.

Για τη διακριτοποίηση δικαιωμάτων προαίρεσης με δύο υποκείμενα προϊόντα με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών παραπέμπουμε στο [40].

Τέλος για τη διακριτοποίηση των Greeks όπως και στο 1d Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης, η διακριτοποίηση τους θα γίνει με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

Συνεπώς για τα Delta Greeks για κάθε υποκείμενο προϊόν, με χρήση κεντρικών διαφορών θα έχουμε:

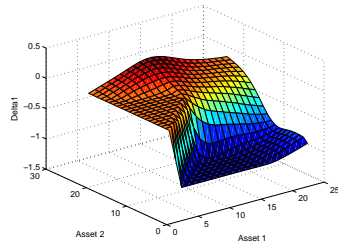
$$Delta(\Delta)_i = \frac{P(\tilde{S}_{i+1}, \tau_{end}) - P(\tilde{S}_{i-1}, \tau_{end})}{2h}$$

όπου $\tilde{S} = (S_1, S_2)$

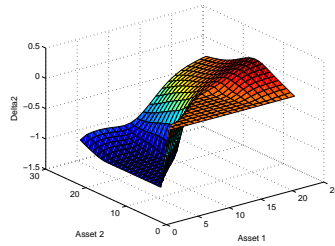
Αντίστοιχα για τα Gamma Greeks για κάθε υποκείμενο προϊόν:

$$Gamma(\Gamma)_i = \frac{P(\tilde{S}_{i+1}, \tau_{end}) - P(\tilde{S}_i, \tau_{end}) + P(\tilde{S}_{i-1}, \tau_{end})}{h^2}$$

7.3. ΑΜΕΡΙΚΑΝΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΠΩΛΗΣΗΣ ΜΕ ΔΥΟ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ

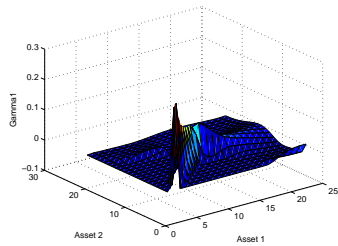


(α') Το Delta Greek για την S_1

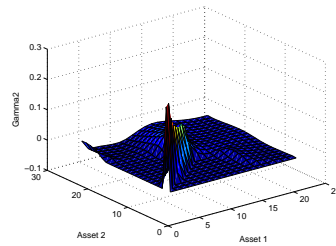


(β') Το Delta Greek για την S_2

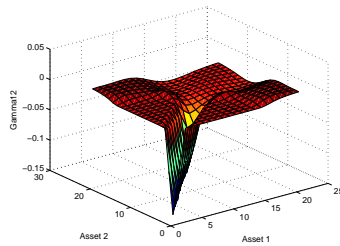
Σχήμα 7.22: Τα Delta Greeks για το 2D Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης Worst of Two Assets με $S_1 = S_2 = 40$, $K = 40$, $T = 0.5$, $r = 0.05$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$ και $\rho = 0.5$



(α') Το Gamma Greek για S_1



(β') Το Gamma Greek για S_2



(γ') Το Gamma Greek για $S_1 S_2$

Σχήμα 7.23: Τα Gamma Greeks για το 2D Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης Worst of Two Assets με $S_1 = S_2 = 40$, $K = 40$, $T = 0.5$, $r = 0.05$, και $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$

Παράρτημα Α΄

Η Αναλυτική Λύση της Black Scholes Εξίσωσης

Στο Παράρτημα αυτό παρουσιάζουμε την αναλυτική λύση για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς και πώλησης.

Για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (European Call Option) θα έχουμε:

$$C = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (A.1)$$

Αντίστοιχα για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης (European Put Option) θα έχουμε:

$$P = -SN(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) \quad (A.2)$$

όπου

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

και $N(d_1)$, $N(d_2)$ ακολουθούν την κανονική κατανομή με τύπο:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\phi^2} d\phi$$

Παράρτημα Β΄

Το Διωνυμικό Μοντέλο για την Αποτιμήςη Παραγώγων

Ένας εύκολος και εύχρηστος τρόπος τιμολόγησης παραγώγων, γίνεται με τη χρήση του διωνυμικού μοντέλου. Η ιδέα της μεθόδου βασίζεται στη διακριτοποίηση του υποκείμενου προϊόντος από έναν τυχαίο περίπατο. Υπάρχουν δύο βασικά χαρακτηριστικά στα οποία βασίζεται η μέθοδος. Το πρώτο είναι ότι οποιαδήποτε κίνηση Brown μπορεί να διακριτοποιηθεί από έναν τυχαίο περίπατο. Το δεύτερο είναι ότι οι αλλαγές στην τιμή του υποκείμενου προϊόντος, παραγματοποιούνται μόνο σε διακριτά χρονικά διαστήματα $dt, 2dt, \dots, Mdt = T$. Η τιμή του υποκείμενου προϊόντος σε κάθε χρονικό διάστημα μπορεί να λάβει μόνο δύο τιμές. Η μία τιμή είναι η uS με πιθανότητα p ενώ η άλλη τιμή είναι dS με πιθανότητα $1 - p$.

Για τη χρονική διακριτοποίηση του υποκείμενου προϊόντος θα έχουμε:

$$dt = \frac{T}{M}$$

$$t_i = idt \quad i = 0, 1, \dots, M$$

$$S_i = S(t_i)$$

Απομένει η χωρική διακριτοποίηση του υποκείμενου προϊόντος

$$\mathbb{E}[S_{i+1}] = pS_i u + (1 - p) S_i d$$

Σε αντιστοιχία με το συνεχές μοντέλο λύνοντας τη стоχαστική διαφορική εξίσωση του υποκείμενου προϊόντος και παίρνοντας μέση τιμή, παραπέμπουμε για την λύση και το αντίστοιχο ισοδύναμο μέτρο martingale στα [2], [30],[33] θα έχουμε:

$$\mathbb{E}[S_{i+1}] = S_i e^{rdt}$$

Συνεπώς θα έχουμε:

$$e^{rdt} = pu + (1 - p)d$$

Λύνοντας ως προς το αδιάφορο κινδύνου μέτρο πιθανότητας p θα έχουμε:

$$p = \frac{e^{rdt} - d}{u - d}$$

για το οποίο έχουμε $0 < p < 1$. Από την αρχή της μη επιτηδειότητας έχουμε ότι:

$$d \leq e^{rdt} \leq u$$

Αντίστοιχα

$$\mathbb{E} [S_{i+1}^2] = S_i^2 e^{(2r+\sigma^2)dt}$$

$$\text{Var} [S_{i+1}] = S_i^2 e^{2rdt} (e^{\sigma^2 dt} - 1)$$

και από τον ορισμό της διακύμανσης

$$\text{Var} [S] = \mathbb{E} [S^2] - (\mathbb{E} [S])^2$$

Συνδυάζοντας τις παράπανω εξισώσεις έχουμε:

$$\text{Var} [S_{i+1}] = p(S_i u)^2 + (1 - p)(S_i d)^2 + S_i^2 (pu + (1 - p)d)^2$$

Άρα

$$S_i^2 e^{2rdt} (e^{\sigma^2 dt} - 1) = pS_i^2 u^2 + (1 - p) S_i^2 d^2 + S_i^2 (pu + (1 - p)d)^2$$

$$e^{2rdt+\sigma^2 dt} = pu^2 + (1 - p) d^2$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις θα έχουμε:

$$ud = 1 \tag{B'.1}$$

δεδομένου ότι $a = e^{rdt}$ θα έχουμε:

$$0 = u^2 - \underbrace{u(a^{-1} + ae^{\sigma^2 dt})}_{2b} + 1$$

και με χρήση της (B'.1) με χρήση των τύπων Vieta θα έχουμε:

$$u = b + \sqrt{b^2 - 1}$$

Συνεπώς θα έχουμε:

