



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ**

***Βέλτιστος σχεδιασμός ποδός σε ευθείς οδόντες εξειλιγμένης  
για μέγιστη αντοχή σε κάμψη με χρήση καμπολών Bézier***

Διπλωματική εργασία

**ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΣ**

Επιβλέπων : Β. Σπιτάς, Λέκτορας ΕΜΠ

**Αθήνα 2014**



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναπτύσσεται και περιγράφεται μία μέθοδος βελτίωσης της αντοχής σε κάμψη των μετωπικών οδοντωτών τροχών με ευθείς οδόντες εξελιγμένης. Στη μέθοδο αυτή, αντικαθίσταται το τμήμα της κατατομής του οδόντος που περιλαμβάνει το τροχοειδές και το ήμισυ του κύκλου ποδός του τροχού που αντιστοιχεί στο διάκενο μεταξύ δύο διαδοχικών οδόντων, με καμπύλη Bézier. Η μορφή της συγκεκριμένης καμπύλης μεταβάλλεται μέσω δύο παραμέτρων με σκοπό να προκύψει η κατατομή ενός οδόντος στον οποίο θα εμφανίζεται μειωμένη μέγιστη (εφελκυστική) κύρια τάση στην επικίνδυνη διατομή ποδός του. Για κάθε κατατομή δημιουργείται ένα τρισδιάστατο μοντέλο στο οποίο πραγματοποιείται στατική ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων για την επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση (plane strain analysis) του οδόντος του, εφαρμόζοντας ένα μοναδιαίο, ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο, κάθετα στο ανώτερο σημείο μονής επαφής του. Στη συνέχεια ακολουθεί μία διαδικασία αριθμητικής παρεμβολής των αποτελεσμάτων της ανάλυσης, προκειμένου να εντοπιστεί ο συνδυασμός των δύο προαναφερθεισών παραμέτρων για τον οποίο προκύπτει το βέλτιστο μοντέλο. Επόμενο βήμα είναι η διερεύνηση της ύπαρξης ή μη υποκοπών λειτουργίας στους οδόντες των μελετώμενων μοντέλων. Τέλος, τα αποτελέσματα της διπλωματικής εργασίας συγκεντρώνονται και συγκρίνονται με αντίστοιχες προτάσεις, που έχουν αναφερθεί στη βιβλιογραφία, σχετικά με τη βελτίωση της αντοχής των μετωπικών οδοντωτών τροχών με ευθείς οδόντες.



## ABSTRACT

In this thesis, a method of using a novel fillet design for spur gear teeth, in order to improve their strength and their loading capacity, is developed and presented. According to this method, the conventional trochoidal fillet profile and the segment of the root circle that corresponds to the half of the space between two successive teeth is replaced by a suitable Bézier curve. The shape of this curve is altered by changing two parameters in order to create a tooth profile with reduced first tensile principal stress at its root fillet. These teeth are first modelled geometrically and then their behaviour in bending is studied by assuming loading at their Highest Point of Single Tooth Contact (HPSTC). The maximum principal stress that appears at the root fillet of each model is calculated using Finite Element Analysis (FEA). After the analysis of all the models, an interpolation method is used, in order to define the combination of the parameters that corresponds to the optimum model. The next step is to investigate if interference between the tip of the mating gear and the resulting tooth geometry, exists. Finally, the results of this thesis are compared with similar efforts that have been made in the past on improving the strength of spur gears.



## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή Δρ. Β. Σπιτά για την καθοδήγησή του κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας καθώς για τις γνώσεις που μου μετέδωσε. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές και συνεργάτες μου από το εργαστήριο Στοιχείων Μηχανών για τη βοήθειά τους κατά την εκπόνηση της παρούσας εργασίας. Τέλος, δεν θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη συνεχή στήριξη που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.





# Περιεχόμενα

## 1 Εισαγωγή

1.1 Γενικά περί οδοντωτών τροχών	σελ. 13
1.2 Χαρακτηριστικά μεγέθη οδοντωτών τροχών	σελ. 18
1.3 Μορφή κατατομής οδόντων μετωπικών οδοντωτών τροχών με ευθείς οδόντες	σελ. 20
1.4 Ανάλυση της καμπύλης της εξειλιγμένης και του τροχοειδούς	σελ. 22
1.4.1 Εξειλιγμένη καμπύλη	σελ. 22
1.4.2 Καμπύλη Τροχοειδούς	σελ. 24
1.5 Κατανομή φορτίου στους οδοντωτούς τροχούς	σελ. 29
1.6 Ανάλυση της συνεργασίας δύο οδοντωτών τροχών	σελ. 31

## 2 Περιγραφή προβλήματος και επιλογή παραμέτρων

2.1 Εισαγωγή	σελ. 38
2.2 Γενικά στοιχεία	σελ. 38
2.3 Ανάλυση της διαδικασίας που ακολουθήθηκε στη διπλωματική εργασία	σελ. 40

## 3 Προσέγγιση καμπύλης μέσω πολυωνύμων Bézier – Bernstein

3.1 Εισαγωγή	σελ. 46
3.2 Αλγόριθμος de Casteljau	σελ. 46
3.3 Μητρική γραφή μιας καμπύλης Bézier	σελ. 51

## **4 Αντικατάσταση τμήματος της κατατομής με καμπύλη Bézier**

4.1 Εισαγωγή	σελ. 53
4.2 Περιγραφή διαδικασίας αντικατάστασης	σελ. 53
4.3 Σημεία ελέγχου καμπύλης Bézier	σελ. 55
4.3.1 Καθορισμός σημείων ελέγχου	σελ. 55
4.3.2 Αναλυτική περιγραφή του τρόπου καθορισμού της θέσης του τρίτου σημείου ελέγχου	σελ. 57
4.4 Υπολογισμός καμπύλης Bézier	σελ. 59

## **5 Ανάλυση τάσεων οδοντωτών τροχών με πεπερασμένα στοιχεία**

5.1 Εισαγωγή	σελ. 61
5.2 Χαρακτηριστικά μελετώμενων οδοντωτών τροχών	σελ. 61
5.3 Τρόπος μοντελοποίησης συνεργασίας οδοντωτών τροχών	σελ. 63
5.4 Περιγραφή διαδικασίας ανάλυσης	σελ. 66
5.5 Διαδικασία βελτιστοποίησης	σελ. 70
5.6 Έλεγχος ομαλής συνεργασίας οδοντωτών τροχών	σελ. 77

## **6 Σχολιασμός αποτελεσμάτων ανάλυσης**

6.1 Εισαγωγή	σελ. 80
6.2 Προϋποθέσεις σύγκρισης	σελ. 80
6.2.1 Αδιαστατοποίηση αποτελεσμάτων	σελ. 80
6.2.2 Συγκρινόμενη τιμή τάσης	σελ. 81
6.2.3 Ομοιότητα συγκρινόμενων μοντέλων	σελ. 82
6.3 Σύγκριση των αποτελεσμάτων	σελ. 83

<b>Βιβλιογραφία</b>	σελ. 85
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α</b>	σελ. 87
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β</b>	σελ. 97
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ</b>	σελ. 101



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

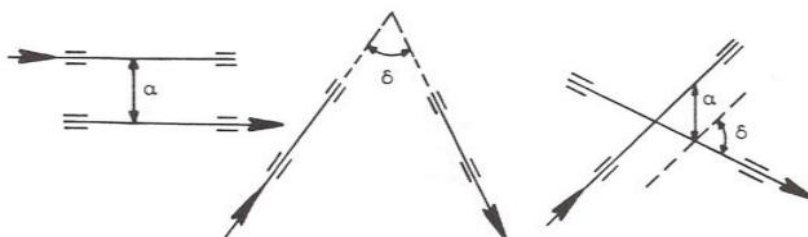
## Εισαγωγή

### 1.1 Γενικά περί οδοντωτών τροχών [1]

Για τη μετάδοση περιστροφικής κίνησης και τη μεταφορά ισχύος από την άτρακτο μιας κινητήριας μηχανής (ηλεκτροκινητήρας, μηχανή εσωτερικής καύσης, αεριο-ατμο-υδρο-στρόβιλος κλπ.) στην άτρακτο μιας κινούμενης μηχανής (εργομηχανής) χρησιμοποιούνται, εκτός των άλλων μηχανικών (ιμάντες, αλυσίδες, σύνδεσμοι, κλπ.) ή υδραυλικών-πνευματικών κλπ. τρόπων, και διάφοροι συνδυασμοί οδοντωτών τροχών.