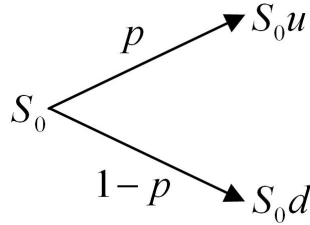
$$b = \frac{1}{2} (e^{-rdt} + e^{(r+\sigma^2)dt})$$

$$u = b + \sqrt{b^2 - 1}$$

$$d = \frac{1}{u} = b - \sqrt{b^2 - 1}$$

και

$$p = \frac{e^{rdt} - d}{u - d}$$



Σχήμα Β'.1: Το Διωνυμικό Μοντέλο

Η αντίστοιχη διακριτοποίηση του υποκείμενου προϊόντος δεδομένου ότι η ρίζα του δέντρου είναι $S_0 = s_0$ θα είναι:

for $i = 1, 2, \dots, M$

$$S_{ji} = S_0 u^j d^{i-j}, \quad j = 0, 1, \dots, i$$

end

Για την τιμολόγηση των παραγώγων θα έχουμε, για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς

$$V(S(t_M), t_M) = \max\{S(t_M) - K, 0\}$$

Αντίστοιχα για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης θα έχουμε:

$$V(S(t_M), t_M) = \max\{K - S(t_M), 0\}$$

και δεδομένου ότι

$$V_i = e^{-rdt} \mathbb{E}[V_{i+1}]$$

οδηγούμεστε:

$$V_{ji} = e^{-rdt} (pV_{j+1, i+1} + (1-p)V_{j, i+1}) \quad (\text{B'.2})$$

Στην περίπτωση των Αμερικάνικων Παραγώγων

Για το Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης θα έχουμε:

$$V(S(t_M), t_M) = \max\{K - S(t_M), 0\}$$

και

$$V_{ji} = \max\left\{ \max\{K - S_{ji}, 0\}, e^{-rdt} (pV_{j+1, i+1} + (1-p)V_{j, i+1}) \right\} \quad (\text{B'.3})$$

και αντίστοιχα για το Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς θα έχουμε:

$$V(S(t_M), t_M) = \max\{S(t_M) - K, 0\}$$

$$V_{ji} = \max \left\{ \max \{S_{ji} - K, 0\}, e^{-rdt} (pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}) \right\} \quad (B'.4)$$

Τα πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι αρκετά όσα και τα αντίστοιχα μειονεκτήματα. Πρώτα από όλα είναι ένας εύκολος και γρήγορος τρόπος υπολογισμού των παραγώγων, ιδιαίτερα σε παράγωγα στα οποία δεν υπάρχει αναλυτική λύση όπως στην περίπτωση των Αμερικάνικων παραγώγων. Από την άλλη πλευρά οι τιμές οι οποίες παίρνει σε χρονικό διάστημα είναι διακριτές με συγκεκριμένη πιθανότητα σε κάθε βήμα. Το γεγονός αυτό καθιστά τον αλγόριθμο μη αποδοτικό και σε πολλές περιπτώσεις τα αποτελέσματα της μεθόδου διαφέρουν αισθητά από τα αποτελέσματα πιο αξιόπιστων μεθόδων όπως αυτής της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων, πεπερασμένων διαφορών αλλά και της μεθόδου Monte Carlo.

Παράρτημα Γ'

Οι Αλγόριθμοι στην MATLAB®

Παρουσιάζουμε τους αντίστοιχους αλγόριθμους για τα ανωτέρω προβλήματα.
Ο αλγόριθμος για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης με την
χρήση των Πεπερασμένων Στοιχείων.

```
1 function [] = AmericanOptionFEM()  
2 clc;  
3 close all;  
4 clear all;  
5 M=300;  
6 N=300;  
7 T=5/12;  
8 E=50;  
9 Smax=50;  
10 r=0.1;  
11 sigma=0.4;  
12 delta=0.0;  
13 type='Put';  
14 k1=(2*r)/(sigma^2);  
15 k2=2*(r-delta)/sigma^2;  
16 tic;  
17 [V,V1]=America(E,Smax,r,sigma,T,M,N,k1,type);  
18 toc;  
19 [Call,Put]=blsprice(Smax,E,r,T,sigma,delta);  
20 disp('The European Option Value:');  
21 switch type  
22     case 'Put'  
23         disp(Put)  
24     case 'Call'
```

```

25 disp(Call);
26 end
27 disp('The American Option Value using FEM: ')
28 disp(V);
29 disp(toc)
30 S1=E*exp(xvalue);
31 [C1,P1]=blsprice(S1,E,r,T,sigma,delta);
32
33
34 a1=plot(S1,V1(:,end),'blue');
35 set(a1,'LineWidth',3);
36 hold on
37 a2=plot(S1,V1(:,1),'black');
38 set(a2,'LineWidth',2)
39 hold off
40 xlabel('Spot Price');
41 ylabel('Option Price');
42 axis([0 2*E 0 E]);
43
44 figure(2);
45 tauvalue1=T-tauvalue*2/sigma^2;
46 tauvalue1=fliplr(tauvalue1);
47 Sf=EarlyExercise(S1,V1,E);
48 Sf=fliplr(Sf);
49 a3=plot(tauvalue1,Sf);
50 set(a3,'LineWidth',3);
51 ylabel('Spot Price');
52 xlabel('Time');
53 title('Free Boundary');
54 str='$\mathcal{S}=\left((t,x):\ , P(t,x)=(K-x)^{+}\right)$';
55 str1='$rP-P_{t}-rxP_{x}-\frac{1}{2}\sigma^{2}x^{2}P_{xx}=0$';
56 text(0.47,34.2,str,'interpreter','latex');
57 text(0.46,33.1,str1,'interpreter','latex');
58 str2='$\mathcal{C}=\left((t,x):\ , P(t,x)>(K-x)^{+}\right)$';
59 str3='$rP-P_{t}-rxP_{x}-\frac{1}{2}\sigma^{2}x^{2}P_{xx}=rK$';
60 text(0.3,43.7,str2,'interpreter','latex');
61 text(0.1,41,str3,'interpreter','latex');
62 plotrange = S1>=0 & S1<=2*E;
63 V2= E*exp(-.5*(k1-1)*xvalue)*exp(-(.25*(k1-1)^2+k1)*
tauvalue).*v;
64 Sp = S1(plotrange);
65 Vp = V2(plotrange,:);

```

```

66 [ t_grid , Sp_grid]=meshgrid(tauvalue1 ,Sp);
67
68 figure (3);
69
70 Vp=fliplr (Vp);
71 surfc (Sp_grid , t_grid ,Vp, 'LineStyle ', 'none ');
72 colormap jet (10)
73 xlabel ('Spot Price ');
74 ylabel ('Time ')
75 zlabel ('Option Value ')
76
77 P=V1 (: ,N+1);
78 x0=xvalue (2:end-1);
79 Dx=xvalue (2)-xvalue (1);
80 S0=E*exp(x0);
81
82 %DELTA
83 A1=(P (3:end)-P (1:end-2))/(2*Dx);
84 DELTA=A1./S0;
85 DELTA=fliplr (DELTA);
86
87 %Gamma
88 A3=(P (3:end)-2*P (2:end-1)+P (1:end-2))./(Dx^2);
89 GAMMA=(A3-A1)./S0./S0;
90
91 %Theta
92 THETA=zeros (M-1,1);
93 for i=1:M-1
94     THETA(i)=-0.5*sigma ^2.*(E*exp(xvalue(i)))^2.*GAMMA(i) ...
95     -r*(E*exp(xvalue(i)))*DELTA(i)+r*V1(i,N+1);
96 end
97
98 [DELTACALL, DELTAPUT]=blsdelta (S0,E,r,T,sigma,0);
99 GAMMA2=blsgamma (S0,E,r,T,sigma,0);
100 [THETACALL, THETAPUT]=blsttheta (S0,E,r,T,sigma,0);
101
102 figure (4);
103 switch type
104     case 'Put'
105     az=plot (S0,DELTA);
106     set (az, 'LineWidth ',2);
107     hold on
108     az1=plot (S0,DELTAPUT, 'red ');
109     set (az1, 'LineWidth ',2);
110     hold off
111     axis ([1 2*E -1 0]);

```

```

112     case 'Call'
113     az=plot(S0,DELTA);
114     set(az,'LineWidth',2);
115     az1=plot(S0,DELTACALL,'red');
116     set(az1,'LineWidth',2);
117     axis([1 2*E 0 1]);
118     end
119     xlabel('Spot Price');
120     ylabel('Delta');
121     title('Delta Greek');
122     legend('American Delta','European Delta')
123     figure(5);
124     a2=plot(S0,GAMMA);
125     set(a2,'LineWidth',2)
126     hold on
127     az2=plot(S0,GAMMA2,'red');
128     set(az2,'LineWidth',2);
129     hold off
130     axis([0.01 2*E 0 0.6]);
131     title('Gamma Greek');
132     xlabel('Spot Price');
133     ylabel('Gamma');
134     legend('American Gamma','European Gamma')
135     figure(6)
136     switch type
137         case 'Put'
138             a3=plot(S0,THETA,'blue');
139             set(a3,'linewidth',2);
140             hold on
141             az4=plot(S0,THETAPUT,'red');
142             set(az4,'LineWidth',2);
143             hold off
144             case 'Call'
145                 a3=plot(S0,THETA,'blue');
146                 set(a3,'linewidth',2);
147                 hold on
148                 az4=plot(S0,THETACALL,'red');
149                 set(az4,'LineWidth',2);
150                 hold off
151             end
152             title('Theta Greek');
153             xlabel('Spot Price');
154             ylabel('Theta')
155             legend('American Theta','European Theta')
156             axis([0 2*E -4 6])
157

```

```

158
159 function [V, V1]=America(E, Smax, r, sigma, T, M, N, k1, type)
160 theta =1/2;
161 a=5;
162 tau =0.5*sigma^2*T;
163 k1 =(2*r)/(sigma^2);
164 h =2*a/(N);
165 taustep=tau/(M);
166 xamer=log(Smax/E);
167 xvalue =(-a:h:a)';
168 tauvalue =(0:taustep:tau);
169 v = zeros(M+1,N+1);
170 v(1:N+1,1)=gobstacle(xvalue(1:N+1),tauvalue(1),type);
171
172 for j=2:M+1
173 v(1,j)=gobstacle(xvalue(1),tauvalue(j),type);
174 v(N+1,j)=gobstacle(xvalue(N+1),tauvalue(j),type);
175 end
176
177 a1=4*h/6;
178 b1=h/6;
179 d1=2/h;
180 e1=-1/h;
181 B=diag(a1*ones(N-1,1),0)+diag(b1*ones(N-2,1),1)+diag(b1*
    ones(N-2,1),-1);
182 B(1,:)=0;
183 B(N-1,:)=0;
184 B(1,1)=B(1,1)/2;
185 B(N-1,N-1)=B(N-1,N-1)/2;
186
187 A=diag(d1*ones(N-1,1),0)+diag(e1*ones(N-2,1),1)+diag(e1*
    ones(N-2,1),-1);
188 A(1,1)=A(1,1)/2;
189 A(N-1,N-1)=A(N-1,N-1)/2;
190
191 C=B+theta*taustep*A;
192 D=B-(1-theta)*taustep*A;
193 bm=zeros(N-1,1);
194 x2=zeros(N-1,1);
195 omega=1.3;
196 eps=1e-7;
197
198 for j=2:M+1
199     bm(1)=(-h/6+(theta*taustep/h))*v(1,j-1)+...
200         (-h/6+(theta*taustep/h))*v(1,j);
201     bm(N-1)=(-h/6+(theta*taustep/h))*v(N+1,j-1)+...

```

```

202         (-h/6+(theta*taustep/h))*v(N+1,j);
203     b=D*v(2:N,j-1)+bm;
204
205     x1=max(v(2:N,j-1),gobstacle(xvalue(2:N),tauvalue(j),type
206         ));
207         k=1;
208     while (norm(x1-x2)>eps)
209         x1=x2;
210         for i=1:N-1
211             if i==1
212                 temp=(b(i)-C(i,i+1)*x2(i+1))/C(i,i);
213                 x2(i) = max(omega*temp+(1-omega)*x1(i)
214                     ,...
215                     gobstacle(xvalue(i+1),tauvalue(j),type));
216             elseif i==N-1
217                 temp=(b(i)-C(i,i-1)*x2(i-1))/C(i,i);
218                 x2(i) = max(omega*temp+(1-omega)*x1(i)
219                     ,...
220                     gobstacle(xvalue(i+1),tauvalue(j),type));
221             else
222                 temp=(b(i)-C(i,i-1)*x2(i-1)-C(i,i+1)*x2(i
223                     +1))/C(i,i);
224                 x2(i) = max(omega*temp+(1-omega)*x1(i)
225                     ,...
226                     gobstacle(xvalue(i+1),tauvalue(j),type));
227             end
228         end
229         k=k+1;
230     end
231     v(2:N,j)=x2;
232 end
233
234
235
236 %obstacle function for Put and Call option respectively
237 function y = gobstacle(x,tau,type)
238     switch type
239     case 'Put'

```

```

240 y=exp(tau*1/4*((k2-1)^2+4*k1)).*max(exp(1/2*x*(k2-1))...
241 -exp(1/2*x*(k2+1)),0);
242 case 'Call'
243 y=exp(tau*1/4*((k2-1)^2+4*k1)).*max(exp(1/2*x*(k2+1))...
244 -exp(1/2*x*(k2-1)),0);
245 end
246 end
247
248 function Sf = EarlyExercise(S,V,E)
249 %temp=zeros(1,M+1);
250 Sf = zeros(1,M+1);
251 tol =E*1e-6;
252 for i=1:M+1
253 fu=(find(abs(V(:,i)-E+S)<tol));
254 Sf(i)=max(S(fu));
255 end
256 end
257
258 function [Call,Put]=BlackScholes(S,E,r,sigma,T)
259 d1=(log(S./(E*exp(-r.*T))))/((sigma*sqrt(T))...
260 +0.5*sigma*sqrt(T));
261 d2=d1-(sigma*sqrt(T));
262
263 Call=S.*normcdf(d1)-E*exp(-r*T)*normcdf(d2);
264 Put=E*exp(-r*T)*normcdf(-d2)-S.*normcdf(-d1);
265 end
266 function [CallD,PutD]=BlackScholesDiv(S,E,r,sigma,T,
267 div)
268 d1=(log(S./E)+(r-div+0.5*(sigma^2))*T)/(sqrt(T)*
269 sigma);
270 d2=d1-sqrt(T)*sigma;
271 CallD=S*normcdf(d1)-E*exp(-r*T).*normcdf(d2);
272 PutD=E*exp(-r*T)*normcdf(-d2)-S*normcdf(-d1);
273 end
274 end