Οι οδοντωτοί τροχοί είναι στοιχεία μηχανών που επιτυγχάνουν μετάδοση κίνησης και μεταφορά ισχύος μέσω κατάλληλης διαδοχικής εμπλοκής συνεργαζόμενων οδόντων. Οι οδόντες είναι αλληπάλληλες εσοχές και προεξοχές της επιφάνειας ενός οδοντωτού τροχού, τέτοιες ώστε να είναι δυνατή η συνεργασία της εσοχής του ενός τροχού με την προεξοχή του συνεργαζόμενου οδοντωτού τροχού.

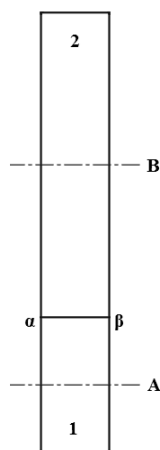
Οι άξονες περί τους οποίους περιστρέφονται δύο συνεργαζόμενοι οδοντωτοί τροχοί μπορεί να είναι: παράλληλοι σε απόσταση ( $\alpha$ ), ή τεμνόμενοι υπό γωνία ( $\delta$ ), ή ασύμβατοι σε απόσταση ( $\alpha$ ) και υπό γωνία ( $\delta$ ) (βλέπε Σχήμα 1-1). Η σχετική θέση των αξόνων αυτών είναι βασικής σημασίας για τη μορφή των τροχών που θα χρησιμοποιηθούν. Έτσι οι τροχοί μπορεί να είναι μετωπικοί (με ευθείς ή ελικοειδείς-κεκλιμένους οδόντες), οι οποίοι ονομάζονται και κυλινδρικοί, μπορεί να είναι κωνικοί ή υποειδείς, ή ελικοειδείς τροχοί ασυμβάτων αξόνων, ή μπορεί να αποτελούν σύστημα ατέρμονα κοχλία-κορώνας.



Σχήμα 1-1: Σχετική θέση αξόνων συνεργαζόμενων τροχών

Στους περισσότερους τύπους οδοντωτών τροχών δεν είναι, θεωρητικά, απαραίτητη η ύπαρξη οδόντων για την μετάδοση περιστροφικής κίνησης. Όμως, η ανάγκη μεταφοράς μεγάλης στρεπτικής ροπής (δηλαδή μεγάλης ισχύος) και σταθερής μετάδοσης κίνησης (δηλαδή σταθερών σχέσεων μετάδοσης στροφών) από την κινητήρια στην κινούμενη άτρακτο, καθιστά αναγκαία την ύπαρξη οδόντων.

Από κινηματικής πλευράς, δύο συνεργαζόμενοι μετωπικοί οδοντωτοί τροχοί ισοδυναμούν με δύο κυλινδρικούς τροχούς χωρίς οδόντες, που έχουν ως άξονες περιστροφής τους ίδιους τους άξονες των οδοντωτών τροχών. Στο Σχήμα 1-2 φαίνονται δύο κυλινδρικοί τροχοί 1 και 2, εφαιπτόμενοι κατά τη γενέτειρα α-β.



Σχήμα 1-2: Κυλινδρικοί τροχοί τριβής

Όταν οι δύο αυτοί κυλινδρικοί τροχοί κυλίνουν ο ένας επί του άλλου χωρίς ολίσθηση, μέσω των κυλιόμενων επιφανειών τους που εφάπτονται κατά την α-β, τότε οι περιφερειακές τους ταχύτητες στις κυλιόμενες επιφάνειες είναι ίσες. Αυτό σημαίνει ότι ο λόγος της γωνιακής ταχύτητας  $\omega_1$  της κινητήριας άτρακτου Α προς τη γωνιακή ταχύτητα  $\omega_2$  της κινούμενης άτρακτου Β ισούται με το λόγο της ακτίνας  $r_2$  του τροχού 2 προς την ακτίνα  $r_1$  του τροχού 1. Δηλαδή:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (1.1)$$

όπως προκύπτει από την περιφερειακή ταχύτητα της γενέτειρας α-β που είναι κοινή για τους τροχούς 1 και 2, δηλαδή:

$$V_1 = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 = V_2 \quad (1.2)$$

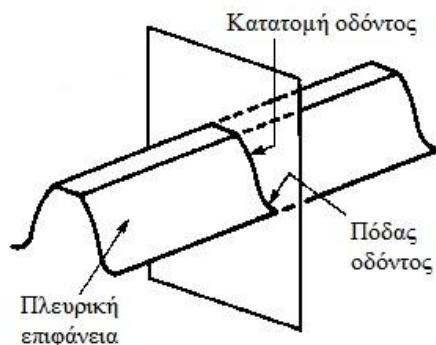
Κατά τον ίδιο τρόπο, ένα ζεύγος κωνικών οδοντωτών τροχών είναι κινηματικά ισοδύναμο με ένα ζεύγος κολουρων κώνων που εφάπτονται κατά την (αντίστοιχη με ανωτέρω) γενέτειρα και κυλίνονται ο ένας επί του άλλου χωρίς ολίσθηση.

Είναι φανερό ότι οι κυλιόμενες επιφάνειες, των προαναφερθέντων κυλίνδρων ή κώνων, λαμβανόμενες επί των οδοντωτών τροχών καθορίζουν επιφάνειες μεγάλης σημασίας για τους οδοντωτούς τροχούς. Αυτές οι επιφάνειες χρησιμοποιούνται ευρύτατα στη μελέτη των οδοντωτών τροχών και αντιστοιχούν, για τις κανονικές οδοντώσεις, στους λεγόμενους αρχικούς κυλίνδρους των μετωπικών τροχών ή στους αρχικούς κώνους των κωνικών τροχών. Επίσης, να σημειωθεί ότι το σημείο επαφής των αρχικών κύκλων, ευρισκόμενο επί της διακέντρου των συνεργαζόμενων τροχών, ονομάζεται αρχικό σημείο ή σημείο κύλισης κανονικών οδοντώσεων. Σε μη κανονικές οδοντώσεις, όπως είναι οι μετατοπισμένες οδοντώσεις, οι προαναφερθείσες επιφάνειες αντιστοιχούν στις επιφάνειες κύλισης.

Οι τροχοί του Σχήματος 1-2 μεταδίδουν κίνηση ο ένας στον άλλο μέσω τριβής (για το λόγο αυτό λέγονται τροχοί τριβής), η οποία προϋποθέτει ύπαρξη κάθετης δύναμης επί των κυλιόμενων επιφανειών στη γενέτειρα επαφής α-β για τη δημιουργία της απαραίτητης περιφερειακής δύναμης τριβής για τη μεταφορά ισχύος. Η μεταφερόμενη αυτή ισχύς εξαρτάται από το συντελεστή τριβής και από την αντοχή σε πίεση επιφανείας των τροχών τριβής. Έτσι υπάρχει άνω όριο μεταφερόμενης ισχύος με τους τροχούς τριβής, οι οποίοι έχουν επιπλέον το μειονέκτημα της ολίσθησης των κυλιόμενων επιφανειών, εξ' αιτίας της οποίας, η σχέση μετάδοσης κίνησης (ο λόγος των γωνιακών ταχυτήτων) μεταβάλλεται.

Για να εξασφαλισθεί σταθερή σχέση μετάδοσης και μεταφορά μεγάλης ισχύος είναι αναγκαία η ύπαρξη οδόντων, οι οποίοι, όπως έχει αναφερθεί, είναι κατάλληλες εσοχές και προεξοχές επί της περιφέρειας ενός τροχού εκατέρωθεν της επιφάνειας του αρχικού κυλίνδρου ή αρχικού κώνου. Τότε η κίνηση μεταδίδεται όχι μέσω τριβής των κυλιόμενων αρχικών κυλίνδρων ή κώνων, αλλά δια της επαφής και συνεργασίας των πλευρικών επιφανειών (εργαζόμενων πλευρών των κατατομών) των οδόντων δύο συνεργαζόμενων οδοντωτών τροχών (να σημειωθεί ότι, κατατομή οδόντος είναι η τομή του οδόντος υπό επιπέδου καθέτου στο αρχικό επίπεδο, όπως είναι η τομή υπό αξονικού, καθέτου ή μετωπικού επιπέδου – βλέπε Σχήμα 1-3). Η κατ' αυτόν τον τρόπο επιτυγχανόμενη εμπλοκή και συνεργασία των οδόντων πρέπει να εξασφαλίζει ομαλή και

χωρίς ολίσθηση κύλιση των αρχικών κυλίνδρων ή κώνων και γενικά των κυλίνδρων ή κώνων κύλισης, και σταθερή σχέση μετάδοσης κίνησης, οι οποίες αποτελούν τις βασικές προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιούν οι συνεργαζόμενες κατατομές των δύο τροχών.