```


Για το αντίστοιχο σφάλμα της μεθόδου Πεπερασμένων
Στοιχείων

```

1  function [V, timetoc]=AmericanError (M,N,E, Smax, r , sigma ,T,
      eps , delta )
2
3  type=' Call ' ;
4  k1=(2*r)/(sigma ^2);
5  k2=(2*(r-delta))/(sigma ^2);
6
7  tic ;
8  [V,V1]=America (E, Smax, r , sigma ,T,M,N,k1 ,k2 , type , eps ) ;
9  timetoc=toc ;
10
11 function [V,V1]=America (E, Smax, r , sigma ,T,M,N,k1 ,k2 , type ,
      eps )
12
13 theta =1/2;
14 a=5;
15 tau =0.5*sigma ^2*T;
16 k1 =(2*r)/(sigma ^2);
17 k2=2*(r-delta)/sigma ^2;
18 h(1) =2*a/(N);
19 xvalue (1,1)=-a;
20 for i=2:N+1
21 h(i) =2*a/(N);
22 xvalue (i,1) =xvalue (i-1,1)+h(i);
23 end
24 taustep=tau/(M);
25 xamer=log (Smax/E);
26 %xvalue =(-a:h:a)';
27 tauvalue =(0:taustep:tau);
28
29 v = zeros (M+1,N+1);
30
31 for i=1:N+1
32 v(i,1)=gobstacle (xvalue (i) ,tauvalue (1) ,type) ;
33 end
34 % boundary conditions
35 for j=2:M+1
36 v(1,j)=gobstacle (xvalue (1) ,tauvalue (j) ,type) ;
37 v(N+1,j)=gobstacle (xvalue (N+1) ,tauvalue (j) ,type) ;
38 end
39 a1 = 4.*h./6;
40 b1 = h./6;

```

```

41 d =2./h;
42 e = -1./h;
43
44 B = diag(a1(1:N-1),0)+diag(b1(1:N-2),1)+diag(b1(1:N-2)
    , -1);
45 B(1,:) =0;
46 B(N-1,:) =0;
47 B(1,1)=B(1,1)/2;
48 B(N-1,N-1)=B(N-1,N-1)/2;
49
50
51 A = diag(d(1:N-1),0)+diag(e(1:N-2),1)+ diag(e(1:N-2),-1);
52 A(1,:) =0;
53 A(N-1,:) =0;
54 A(1,1)=A(1,1)/2;
55 A(N-1,N-1)=A(N-1,N-1)/2;
56
57 C=B+theta*taustep*A;
58 D=B-(1-theta)*taustep*A;
59 bm = zeros(N-1,1);
60 x2=zeros(N-1,1);
61 omega=1.3;
62
63 jmax=1e+5;
64 for j=2:M+1
65     bm(1)=(-h(j)/6+(theta*taustep/h(j)))*v(1,j-1)+(-h(j)
        /6+(theta*taustep/h(j)))*v(1,j);
66     bm(N-1)=(-h(j)/6+(theta*taustep/h(j)))*v(N+1,j-1)+(-h
        (j)/6+(theta*taustep/h(j)))*v(N+1,j);
67     b=D*v(2:N,j-1)+bm;
68
69     x1=max(v(2:N,j-1), gobstacle(xvalue(2:N), tauvalue(j),
        type));
70         jj=1;
71         while (norm(x1-x2)>eps && (jj<jmax))
72             jj=jj+1;
73             x1=x2;
74             for i=1:N-1
75                 if i==1
76                     temp=(b(i)-C(i,i+1)*x2(i+1))/C(i,
77                         i);
78                     x2(i) = max(omega*temp+(1-omega)*
79                         x1(i), gobstacle(xvalue(i+1),
80                             tauvalue(j), type));
81                 elseif i==N-1
82                     temp=(b(i)-C(i,i-1)*x2(i-1))/C(i,

```

```

80         i);
           x2(i) = max(omega*temp+(1-omega)*
           x1(i), gobstacle(xvalue(i+1),
           tauvalue(j), type));
81     else
82         temp=(b(i)-C(i, i-1)*x2(i-1)-C(i, i
           +1)*x2(i+1))/C(i, i);
83
84         x2(i) = max(omega*temp+(1-omega)*
           x1(i), gobstacle(xvalue(i+1),
           tauvalue(j), type));
85     end
86     end
87     end
88
89     v(2:N, j)=x2;
90 end
91
92 actual_v = interp1(tauvalue(M:M+1), v(N/2+1, M:M+1), tau, '
           linear');
93 V = E*exp(-0.5*(k2-1)*xamer - 0.25*((k2-1)^2+4*k1)*tau)*
           actual_v;
94 V1 = E*exp(-.5*(k2-1)*xvalue)*exp(-(.25*(k2-1)^2+k1)*
           tauvalue).*v;
95 end
96
97 function y=gobstacle(x, tau, type)
98     switch type
99         case 'Put'
100             y=exp(tau*1/4*((k2-1)^2+4*k1)).*max(exp(1/2*x
           *(k2-1))-exp(1/2*x*(k2+1)), 0);
101         case 'Call'
102             y=exp(tau*1/4*((k2-1)^2+4*k1)).*max(exp(1/2*x
           *(k2+1))-exp(1/2*x*(k2-1)), 0);
103     end
104 end
105
106 end

1 function [ ] = ErrorPlot()
2 close all;
3 clear all;
4
5 M=500;
6 N=500;

```

```

7 E=50;
8 Smax=50;
9 r=0.1;
10 delta=0.0;
11 sigma=0.4;
12 T=5/12;
13 eps=1e-7;
14 sol=4.2842;
15 reps=20;
16 step=500;
17 sols=linspace(M,M+((reps-1).*step),1000);
18 VV1=zeros(1,reps);
19 mm=zeros(1,reps);
20 sfalmaabs=zeros(1,reps);
21 sfalma=zeros(1,reps);
22 p=zeros(1,reps);
23 timei=zeros(1,reps);
24 for i=1:reps
25 [VV1(i),timei(i)]=AmericanError(M,N,E,Smax,r,sigma,T,eps,
    delta);
26 sfalmaabs(i)=abs(VV1(i)-sol);
27 sfalma(i)=sol-VV1(i);
28 mm(i)=M;
29 if i>1
30     p(i)=log(sfalmaabs(i-1)./sfalmaabs(i))./log((10./mm(i)
    -1)./(10./mm(i)));
31 end
32 M=M+step;
33 N=N+step;
34 end
35 p
36 VV1
37 sfalmaabs
38 timei
39 figure(1);
40 plot(mm,VV1,'o-b',sols,sol,'-r')
41 title('Value vs Exact');
42 figure(2);
43 plot(mm,sfalmaabs,'o-b')
44 title('Absolute Error');
45 figure(3);
46 plot(mm,sfalma,'o-b')
47 title('Error');
48 figure(4);
49 loglog(mm,sfalmaabs,'o-b')
50 title('LogLog Error');