Σχήμα 1-3: Κατατομή οδόντος

Οι ανωτέρω απαιτήσεις εξασφαλίζονται με το βασικό νόμο της οδόντωσης, κατά τον οποίο οι συνεργαζόμενες κατατομές των οδόντων πρέπει να είναι τέτοιες ώστε η κοινή κάθετος των κατατομών στο τυχόν σημείο επαφής τους να διέρχεται δια του σημείου κύλισης των τροχών.

Να σημειωθεί ότι, στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία θα μελετηθούν παράλληλοι μετωπικοί τροχοί (ή μετωπικοί τροχοί με παράλληλους ή ευθείς οδόντες - βλέπε Σχήμα 1-4).



Σχήμα 1-4: Μετωπικοί τροχοί με ευθείς οδόντες



Οι παράλληλοι μετωπικοί οδοντωτοί τροχοί είναι οι οδοντωτοί τροχοί με κυλινδρική μορφή στους οποίους οι οδόντες είναι ευθείς και παράλληλοι προς τον άξονα περιστροφής και συμμετρίας των τροχών. Επομένως, από το σημείο αυτό και έπειτα οποιοδήποτε στοιχείο παρουσιάζεται, θα αναφέρεται στο συγκεκριμένο είδος οδοντωτών τροχών.

Ακολουθεί η επεξήγηση, υπό τη μορφή ορισμών, κάποιων βασικών εννοιών που θα χρησιμοποιηθούν στην συνέχεια της εργασίας:

**Σημείο επαφής** ονομάζεται οποιοδήποτε σημείο στο οποίο εφάπτονται οι εργαζόμενες πλευρές δύο συνεργαζόμενων οδόντων.

**Τροχιά επαφών** είναι η καμπύλη επί της οποίας βρίσκονται όλα τα σημεία επαφής δύο κατατομών οδόντων εν συνεργασία. Όταν γίνεται αναφορά σε τροχούς με οδόντες δι' εξελιγμένης, η τροχιά επαφών είναι ευθεία γραμμή.

**Τμήμα επαφών** ονομάζεται το τμήμα της τροχιάς επαφών που περιλαμβάνεται μεταξύ των κύκλων κεφαλής δύο συνεργαζόμενων τροχών, είναι δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των σημείων επαφής των εργαζόμενων πλευρών των οδόντων δύο τροχών εν συνεργασία (τμήμα (AB) στο Σχήμα 1-5).

**Μήκος επαφών ( $e_o$ )** είναι το μήκος του τόξου του αρχικού κύκλου το οποίο διατρέχει η εργαζόμενη πλευρά του οδόντος ενός οδοντωτού τροχού, από την αρχή έως το τέλος της επαφής της με τη συνεργαζόμενη πλευρά του οδόντος του συνεργαζόμενου τροχού.

**Βαθμός επικάλυψης ή διάρκεια επαφής ( $\varepsilon$ )** ονομάζεται ο λόγος του μήκους επαφών  $e_o$  προς το βήμα στον αρχικό κύκλο  $t_o$ .

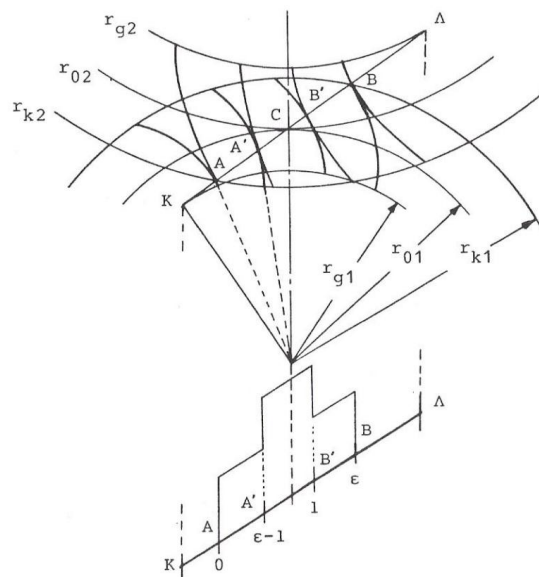
$$\varepsilon = \frac{e_o}{t_o} = \frac{(AB)}{t_o \cos \alpha_o} = \frac{(AB)}{t_g} \quad (1.3)$$

όπου  $t_g$  είναι το βήμα της οδόντωσης στο βασικό κύκλο.

Για την ομαλή συνεργασία δύο οδοντωτών τροχών, πρέπει  $\varepsilon \geq 1$ .

**Η γραμμή ενεργείας ή δράσεως** είναι η ευθεία καθ' ήν ασκείται το ολικό φορτίο οδόντος εν απουσία δυνάμεων τριβής και γενικά ορίζεται από το σημείο επαφής και το σημείο κύλισης. Όταν γίνεται αναφορά σε τροχούς με οδόντες δι' εξελιγμένης, η γραμμή ενεργείας ταυτίζεται με την τροχιά

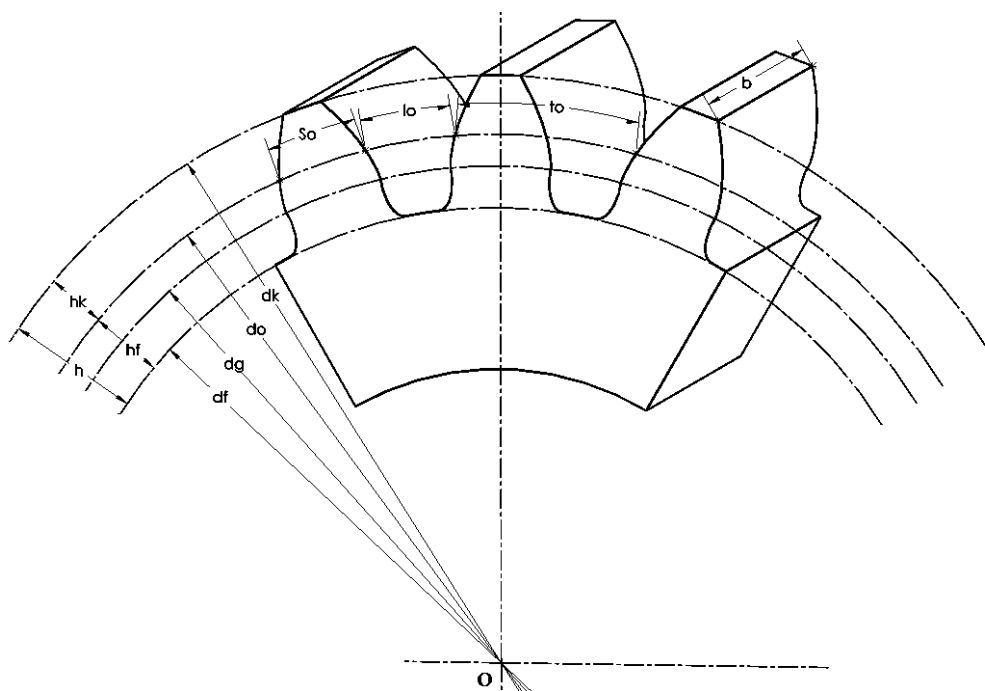
επαφών και διέρχεται από το σημείο κύλισης, ενώ εφάπτεται των βασικών κύκλων των συνεργαζόμενων τροχών.



Σχήμα 1-5: Φόρτιση οδόντων στο τμήμα επαφών.

## 1.2 Χαρακτηριστικά μεγέθη οδοντωτών τροχών [1], [4]

Τα βασικά γεωμετρικά μεγέθη που χαρακτηρίζουν έναν οδοντωτό τροχό φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 1-6: Χαρακτηριστικά μεγέθη ενός μετωπικού τροχού με ευθείς οδόντες

ενώ στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται τα εικονιζόμενα στο ανωτέρω σχήμα μεγέθη καθώς και άλλα απαραίτητα χαρακτηριστικά που αφορούν τους οδοντωτούς τροχούς (για τυποποιημένες οδοντώσεις).