```

```

51 figure(5);
52 plot(mm, timei, 'o-b')
53 title('Time');
54
55 end

```

Για την χρήση των τετραγωνικών συναρτήσεων (P2 FEM)

```

1 function []=Quadratic_Fem_American_Put()
2 clc;
3 close all;
4 clear all;
5 format long
6 xmin=-5;
7 xmax=5;
8 NE =150;
9 NEP=NE+1;
10 NP= NEP+NE;%(total points)
11
12 h=(xmax-xmin)/(NE);
13
14 A=zeros(NP,NP);
15 B=zeros(NP,NP);
16
17 for ii=1:NE
18     xe_a=xmin+(ii-1)*h;
19     xe_b=xmin+ii*h;
20     e1=2*ii-1;
21     e2=2*ii;
22     e3=2*ii+1;
23     [gausspoint,gaussweight]=gauss(xe_a,xe_b);
24     [phi1,phi2,phi3]=Shape(xe_a,xe_b,gausspoint);
25     [dphi1,dphi2,dphi3]=dShape(xe_a,xe_b,gausspoint);
26 A(e1,e1)=A(e1,e1)+gaussweight*(dphi1.*dphi1);
27 A(e2,e2)=A(e2,e2)+gaussweight*(dphi2.*dphi2);
28 A(e3,e3)=A(e3,e3)+gaussweight*(dphi3.*dphi3);
29 A(e2,e1)=A(e2,e1)+gaussweight*(dphi2.*dphi1);
30 A(e2,e3)=A(e2,e3)+gaussweight*(dphi2.*dphi3);
31 A(e1,e3)=A(e1,e3)+gaussweight*(dphi1.*dphi3);
32 A(e1,e2)=A(e1,e2)+gaussweight*(dphi1.*dphi2);
33 A(e3,e2)=A(e3,e2)+gaussweight*(dphi3.*dphi2);
34 A(e3,e1)=A(e3,e1)+gaussweight*(dphi3.*dphi1);
35
36 B(e1,e1)=B(e1,e1)+gaussweight*(phi1.*phi1);
37 B(e2,e2)=B(e2,e2)+gaussweight*(phi2.*phi2);
38 B(e3,e3)=B(e3,e3)+gaussweight*(phi3.*phi3);

```

```

39 B(e2,e1)=B(e2,e1)+gaussweight'*(phi2.* phi1);
40 B(e2,e3)=B(e2,e3)+gaussweight'*(phi2.*phi3);
41 B(e1,e3)=B(e1,e3)+gaussweight'*(phi1.*phi3);
42 B(e1,e2)=B(e1,e2)+gaussweight'*(phi1.*phi2);
43 B(e3,e2)=B(e3,e2)+gaussweight'*(phi3.*phi2);
44 B(e3,e1)=B(e3,e1)+gaussweight'*(phi3.*phi1);
45
46 end
47 A(1,:)=0;
48 A(NP,:)=0;
49 A(1,1)=1.0;
50 A(NP,NP)=1.0;
51
52 B(1,:)=0;
53 B(NP,:)=0;
54 B(1,1)=1.0;
55 B(NP,NP)=1.0;
56 %financial data
57 NN=NP-1;
58 N=NN;
59 M=N;
60 h1=(xmax-xmin)/(N);
61 r=0.1;
62 sigma=0.4;
63 T=5/12;
64
65 E=50;
66 Smax=50;
67 xamer=log(Smax/E);
68 tau =0.5*sigma^2*T;
69 k1 =(2*r)/(sigma^2);
70 taustep=tau/(M);
71 tauvalue=(0:taustep:tau);
72 xvalue=(xmin:h1:xmax)';
73 theta=1/2;
74 C=B+theta*taustep*A;
75 D=B-(1-theta)*taustep*A;
76 y=zeros(N+1,M+1);
77 for jj=1:N+1
78 y(jj,1)=gobstacle(xvalue(jj),tauvalue(1),k1);
79 end
80
81 disp(xvalue')
82 for j=2:M+1
83     b=D*y(:,j-1);
84 Boundary1=[1;N+1];%dirichlet Boundary Conditions

```

```

85 ynext=zeros(N+1,1);
86 fixed=unique(Boundary1);
87 Interior=setdiff(1:(N),fixed);
88 ynext(fixed)=(gobstacle(xvalue(fixed),taustep*tauvalue(j)
      ,k1)+...
89 gobstacle(xvalue(fixed),taustep*tauvalue(j-1),k1));
90 %ynext(Boundary1)=(g(xvalue(Boundary1),taustep*tauvalue(j)
      -1),k1));
91 b(Interior)=b(Interior)-C(Interior,Boundary1)*ynext(fixed
      );
92 ynext(Interior)=psor(C(Interior,Interior),...
93 b(Interior),gobstacle(xvalue(2:N),...
94 tauvalue(j),k1),gobstacle(xvalue(2:N),tauvalue(j),k1)
      ,1.3,1e-7);
95 y(:,j)=ynext;
96 end
97
98 actual_v=interp1(tauvalue(M:M+1),y(round(N/2)+1,M:M+1),
      tau,'cubic');
99
100 V=E*exp(-0.5*(k1-1)*xamer)*exp((-0.25*(k1-1)^2-k1)*tau).*
      actual_v;
101 disp(V);
102 V1= E*exp(-.5*(k1-1)*xvalue)*exp(-(0.25*(k1-1)^2+k1)*
      tauvalue).*y;
103
104 S1=E*exp(xvalue);
105 plot(S1,V1(:,end),'blue');
106 hold on
107 plot(S1,V1(:,1),'red');
108 hold off
109 axis([0 2*E 0 1*E]);
110
111
112 function y=gobstacle(x,tau,k1)
113 y=exp(tau/4*((k1-1)^2+4*k1)).*max(exp(0.5*x*(k1-1))-exp
      (0.5*x*(k1+1)),0);
114 end
115 function [phi1,phi2,phi3]=Shape(xleft,xright,x)
116 x1=xleft;
117 x3=xright;
118 x2=(x1+x3)/2;
119 phi1=(x-x3).*(x-x2)./((x1-x3)*(x1-x2));
120 phi2=(x-x1).*(x-x3)./((x2-x1)*(x2-x3));
121 phi3=(x-x1).*(x-x2)./((x3-x1)*(x3-x2));
122 end

```

```

123
124 function [dphi1 ,dphi2 ,dphi3]=dShape( xleft ,xright , x)
125 x1=xleft ;
126 x3=xright ;
127 x2=(x1+x3)/2 ;
128 dphi1=(2*x-x2-x3) ./(( x1-x3)*(x1-x2));
129 dphi2=(2*x-x1-x3) ./(( x2-x1)*(x2-x3));
130 dphi3=(2*x-x1-x2) ./(( x3-x1)*(x3-x2));
131 end
132
133 function [ gp ,gw]=gauss( a ,b)
134 h=b-a;
135 gp=zeros(3,1);
136 gw=zeros(3,1);
137 mid=(b+a) ./2;
138 gp(1)=mid-h/2*sqrt(3.0/5.0);
139 gp(2)=mid;
140 gp(3)=mid+h/2*sqrt(3.0/5.0);
141 gw(1)=5/18.0*h;
142 gw(2)=8/18.0*h;
143 gw(3)=5/18.0*h;
144 end
145
146 function y=psor(A,b,c ,initial_est ,w,tolerance)
147 n=length(A);
148 x=zeros(n,2);
149 x(:,1)=initial_est ;
150 x(:,2)=initial_est+1;
151 temp=zeros(n-1,1);
152 counter = 1;
153 while max(abs( x(:,2)-x(:,1) ))>=tolerance
154 x(:,1) = x(:,2);
155     for i=1:n
156         temp(i)=1/A(i,i)*(b(i)-A(i,1:i-1)*x(1:i-1,2) ...
157         -A(i,i+1:n)*x(i+1:n,1));
158         x(i,2)=max(c(i),x(i,1)+w*(temp(i)-x(i,1)));
159     end;
160     counter=counter+1;
161 end;
162 y=x(:,2);
163 end
164 end

```

Ο αλγόριθμος για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης με την χρήση των Πεπερασμένων Διαφορών βασίστηκε στο [17].

```

1  function []=AmericanOptionFDM()
2  close all
3  clear all;
4  clc;
5
6  %Financial Data
7  theta =1/2;
8  S=50;
9  E=50;
10 Smax=50;
11 r =0.1;
12 sigma =0.4;
13 delta=0.0;
14 T=5/12;
15 M=300;%time
16 N=300;%space
17 a=5;
18 tau =0.5*sigma^2*T;
19 k1 =(2*r)/(sigma^2);
20 k2 =(2*(r-delta))/(sigma^2);
21 h =2*a/N;
22 taustep=tau/M;
23 xamer=log(Smax/E);
24 xvalue =(-a:h:a)';
25 tauvalue =(0:taustep:tau);
26 alpha=taustep/h^2;
27 type='Put';
28
29 v = zeros(M+1,N+1);
30 %initial condition
31 v(1:N+1,1)=gobstacle(xvalue(1:N+1),tauvalue(1),type);
32
33 % boundary conditions
34 for j=2:M+1
35 v(1,j)=gobstacle(xvalue(1),tauvalue(j),type);
36 v(N+1,j)=gobstacle(xvalue(N+1),tauvalue(j),type);
37 end
38
39 a=1 + 2*theta*alpha;
40 b=-theta*alpha;
41 d=1-2*(1-theta)*alpha;
42 e=(1-theta)*alpha;
43 C=diag(a*ones(N-1,1),0)+diag(b*ones(N-2,1),1)+diag(b*ones
    (N-2,1),-1);
44 D=diag(d*ones(N-1,1),0)+diag(e*ones(N-2,1),1)+diag(e*ones
    (N-2,1),-1);

```

```

45 x2=zeros(N-1,1);
46 omega=1.3;
47 eps=1e-7;
48
49 for j=2:M+1
50 bm = zeros(N-1,1);
51 bm(1)=(1-theta)*alpha*v(1,j-1)+(theta*alpha )*v(1,j);
52 bm(N-1)=(1-theta)*alpha*v(N+1,j-1)+(theta*alpha )*v(N+1,j
    );
53 b= D*v(2:N,j-1)+bm;
54 x1=max(v(2:M,j-1),gobstacle(xvalue(2:M),tauvalue(j),type)
    );
55 while norm((x2-x1))>=eps
56     x1=x2;
57     for i=1:N-1
58         temp(i)=(b(i)-C(i,1:i-1)*x2(1:i-1)-...
59         C(i,i+1:end)*x1(i+1:end))/C(i,i);
60         x2(i)=max(gobstacle(xvalue(i+1),tauvalue(j),type)
        ,x1(i)+...
61         omega*(temp(i)-x1(i)));
62         %x2(i)=x1(i)+omega*(temp(i)-x1(i));
63     end;
64 end
65
66 v(2:M,j)=x2;
67 end
68 actual_v = interp1(tauvalue(M:M+1),v(N/2+1,M:M+1),tau,'
    linear');
69 % Calculate Value of Put in Financial Terms
70 V = E*exp(-0.5*(k2-1)*xamer-0.25*((k2-1)^2+4*k1)*tau)*
    actual_v;
71
72 [call,put] = blsprice(S,E,r,T,sigma,0);
73 disp('The Black-Scholes Price is:');
74 disp(put);
75 disp('The Finite Difference Approximation to the Put is :
    ');
76 disp(V);
77 V1 = E*exp(-.5*(k1-1)*xvalue)*exp(-(.25*(k1-1)^2+k1)*
    tauvalue).*v;
78 S1=E*exp(xvalue);
79
80 figure(1);
81
82 a1=plot(S1,V1(:,N+1));
83 set(a1,'LineWidth',2);

```

```

84 hold on
85 a2=plot(S1,V1(:,1),'red');
86 set(a2,'LineWidth',2)
87 hold off
88 xlabel('Spot Price');
89 ylabel('Option Price');
90 axis([0 2*E 0 E])
91
92 figure(2);
93 tauvalue1=T-tauvalue*2/sigma^2;
94 tauvalue1=flipr(tauvalue1);
95 Sf = FreeBoundary(S1,V1,E,type);
96 %Sf=flipr(Sf);
97 a3=plot(tauvalue1,Sf);
98 set(a3,'LineWidth',3);
99 ylabel('Spot Price');
100 xlabel('Time');
101 title('Free Boundary');
102
103
104 function y = gobstacle(x,tau,type)
105 switch type
106 case 'Put'
107     y=exp(tau*0.25*((k2-1)^2+4*k1)).*max(exp(0.5*x*(k2-1))
108         ...
109         -exp(0.5*x*(k2+1)),0);
110 case 'Call'
111     y=exp(tau*0.25*((k2-1)^2+4*k1)).*max(exp(0.5*x*(k2+1)) ...
112     -exp(0.5*x*(k2-1)),0);
113 end
114 end
115
116 end

```

Ο αλγόριθμος για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης με την χρήση του Διωνυμικού Μοντέλου.

```

1
2 function []= AMBinomial()
3 clc;
4 close all;
5 clear all;
6 r=0.25;
7 S0=10;
8 K=10;

```

```

9  T=1;
10 M=2000;
11 div=0.2;
12 sigma=0.6;
13 dt=T/M;
14 A=0.5*(exp(-r*dt)+exp((r+sigma^2)*dt));
15 u=A+sqrt(A^2-1);
16 d=1/u;
17 p=(exp((r-div)*dt)-d)/(u-d);
18 type='Call';
19
20 %Stock Price
21 S(1,1)=S0;
22 for i = 2:M+1
23     S(1:i-1,i)=S(1:i-1,i-1)*u;
24     S(i,i)=S(i-1,i-1)*d;
25 end
26 V=zeros(M+1,M+1);
27 %option value
28 for j=1:M
29     switch type
30         case 'Put'
31             V(j,M)=max((K-S(j,M)),0);
32         case 'Call'
33             V(j,M)=max((S(j,M)-K),0);
34     end
35 end
36 for i=M:-1:1
37     for j=i:-1:1
38         switch type
39             case 'Put'
40                 V(j,i)=max(max((K-S(j,i)),0),...
41                     exp(-r*dt)*(p*V(j,i+1)+(1-p)*V(j
42                         +1,i+1)));
43             case 'Call'
44                 V(j,i)=max(max((S(j,i)-K),0),...
45                     exp(-r*dt)*(p*V(j,i+1)+(1-p)*V(j
46                         +1,i+1)));
47         end
48     end
49 end
50 Value=V(1,1);
51 disp(Value)
52 end

```

Ο αλγόριθμος για το Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης με Δύο