Χαρακτηριστικό μέγεθος	Συμβολισμός - Σχέση υπολογισμού
module (mm, τυποποιημένες τιμές του φαίνονται στον Πίνακα 1-2)	m
αριθμός οδόντων	Z
γωνία εξειλιγμένης (rad, ισούται με την ημιγωνία οδόντος του κανόνα με βάση τη γενική θεωρία οδόντωσης, ενώ στο μετρικό σύστημα λαμβάνεται ίση με 20° για τυποποιημένες οδοντώσεις)	$\alpha_o$
διάμετρος αρχικού κύκλου (mm)	$d_o = m Z$
διάμετρος κύκλου κεφαλής (mm)	$d_k = m (Z + 2)$
διάμετρος βασικού κύκλου (mm)	$d_g = d_o \cos \alpha_o$
διάμετρος κύκλου ποδός (mm)	$d_f = m (Z - 2.5)$
ύψος οδόντος (mm)	$h = h_f + h_k$
ύψος ποδός οδόντος (mm)	$h_f = m C_f$
συντελεστής ύψους ποδός οδόντος	$C_f = (1.25 \div 1.30)$
ύψος κεφαλής οδόντος (mm)	$h_k = m C_k$
συντελεστής ύψους κεφαλής οδόντος	$C_k = 1$
συντελεστής ακτίνας καμπυλότητας κεφαλής κοπτικού κανόνα	$C_c = (0.25 \div 0.35)$
πάχος οδόντος στον αρχικό κύκλο (mm)	$S_o = C_s t_o$
συντελεστής πάχους οδόντος	$C_s = (0.475 \div 0.5)$
διάκενο μεταξύ των οδόντων στον αρχικό κύκλο (mm)	$l_o = t_o - S_o$
βήμα οδόντωσης στον αρχικό κύκλο (mm)	$t_o = m \pi$
πλάτος οδοντωτού τροχού (mm)	b

Πίνακας 1-1: Χαρακτηριστικά μεγέθη ενός μετωπικού τροχού με ευθείς οδόντες

0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
3.25	3.50	3.75	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00
6.50	7.00	7.50	8.00	9.00	10.00	11.00	12.00
13.00	14.00	15.00	16.00	18.00	20.00	22.00	24.00
27.00	30.00	33.00	36.00	39.00	42.00	45.00	50.00

Πίνακας 1-2: Τυποποιημένες τιμές του module σε mm για οδόντες δι' εξειλιγμένης

### 1.3 Μορφή κατατομής οδόντων μετωπικών οδοντωτών τροχών με ευθείς οδόντες [1], [2], [3]

Όπως προαναφέρθηκε, προϋπόθεση για την κινηματική καταλληλότητα μιας οδόντωσης, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μια οδοντοκίνηση μεταφοράς ισχύος, είναι αυτή που καθορίζεται με το βασικό νόμο της οδόντωσης.

Οι μορφές της κατατομής του οδόντος ενός οδοντωτού τροχού που ικανοποιούν την προαναφερθείσα προϋπόθεση είναι πολλές. Ωστόσο, έχει επικρατήσει η χρήση των οδοντώσεων με εξειλιγμένη, καθώς παρουσιάζουν πολλά πλεονεκτήματα, όπως:

- Μπορούν να κατασκευαστούν με μεγάλη ακρίβεια με ένα απλό εργαλείο του οποίου οι κατατομές είναι ευθείες.
- Μικρές μεταβολές της απόστασης των κέντρων των τροχών δεν επηρεάζουν τις συνθήκες επαφής των οδόντων.
- Με το ίδιο εργαλείο μπορεί να κατασκευαστεί και μετατοπισμένη οδόντωση.
- Η διεύθυνση της κάθετης δύναμης επί της κατατομής παραμένει αμετάβλητη (διεύθυνση τροχιάς επαφών).

Ως μειονέκτημά τους θεωρείται η εμφάνιση υποκοπών. Υπάρχουν δύο είδη υποκοπών. Οι υποκοπές κατασκευής και οι υποκοπές λειτουργίας.

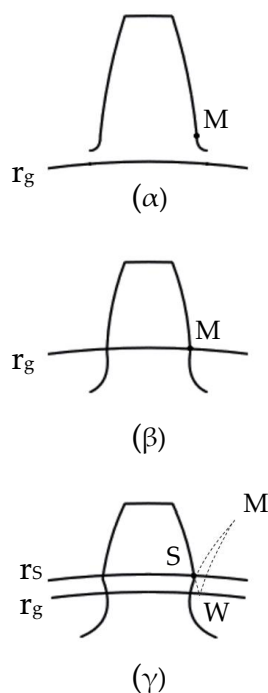
**Υποκοπές κατασκευής (Undercutting):** Κατά την κατασκευή ενός οδοντωτού τροχού με μικρό αριθμό οδόντων (με τη μέθοδο κύλισης - κανόνας, Fellows, Hobbing), οι κορυφές των οδόντων του κοπτικού εργαλείου υποσκάπτουν τη βάση των οδόντων του κατασκευαζόμενου οδοντωτού τροχού κι έτσι εμφανίζονται υποκοπές κατασκευής. Αποτέλεσμα είναι η ελάττωση του πάχους των οδόντων στον πόδα, το

οποίο σημαίνει μείωση της αντοχής του τροχού και μείωση του βαθμού επικάλυψης μίας βαθμίδας συνεργαζόμενων τροχών. Για την αποφυγή της εμφάνισης υποκοπών κατασκευής, θα πρέπει να ισχύει για τον αριθμό των οδόντων του κατασκευαζόμενου οδοντωτού τροχού:

$$Z \geq Z_{\min} = \frac{2[C_f - C_c(1 - \sin a_o)]}{\sin^2 a_o} \quad (1.4)$$

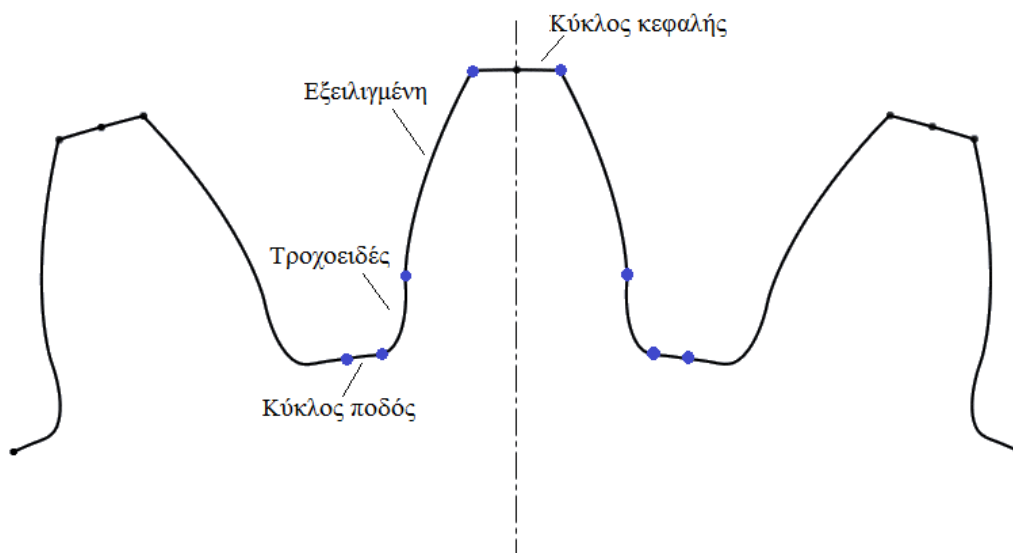
**Υποκοπές λειτουργίας (Interference):** Κατά τη συνεργασία δύο οδοντωτών τροχών, οι κορυφές των οδόντων του τροχού με το μεγαλύτερο αριθμό οδόντων υποσκάπτουν τη βάση των οδόντων του τροχού με το μικρότερο αριθμό οδόντων κι έτσι εμφανίζονται υποκοπές λειτουργίας.

Κατά την κοπή οδοντωτού τροχού με τη μέθοδο κύλισης, η άκρη του οδόντος του κοπτικού εργαλείου διαγράφει το τροχοειδές (trochoid). Εάν δεν υπάρχουν υποκοπές κατασκευής, αυτό το τροχοειδές εφάπτεται στο σημείο M, όπως φαίνεται στα Σχήματα 1-7(α) και 1-7(β), ενώ η ύπαρξη υποκοπών φαίνεται από τη γωνία που σχηματίζουν η εξειλιγμένη και το τροχοειδές στο σημείο S, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1-7(γ). Ενδιαφέρον παρουσιάζει μόνο το τμήμα του τροχοειδούς που ενώνει την εξειλιγμένη με τον κύκλο ποδός. Περαιτέρω ανάλυση θα ακολουθήσει στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου.



Σχήμα 1-7: Μορφή οδοντωτών τροχών

Μία τυπική κατατομή του οδόντος ενός οδοντωτού τροχού έχει τη μορφή που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα, όπου φαίνεται η εξειλιγμένη, το τροχοειδές, ο κύκλος κεφαλής και ο κύκλος ποδός του οδόντος.

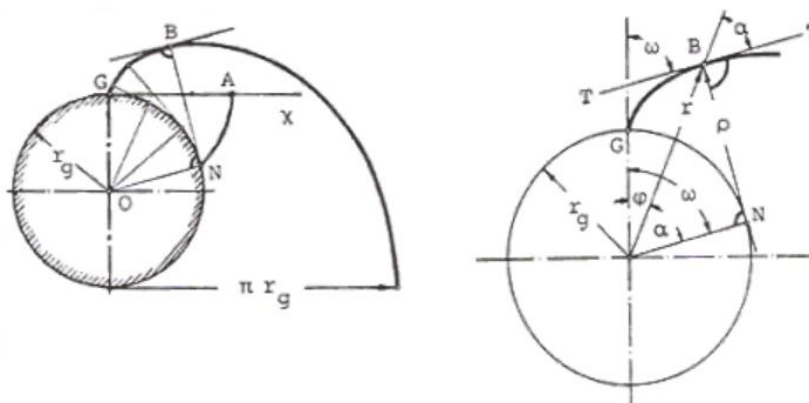


Σχήμα 1-8: Κατατομή οδόντος οδοντωτού τροχού

## 1.4 Ανάλυση της καμπύλης της εξειλιγμένης και του τροχοειδούς [1]

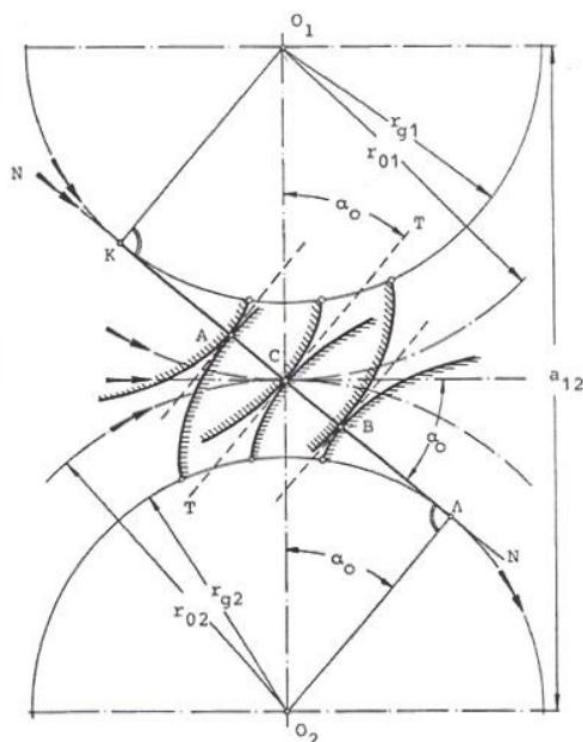
### 1.4.1 Εξειλιγμένη καμπύλη

Η τροχιά που διαγράφει ένα σημείο ευθείας γραμμής κυλιομένης άνευ ολισθήσεως επί της περιφέρειας κύκλου, είναι η εξειλιγμένη καμπύλη. Στο Σχήμα 1-9, η ευθεία  $G\chi$  κυλιέται επί του βασικού κύκλου  $(O, r_g)$  και το σημείο  $G$  διαγράφει την εξειλιγμένη  $GB$ .



Σχήμα 1-9: Εξειλιγμένη καμπύλη

Η τροχιά επαφών των κατατομών δι' εξειλιγμένης δύο συνεργαζόμενων οδοντωτών τροχών με εξωτερική οδόντωση είναι, όπως έχει προαναφερθεί, ευθεία γραμμή και εφάπτεται εξωτερικά των βασικών κύκλων των δύο τροχών. Στο Σχήμα 1-10, φαίνονται συνεργαζόμενες κατατομές δι' εξειλιγμένης δύο οδοντωτών τροχών με κέντρο περιστροφής  $O_1$  και  $O_2$ , καθώς και η τροχιά επαφών τους.



Σχήμα 1-10: Συνεργασία μετωπικών οδοντωτών τροχών με κατατομές οδόντων δι' εξειλιγμένης καμπύλης

Με βάση τις γωνίες που φαίνονται στο Σχήμα 1-9 αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$\phi = \tan \alpha - \alpha \quad (1.5)$$

όπου οι γωνίες  $\phi$  και  $\alpha$  είναι σε ακτίνια.

Η γωνία  $\phi$  ονομάζεται συνάρτηση της εξειλιγμένης (involute) και ορίζεται μονοσήμαντα από την  $\alpha$ . Συμβολίζεται ως  $inv \alpha$  ή  $ev \alpha$  ως εξής:

$$inv \alpha = ev \alpha = \phi = \tan \alpha - \alpha \quad (1.6)$$

## Εξισώσεις εξειλιγμένης καμπύλης

Για την εξειλιγμένη καμπύλη (ως προς το σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων, με αρχή το πρώτο σημείο G της καμπύλης επί του βασικού κύκλου - βλέπε Σχήμα 1-9) ισχύει:

$$\chi = r_g (\sin \omega - \omega \cos \omega) \quad (1.7)$$

$$\psi = r_g (\cos \omega - 1 + \omega \sin \omega) \quad (1.8)$$

$$\frac{d\psi}{d\chi} = \cot \omega \quad (1.9)$$

$$\omega = \alpha + \phi = \tan \alpha \quad (1.10)$$

### 1.4.2 Καμπύλη Τροχοειδούς

Σχετικά με την καμπύλη του τροχοειδούς μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

- Στην περίπτωση που ο τροχός έχει αριθμό οδόντων  $Z$  μεγαλύτερο από  $Z_{\min}$ , (με βάση τη σχέση 1.4), τότε η εξειλιγμένη της κατατομής οδόντος του τροχού αρχίζει από σημείο  $M$  εκτός του βασικού κύκλου ακτίνας  $r_g$  (μολονότι η εξειλιγμένη ως καμπύλη αρχίζει από σημείο του βασικού κύκλου) και καταλήγει στον κύκλο κεφαλής του οδοντωτού τροχού, Σχήμα 1-7(α). Από το σημείο  $M$  αρχίζει και η δημιουργία του fillet το οποίο καταλήγει στον κύκλο ποδός του οδοντωτού τροχού.
- Στην περίπτωση που ο τροχός έχει αριθμό οδόντων  $Z$  ακριβώς ίσο με τον οριακό αριθμό οδόντων  $Z_{\min}$ , η εξειλιγμένη της κατατομής οδόντος του τροχού αρχίζει ακριβώς από την περιφέρεια του βασικού κύκλου, σημείο  $M$  του Σχήματος 1-7(β) και καταλήγει στον κύκλο κεφαλής του οδοντωτού τροχού. Από το σημείο  $M$  αρχίζει και η δημιουργία του fillet το οποίο καταλήγει στον κύκλο ποδός του οδοντωτού τροχού.
- Όταν ο τροχός έχει αριθμό οδόντων μικρότερο από τον  $Z_{\min}$ , τότε έχουμε την εμφάνιση υποκοπών στους οδόντες του τροχού. Το σημείο  $M$  είναι εκτός της κατατομής οδόντος και η εξειλιγμένη της κατατομής του αρχίζει στο σημείο  $S$  (ενώ η εξειλιγμένη ως καμπύλη αρχίζει από την περιφέρεια του βασικού κύκλου στο



σημείο W) και καταλήγει στον κύκλο κεφαλής του οδοντωτού τροχού (βλέπε Σχήμα 1-7(γ)). Από το σημείο S αρχίζει και η δημιουργία του fillet το οποίο καταλήγει στον κύκλο ποδός του οδοντωτού τροχού.