υποκείμενα Προϊόντα βασίστηκε στα [27], [14], [15],[35].

```
1 function [] = AmericanOption2DFEM()
2 %American 2d Option
3 close all;
4 clear all;
5 clc;
6 %financial data
7 K=40;
8 S0=40;
9 S1=40;
10 N=25;
11 P1=(2.0)*S0;
12 P2=(2.0)*S1;
13 r=0.05;
14 sigma1=0.3;
15 sigma2=0.3;
16 rho=0.5;
17 T =0.5;
18 dt=0.01;
19 M=T/dt;
20 x=linspace(0,P1,N+1);
21 y=linspace(0,P2,N+1);
22 [X,Y]=meshgrid(x,y);
23 X=reshape(X',[],1);
24 Y=reshape(Y',[],1);
25 T=delaunay(X,Y);
26 disp(size(T));
27 figure(1);
28 triplot(T,X, Y );
29 title('Delaunay Triangulations');
30
31 A1=zeros((N+1)^2,(N+1)^2);
32 A2=zeros((N+1)^2,(N+1)^2);
33 B1=zeros((N+1)^2,(N+1)^2);
34 D1=zeros((N+1)^2,(N+1)^2);
35 D2=zeros((N+1)^2,(N+1)^2);
36 %U = zeros((N+1)^2,M+1);
37 NT=length(T);
38
39 for k=1:NT
40     xk=X(T(k,:));
41     yk=Y(T(k,:));
42     b=[yk(2)-yk(3) yk(3)-yk(1) yk(1)-yk(2);
43        yk(2)-yk(3) yk(3)-yk(1) yk(1)-yk(2)];
```

```

44     yk(2)-yk(3) yk(3)-yk(1) yk(1)-yk(2) ] ;
45     c=[xk(3)-xk(2) xk(1)-xk(3) xk(2)-xk(1) ;
46       xk(3)-xk(2) xk(1)-xk(3) xk(2)-xk(1) ;
47       xk(3)-xk(2) xk(1)-xk(3) xk(2)-xk(1) ] ;
48     xcenter=(xk(1)+xk(2)+xk(3))/3;
49     ycenter=(yk(1)+yk(2)+yk(3))/3;
50     %area=polyarea(xk,yk);
51     area=(xk(2)-xk(1))*(yk(3)-yk(1))-...
52     (xk(3)-xk(1))*(yk(2)-yk(1));
53     A1(T(k,:), T(k,:))=A1(T(k,:), T(k,:))+...
54     r*xcenter*b/6+r*ycenter*c/6;
55     b1=[yk(2)-yk(3) yk(3)-yk(1) yk(1)-yk(2) ] ;
56     c1=[xk(3)-xk(2) xk(1)-xk(3) xk(2)-xk(1) ] ;
57     A2(T(k,:),T(k,:))=A2(T(k,:),T(k,:))+...
58     0.5*sigma1^2*(xcenter)^2*((b1)''*(b1))./(2*area)+...
59     0.5*sigma2^2*ycenter^2*((c1)''*c1)./(2*area)+...
60     +0.5*rho*sigma1*sigma2*((xcenter)*(ycenter)*(c1)''*b1)
61     ./(2*area)+...
62     +0.5*rho*sigma1*sigma2*((xcenter)*(ycenter)*(b1)''*c1)
63     ./(2*area);
64     end
65     Q1=norm(A1,inf);
66     Q2=norm(A2,inf);
67     Peclet=(Q1*area)/Q2;
68     if Peclet>1
69         delta=area/(2*Q1);
70     else
71         delta=(area)^2/(4*Q2);
72     end
73     for k=1:length(T)
74         B1(T(k,:),T(k,:))=B1(T(k,:),T(k,:))+area.*[2 1 1;1 2 1;1
75         1 2]/24;
76     end
77     for k=1:length(T)
78         b1=[yk(2)-yk(3) yk(3)-yk(1) yk(1)-yk(2) ] ;
79         c1=[xk(3)-xk(2) xk(1)-xk(3) xk(2)-xk(1) ] ;
80         %flux 1
81         D1(T(k,:),T(k,:))=D1(T(k,:),T(k,:))+...
82         r^2*(xcenter^2)*(b1)''*b1/(2*area)+...
83         r^2*(ycenter^2)*(c1)''*c1/(2*area)+...
84         +(r^2*xcenter*ycenter)*(b1)''*c1/(2*area)+...
85         (r^2*xcenter*ycenter)*(c1)''*b1/(2*area);
86         %flux 2
87         b2=[yk(2)-yk(3) yk(2)-yk(3) yk(2)-yk(3);yk(3)-yk(1) ...
88         yk(3)-yk(1) yk(3)-yk(1) ;...
89         yk(1)-yk(2) yk(1)-yk(2) yk(1)-yk(2) ] ;

```

```

87  c2=[xk(3)-xk(2) xk(3)-xk(2) xk(3)-xk(2);...
88  xk(1)-xk(3) xk(1)-xk(3) xk(1)-xk(3);...
89  xk(2)-xk(1) xk(2)-xk(1) xk(2)-xk(1)];
90  D2(T(k,:),T(k,:))=D2(T(k,:),T(k,:))+...
91  (r*xcenter)*b2./6+(r*ycenter)*c2./6;
92  end
93  delta1=delta;
94  theta=1/2;
95  A=-A1-A2-r*B1+delta1*(-D1-r*D2);
96
97  B=B1+delta1*(D2);
98  C=B-dt*(theta)*A;
99  D=B+dt*(1-theta)*A;
100 %coordinates of Dirichlet Boundary conditions
101 Boundary1=find((X==0)|(Y==0));
102 %coordinates of Neumann Boundary conditions
103 Boundary2=find((Y==P2)|(X==P1));
104 Q=Payoff(K,X,Y);
105 U(:,1)=Q;
106 figure(2);
107 show(T,X,Y,U(:,1));
108 xlabel('Asset 1');
109 ylabel('Asset 2');
110 zlabel('Payoff')
111 gN=@(x,y)0;
112 gk=@(x,y,t)max(K-min(x,y),0);
113 for j=2:M+1
114     b=zeros((N+1)^2,1);
115     b=b+D*U(:,j-1);
116     %Neumann Boundary Conditions
117     for k=1:size(Boundary2)
118         Xk=X(Boundary2);
119         Yk=Y(Boundary2);
120         xc=mean(Xk);
121         yc=mean(Yk);
122         len=sqrt((Xk(1)-Xk(2))^2+(Yk(1)-Yk(2))^2);
123         b(Boundary2)=b(Boundary2)+len*gN(xc,yc)/2;
124     end
125     %Dirichlet Boundary Conditions
126     u=zeros((N+1),1);
127     fixed=unique(Boundary1);
128     FreeNodes=setdiff(1:(N+1)^2, fixed);
129     u(fixed)=gk(X(fixed),Y(fixed),j*dt);
130     b(FreeNodes)=b(FreeNodes)-C(FreeNodes, Boundary1)*u(fixed);
131     u(FreeNodes)=psor(C(FreeNodes, FreeNodes), ...

```

```

132 b(FreeNodes),Q(FreeNodes),Q(FreeNodes),1.3,1e-7);
133 U(:,j)=u;
134 exercise=(u==Q);
135 end
136 EX=[X(exercise) Y(exercise)];
137
138
139 figure(3);
140 show(T,X,Y,U(:,M+1));
141 xlabel('Asset 1');
142 ylabel('Asset 2');
143 zlabel('Option Value');
144 figure(4);
145
146 surf(EX);
147
148 function Q=Payoff(K,x,y)
149 Q=max(K-min(x,y),0);
150 end
151
152 function show(T,X,Y,u)
153 trisurf(T,X,Y,u');
154 end
155
156 function y=psor(A,b,c,initialest,w,tol)
157 n=length(A);
158 x=zeros(n,2);
159 x(:,1)=initialest;
160 x(:,2)=initialest+1;
161 temp=zeros(n-1,1);
162 jj=1;
163 while max(abs(x(:,2)-x(:,1))))>=tol
164 x(:,1)=x(:,2);
165 for i=1:n
166 temp(i)=1/A(i,i)*(b(i)-A(i,1:i-1)*x(1:i
167 -1,2)-...
168 A(i,i+1:n)*x(i+1:n,1));
169 x(i,2)=max(c(i),x(i,1)+...
170 w*(temp(i)-x(i,1)));
171 end;
172 jj=jj+1;
173 end;
174 y=x(:,2);
175 end