### Προσδιορισμός της θέσης του σημείου S

Για τον προσδιορισμό της θέσης του σημείου S (βλέπε 'ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α') θα ακολουθηθεί η εξής διαδικασία:

Με βάση το Σχήμα 1-11, η γωνία  $\angle GAH = \omega_{\max}$  είναι γνωστή και τέτοια ώστε:

$$a_o + \omega_{\max} = 90^\circ \quad (1.11)$$

Στη γωνία:

$$\omega_s = \omega_{\max} - \Delta\phi \quad (1.12)$$

αντιστοιχεί η ακτίνα  $r_s$  του σημείου S του προαναφερθέντος σχήματος για την οποία ισχύει:

$$\cos \alpha_s = \frac{r_g}{r_s} \quad (1.13)$$

όπου:

$$\text{inv} \alpha_s = \phi_s = \tan \alpha_s - \alpha_s \quad (1.14)$$

$$r_s = \sqrt{\chi_s^2 + \psi_s^2} \quad (1.15)$$

$$\tan \gamma = -\frac{\chi_s}{\psi_s} \quad (1.16)$$

Είναι φανερό ότι θα ακολουθηθεί μία επαναληπτική διαδικασία, ως κατωτέρω υποδεικνύεται, με αντικειμενικό σκοπό τον υπολογισμό των γωνιών  $\gamma$  και  $\phi_s$  μέχρις ότου γίνουν ίσες, όταν τα σημεία  $\alpha$  και  $\beta$  της ακτίνας  $r_s$  ταυτιστούν και δώσουν το ζητούμενο σημείο S.

Η επαναληπτική διαδικασία υπολογισμού της θέσης του σημείου S βασίζεται στο τμήμα GH του κανόνα, που φαίνεται στο ίδιο σχήμα, και αποτελείται από τα εξής βήματα:

**i)** Σε πρώτη εκτίμηση θέτουμε:

$$\omega = \omega_{\max} \quad (1.17)$$

**ii)** Για την κάθε γωνία  $\omega$ , υπολογίζεται το αντίστοιχο σημείο στο GH, με:

$$\chi = \chi_H - r_c \sin \omega \quad (1.18)$$

$$\psi = \psi_\Lambda - r_c \cos \omega \quad (1.19)$$

$$\frac{dF(\chi)}{d\chi} = -\tan \omega \quad (1.20)$$

$$0 < \omega < \omega_{\max} \quad (1.21)$$

όπου:

$$r_c = mC_c \text{ (ακτίνα καμπυλότητας κεφαλής κοπτικού κανόνα)} \quad (1.22)$$

$$\chi_H = 0.5(l_o - d) \quad (1.23)$$

$$\psi_\Lambda = -\alpha_t + r_c \sin \alpha_o \quad (1.24)$$

$$d = l_o - 2(a_t \tan \alpha_o + r_c \cos \alpha_o) \quad (1.25)$$

$$\alpha_t = h_f - r_c(1 - \sin \alpha_o) \quad (1.26)$$

**iii)** Από τη γενικευμένη θεωρία της οδόντωσης (κατά την οποία γίνεται χρήση του γεγονότος ότι υπάρχει μονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ της κατατομής οδόντος ενός τροχού, της κατατομής οδόντος του συνεργαζόμενου τροχού και της τροχιάς επαφών τους) υπολογίζεται το αντίστοιχο σημείο της κατατομής του οδόντος στο σύστημα συντεταγμένων  $\chi_k O \psi_k$ , το οποίο έχει αρχή το κέντρο του τροχού O και ο άξονας των  $\psi_k$  διέρχεται από το σημείο κύλισης C (Σχήμα 1-11).

$$K = -\chi - \psi \frac{dF(\chi)}{d\chi} = \theta r_o \quad (1.27)$$

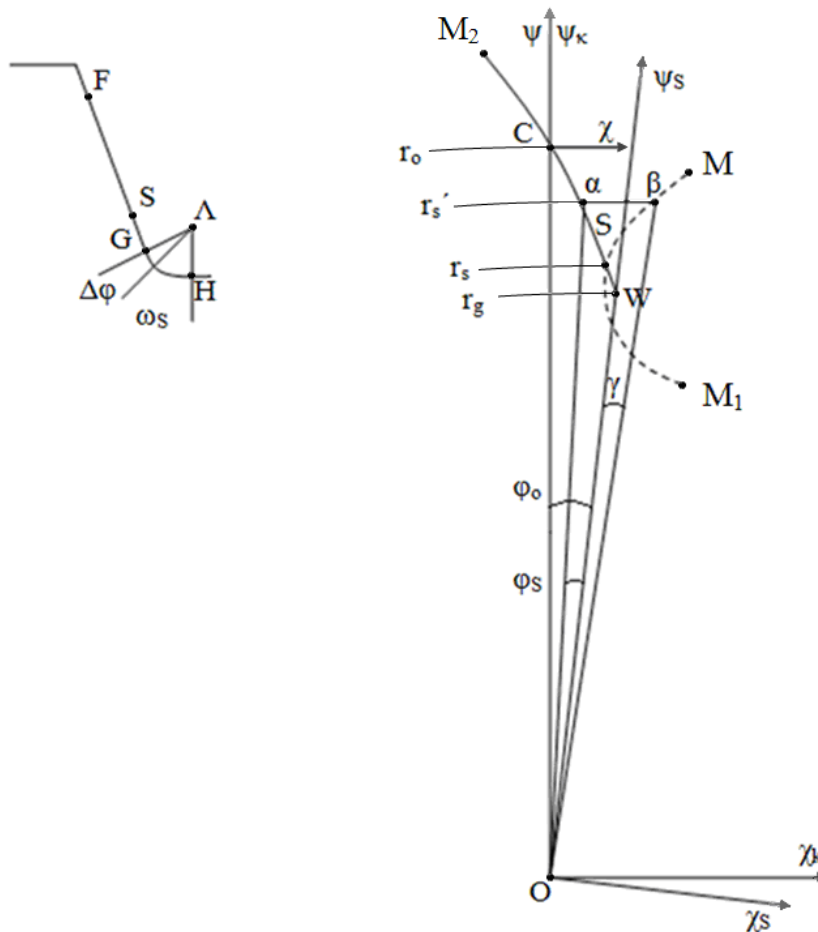
$$\chi_{1K} = (\chi + K) \cos \theta - (\psi + r_o) \sin \theta \quad (1.28)$$

$$\psi_{1K} = (\chi + K) \sin \theta + (\psi + r_o) \cos \theta \quad (1.29)$$

**iv)** Στρέφεται το σύστημα  $\chi_K O \psi_K$  κατά τη γωνία  $\phi_o$  και προκύπτει:

$$\chi_s = \chi_{1K} \cos(-\phi_o) + \psi_{1K} \sin(-\phi_o) \quad (1.30)$$

$$\psi_s = -\chi_{1K} \sin(-\phi_o) + \psi_{1K} \cos(-\phi_o) \quad (1.31)$$



Σχήμα 1-11: Εύρεση του σημείου S

v) Ισχύουν επίσης οι προαναφερθείσες σχέσεις (επαναλαμβάνονται για λόγους πληρότητας του κειμένου):

$$r_s = \sqrt{\chi_s^2 + \psi_s^2}$$

$$r_g = r_s \cos \alpha_s$$

$$\tan \gamma = -\frac{\chi_s}{\psi_s}$$

$$\text{inv} \alpha_s = \phi_s = \tan \alpha_s - \alpha_s$$

Με την εφαρμογή της ανωτέρω επαναληπτικής διαδικασίας θα προκύψει:

$$\gamma = \phi_s \quad (1.32)$$

στην οποία αντιστοιχεί η γωνία  $\omega_s = \omega$  για την οποία υπολογίζεται η:

$$\Delta\phi = \omega_{\max} - \omega_s \quad (1.33)$$

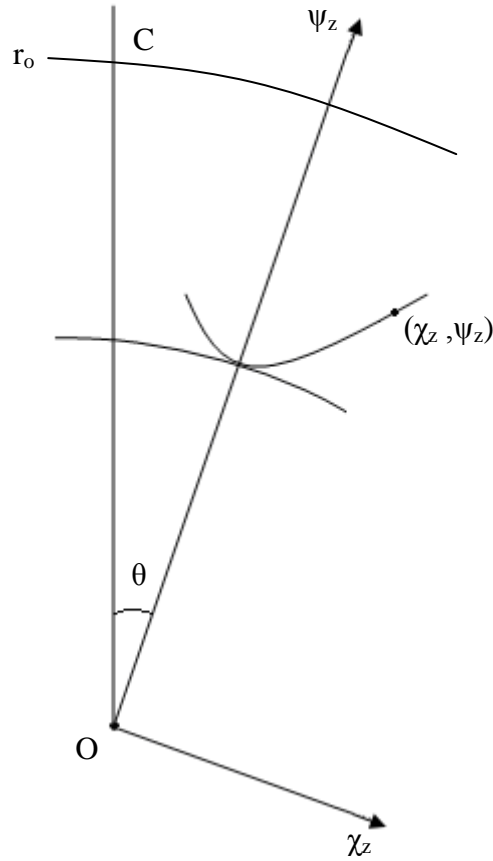
Εξ' αυτών προκύπτει το τμήμα του GH που πραγματικά θα συνεργασθεί με το fillet SM<sub>1</sub>. Ταυτόχρονα, το σημείο S καθορίζει και το τμήμα της FG που θα συνεργασθεί με την εξελιγμένη SM<sub>2</sub>.

### Εξισώσεις καμπύλης τροχοειδούς

Για την καμπύλη του τροχοειδούς (για C<sub>c</sub>=0) ως προς το σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων  $\chi_z O \psi_z$ , που περιστρέφεται μαζί με το τροχοειδές (βλέπε Σχήμα 1-12) ισχύει:

$$\chi_z = \theta r_o \cos \theta - (r_o - h_f) \sin \theta \quad (1.34)$$

$$\psi_z = \theta r_o \sin \theta + (r_o - h_f) \cos \theta \quad (1.35)$$

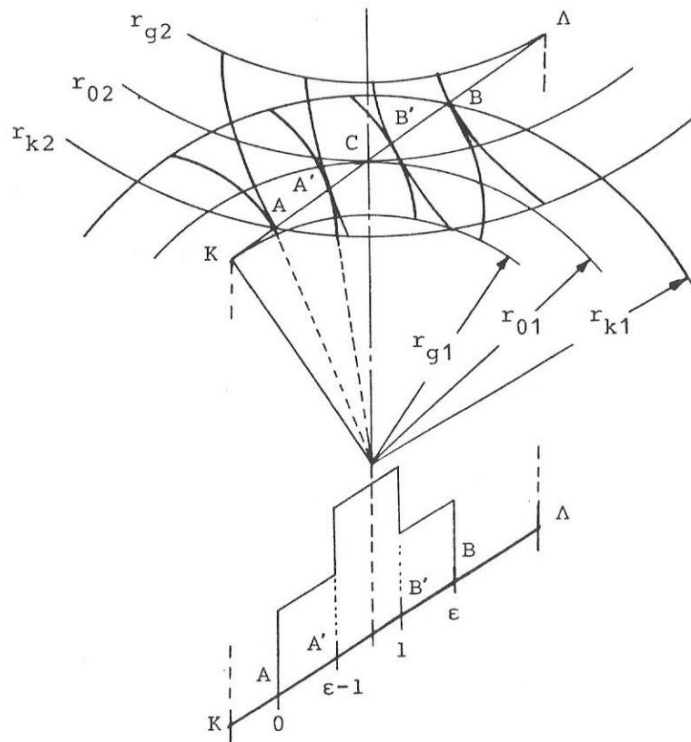


Σχήμα 1-12: Τροχοειδές για  $r_c=0$

## 1.5 Κατανομή φορτίου στους οδοντωτούς τροχούς [1]

Έχει υπολογιστεί ότι οι τυποποιημένοι μετωπικοί τροχοί ευθείας οδόντωσης και γωνίας εξειλιγμένης  $20^\circ$  έχουν βαθμό επικάλυψης  $1 < \epsilon < 2$ . Αυτό συμβαίνει διότι κατά τη συνεργασία δύο τέτοιων μετωπικών τροχών, οι επαφές κατατομών προκύπτουν από ένα ή δύο ζεύγη οδόντων, αντίστοιχα.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1-13, το κεντρικό μέρος του τμήματος επαφών διαγράφεται μόνο από ένα ζεύγος συνεργαζόμενων οδόντων, ενώ τα ακραία μέρη του διαγράφονται ταυτόχρονα από δύο διαφορετικά ζεύγη συνεργαζόμενων κατατομών.



Σχήμα 1-13: Φόρτιση οδόντων στο τμήμα επαφών.

Στα μέρη (AA') και (BB') του τμήματος επαφών (AB) βρίσκονται σε επαφή δύο ζεύγη οδόντων, ενώ στο τμήμα (A'B') βρίσκεται σε επαφή μόνο ένα ζεύγος συνεργαζόμενων οδόντων. Κάθε φορά που ένα ζεύγος οδόντων εισέρχεται σε συνεργασία (σημείο A) ή εγκαταλείπει τη συνεργασία (σημείο B), σε κάθε τροχό ο οδόντας της θέσης A φορτίζεται με μέρος του ολικού φορτίου, ενώ ο οδόντας της θέσης B εκφορτίζεται από μέρους του ολικού φορτίου, επηρεάζοντας έτσι τα φορτία των οδόντων και στις θέσεις B' και A' αντίστοιχα. Αυτές οι απότομες μεταβολές του φορτίου των οδόντων προκαλούν θορυβώδη λειτουργία και δημιουργούν δυναμικά φαινόμενα.

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, εφόσον στο τμήμα (A'B') βρίσκεται σε επαφή μόνο ένα ζεύγος συνεργαζόμενων οδόντων, τότε σε αυτό το τμήμα καταπονείται περισσότερο ο οδόντας ενός οδοντωτού τροχού (κατά την συνεργασία του με τον οδόντα του συνεργαζόμενου τροχού). Είναι το τμήμα στο οποίο παραλαμβάνεται από έναν μόνον οδόντα το συνολικό φορτίο που ασκείται από το συνεργαζόμενο τροχό. Επομένως, το συγκεκριμένο τμήμα της τροχιάς επαφών είναι το πλέον κατάλληλο για την μελέτη της αντοχής του οδόντος ενός οδοντωτού τροχού (όταν πραγματοποιείται στατική ανάλυση σε αυτόν).

## 1.6 Ανάλυση της συνεργασίας δύο οδοντωτών τροχών [1], [13]

Προκειμένου να πραγματοποιηθεί ανάλυση της συνεργασίας μεταξύ δύο οδοντωτών τροχών, είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός των πέντε (5) διακριτών θέσεων της τροχιάς επαφών των κατατομών δύο οδόντων εν συνεργασία.