```


Βιβλιογραφία

- [1] Yves Achou, Olivier Pironneau Computational Methods for Option Pricing, SIAM, 2005
- [2] Rüdiger U. Seydel Tools for Computational Finance, Springer, Fourth Edition, 2008
- [3] Paul Wilmott, Jeff Dewynne, Sam Howison Option Pricing, Oxford Financial Press, 1996
- [4] Claes Johnson Numerical Solutions of Partial Differential Equations by Finite Element Method, Cambridge University Press, 1987
- [5] Desmond J. Higham Nine Ways to Implement the Binomial Method for Option Valuation in MATLAB, SIAM Review Vol. 44, No. 4, pp 661-667, 2002
- [6] A.-M. Matache, P.-A. Nitsche, C. Schwab Wavelet Galerkin Pricing of American Options on Levy Driven Assets, Research Report No. 2003-06, ETH Zürich
- [7] Markus Holtz The Computation of American Option Price Sensitivities using a Monotone Multigrid Method for Higher Order B-Spline Discretizations, Universität of Bonn, 2004
- [8] Fischer Black, Myron Scholes The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3, pp 637-654, 1973
- [9] Christina C. Christara, Duy Minh Dang Adaptive and High-Order Methods for Valuing American Options, Journal of Computational Finance, pp 73-113, Volume 14, 2011
- [10] C. M. Elliot, J. R. Ockendon Weak and Variational Methods for Moving Boundary Problems, Pitman Publishing, 1982
- [11] Qun Lin, Tang Liu, Shu Hua Zhang Superconvergence estimates of finite element methods for American Options, Applications of Mathematics Vol. 54, Issue 3, pp 181-202, 2009
- [12] Nicolas Jackson, Endre Süli Adaptive Finite Element Solution of 1D European Option Pricing Problems, Oxford University, 1998
- [13] Jürgen Topper Financial Engineering with Finite Elements, Wiley, 2005

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [14] Niall Madden Numerical Solution to Differential Equations using Matlab: Part3: a Finite Element Implementation for a 2D Elliptic Problem
- [15] Mats G.Larson, Frederik Bengzon The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Practice, Springer 2010
- [16] Sunbu Kang, Taeckkeum Kim, Youghoon Kwon Finite Element Methods for the Price and the Free Boundary of American Call and Put Options J.KSIAM Vol. 12, No.4, pp 271-287, 2008
- [17] Shameer Sukha Finite Difference Methods for Pricing the American Put Option, Honours Project, 2001
- [18] Corinna Hager, Stefan Hüeber Numerical Techniques for the Valuation of Basket Options and their Greeks, Journal of Computational Finance, Vol.13 Number. 4, 2010
- [19] F.AitSahlia, P.Carr American Options: A Comparison of Numerical Methods, Numerical Methods in Finance, Cambridge University Press, 1997
- [20] R.Zvan, P.A Forsyth, K.R.Vetzal A General Finite Element Approach for PDE Option Pricing Models, University of Waterloo, 1998
- [21] S.Funken, D.Praetorius, P Wissgott Efficient Implementation of Adaptive P1-FEM in Matlab, ASC Report No. 19, 2008
- [22] Young W.Kwon, Hyochoong Bang The Finite Element Method using MATLAB, CRC Press, 1997
- [23] Μιχάλης Λουλάκης Σημειώσεις Μαθηματικής Χρηματοοικονομίας Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
- [24] Olivier Pironneau, Frederic Hecht Mesh Adaption for the Black Scholes Equations, 1999
- [25] Norbert Hilber, Oleg Reichmann, Cristoph Schwab, Cristop Winter Computational Methods for Quantitative Finance, Springer 2013
- [26] Lishang Jiang, Mathematical Modeling and Methods of Option Pricing, World Scientific Publishing, 2005
- [27] Jochen Albery, Carsten Carstensen, Stefan A. Funken Remarks around 50 Lines in Matlab: short Finite Element Implementation, Numerical Algorithms Vol.20, pp. 117-137, 1999
- [28] Α.Μπακόπουλος, Ι Χρυσοβέργης Αριθμητικές Μέθοδοι Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων Πεπερασμένα Στοιχεία και Διαφορές, Εκδόσεις Συμείων 2003
- [29] Mark S.Gockenbach Understanding and Implementing the Finite Element Method, SIAM, 2006
- [30] Steven E. Shreve Stochastic Calculus for Finance II Continuous-Time Models, Springer, 2004

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [31] Michael Günther, Ansgar Jügel Finanzderivate mit MATLAB, Vieweg, 2010
- [32] Patrick Jaillet, Damien Lamberton, Bernard Lapeyre, Variational Inequalities and the Pricing of American Options, Acta Appl. Math, pp 263-89, 1990
- [33] Tomas Björk Arbitrage Theory in Continuous Time, Oxford University Press, Third Edition, 2009
- [34] Α.Μπακόπουλος, Ι Χρυσοβέργης Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Εκδόσεις Συμεών, 1999
- [35] Pauly Oliver, Numerical Simulation of American Options Diplomarbeit in Wirtschaftsmathematik, 2004
- [36] Jiang Tao, Liu Xin, Yu Zhengzhou Finite Element Algorithms for Pricing 2-D Basket Options ICISE pp 4881-4886, 2009
- [37] John C. Hull Options, Futures, and Other Derivatives, Prentice Hall, Sixth Edition, 2005
- [38] P. A. Forsyth K.R. Vetzal Quadratic Convergence for Valuing American Options Using A Penalty Method,SIAM Journal on Scientific Computation, 2002
- [39] Alfio Quarteroni, Ricardo Sacco, Fausto Saleri Numerical Mathematics, Springer, Second Edition, 2008
- [40] Kyriakos Chourdakis Financial Engineering a Brief Introduction using the Matlab system
- [41] Mark Richardson Numerical Methods for Option Pricing, Oxford University, 2009
- [42] N Hilber, S Kehtari, C Schwab, C Winter Wavelet Finite Element Method for Option Pricing in highdimensional diffusion market models Research Report No. 2010-01, ETH Zürich
- [43] Paul Wilmottt, Paul Wilmott on Quantitative Finance, Wiley, Second Edition, 2006
- [44] Julio Cezar, Alves Thomaz Finite Element Method In Multi-Assets Option Pricing, University of Coimbra, FEC
- [45] C. Baiocchi, G.A. Pozzi Error Estimates and Free-Boundary Convergence for a Finite Difference discretization of Parabolic Variational Inequality, RAIRO Numer. Math., No. 4, pp 315-34, 1977
- [46] P.A. Forsyth, K.R. Vetzal, R. Zvan A Finite Element Approach to the Pricing of Descrete Lookbacks with Stochastic Volatility, Applied Mathematical Finance, Volume 6, Issue 2, 1999
- [47] Damien Lamberton, Bernard Lapeyre, Stochastic Calculus Applied to Finance, Chapman and Hall/CRC, 2000

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [48] Analysis of Numerical Methods, Eugene Isaacson, Herbert Bishop Keller, Wiley, 1966
- [49] Richard W. Cottle, Jong-Shi Pang, Richard E. Stone, The Linear Complementarity Problem, SIAM, 1992
- [50] Ravi Myneni, The Pricing of the American Option, Annals of Applied Probability, Volume 2, No 1, pp1-23, 1992
- [51] Colin W. Cryer: The Solution of a Quadratic Programming Problem Using Systematic Overrelaxation, Journal of Control, pp. 385-392, 1971
- [52] Damien Lamberton, Optimal Stopping and American Options, Ljubljana Summer School on Financial Mathematics, September 2009
- [53] Owe Axelsson, Iterative Solution Methods, Cambridge Univeristy Press, 1996
- [54] S.D Jacka, Optimal Stopping and the American Put Option, Mathematical Finance Vol. 1, No. 2, pp 1-14, 1991
- [55] Pierre Van Moerbeke On Optimal Stopping and Free Boundary Problems, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Volume 6, pp 101-148, 1976
- [56] Susanne C. Brenner, L. Ridgway Scott, The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Springer, Third Edition, 2008