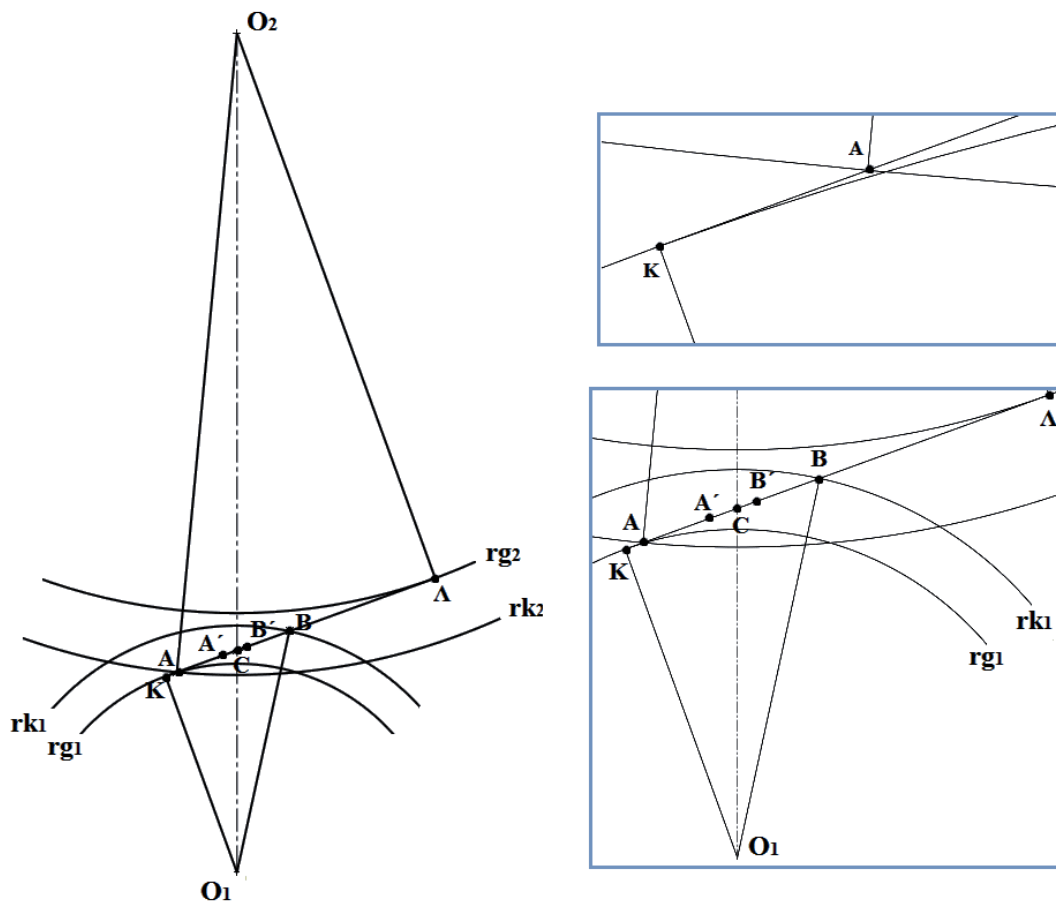
Στο Σχήμα 1-14 φαίνεται η τροχιά επαφών των κατατομών δύο οδόντων εν συνεργασία μίας βαθμίδας μετωπικών τροχών με ευθείς οδόντες, καθώς και οι πέντε διακριτές θέσεις συνεργασίας επί αυτής. Ο κινητήριος τροχός (τροχός 1) με κέντρο το  $O_1$  περιστρέφεται σύμφωνα με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού (δεξιόστροφα).

Να τονιστεί ότι, για τον υπολογισμό των προαναφερθεισών θέσεων επιλέχθηκε δεξιόστροφη φορά περιστροφής του κινητήριου τροχού έτσι ώστε να συνάδει η περιγραφή τους με την περιγραφή που προηγήθηκε σχετικά με τη φόρτιση των οδόντων στο τμήμα επαφών (βλέπε Σχήμα 1-13). Όμως, στη διαμόρφωση του κώδικα στο προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab (θα αναφερθεί στο επόμενο κεφάλαιο), αλλά και γενικότερα στην πορεία της εργασίας, επιλέχθηκε αριστερόστροφη φορά περιστροφής του κινητήριου τροχού καθώς διευκόλυνε στη χρήση των εξισώσεων που παρείχαν την κατατομή του οδόντος του. Εξάλλου, είτε ο κινητήριος τροχός περιστρέφεται δεξιόστροφα είτε αριστερόστροφα, τα διακριτά σημεία της τροχιάς επαφών που του αντιστοιχούν βρίσκονται στην ίδια αντίστοιχη ακτίνα (λόγω συμμετρίας του οδόντος). Οπότε οι σχέσεις που θα αναπτυχθούν κατωτέρω μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό της θέσης των διακριτών σημείων ενός τροχού (αντίστοιχη απόσταση από το κέντρο του) ανεξάρτητα από τη φορά περιστροφής του.

Με βάση το Σχήμα 1-14 θα γίνει προσδιορισμός των σχέσεων υπολογισμού της θέσης των πέντε προαναφερθεισών θέσεων συνεργασίας. Αυτές είναι επιγραμματικά:

- **Πρώτο σημείο λειτουργίας:** βρίσκεται στην περιοχή του κύκλου ποδός του κινητήριου τροχού (τροχός 1) και στον κύκλο κεφαλής του κινούμενου τροχού (τροχός 2). Είναι το σημείο A στα Σχήματα 1-13 και 1-14.

- **Κατώτερο σημείο μονής επαφής:** χαμηλότερο σημείο μονής επαφής (Lowest Point of Single Tooth Contact) για τον κινητήριο τροχό και υψηλότερο σημείο μονής επαφής (Highest Point of Single Tooth Contact) για τον κινούμενο τροχό (σημείο B στα Σχήματα 1-13 και 1-14).
- **Σημείο κύλισης:** κοινό και για τους δύο τροχούς (σημείο C στα Σχήματα 1-13 και 1-14).
- **Ανώτερο σημείο μονής επαφής:** υψηλότερο σημείο μονής επαφής (Highest Point of Single Tooth Contact) για τον κινητήριο τροχό και κατώτερο σημείο μονής επαφής (Lowest Point of Single Tooth Contact) για τον κινούμενο τροχό (σημείο B' στα Σχήματα 1-13 και 1-14).
- **Τελευταίο σημείο λειτουργίας ή σημείο απεμπλοκής:** βρίσκεται στον κύκλο κεφαλής του κινητήριου τροχού και στην περιοχή του κύκλου ποδός του κινούμενου τροχού (σημείο B στα Σχήματα 1-13 και 1-14).



Σχήμα 1-14: Διακριτές θέσεις τροχιάς επαφών



Ακολουθεί αναλυτικός προσδιορισμός των σχέσεων υπολογισμού της θέσης των πέντε προαναφερθεισών θέσεων συνεργασίας:

### Αρχικό σημείο (C) ή σημείο κύλισης (κανονικών οδοντώσεων)

Είναι το σημείο επαφής (και ταυτόχρονα στιγμιαίος πόλος περιστροφής) των αρχικών κύκλων ( $r_{o1}$ ,  $r_{o2}$ ), το οποίο βρίσκεται επί της διακέντρου των συνεργαζόμενων τροχών (κοινό και για τους 2 τροχούς). Απέχει από το κέντρο του εκάστοτε τροχού όσο είναι η ακτίνα του αντίστοιχου αρχικού κύκλου.

### Πρώτο σημείο λειτουργίας κινητήριου τροχού:

Με βάση το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ( $KO_1A$ ) ισχύει:

$$(O_1A)^2 = (O_1K)^2 + (KA)^2 \Rightarrow$$

$$(O_1A) = r_A = \sqrt{(O_1K)^2 + (KA)^2} \quad (1.36)$$

όμως:

$$(O_1K) = r_{g1} \quad (1.37)$$

$$(KA) = (KC) + (C\Lambda) - (A\Lambda) \quad (1.38)$$

όπου:

$$(KC) = \sqrt{(O_1C)^2 - (O_1K)^2} = \sqrt{r_{o1}^2 - r_{g1}^2} \quad (1.39)$$

$$(C\Lambda) = \sqrt{(O_2C)^2 - (O_2\Lambda)^2} = \sqrt{r_{o2}^2 - r_{g2}^2} \quad (1.40)$$

$$(A\Lambda) = \sqrt{(O_2A)^2 - (O_2\Lambda)^2} = \sqrt{r_{k2}^2 - r_{g2}^2} \quad (1.41)$$

Αντικαθιστώντας τις (1.39), (1.40), (1.41) στην (1.38) και ακολούθως τις (1.37), (1.38) στην (1.36), προκύπτει:

$$r_A = \sqrt{r_{g1}^2 + \left( \sqrt{r_{o1}^2 - r_{g1}^2} + \sqrt{r_{o2}^2 - r_{g2}^2} - \sqrt{r_{k2}^2 - r_{g2}^2} \right)^2} \quad (1.42)$$

**Πρώτο σημείο λειτουργίας κινούμενου τροχού:**

Βρίσκεται στην ακτίνα του κύκλου κεφαλής ( $r_{k2}$ ) του κινούμενου τροχού.

**Τελευταίο σημείο λειτουργίας κινητήριου τροχού:**

Βρίσκεται στην ακτίνα του κύκλου κεφαλής ( $r_{k1}$ ) του κινητήριου τροχού.

**Τελευταίο σημείο λειτουργίας κινούμενου τροχού:**

Με βάση το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ( $\Lambda O_2 B$ ) ισχύει:

$$(O_2 B)^2 = (O_2 \Lambda)^2 + (\Lambda B)^2 \Rightarrow$$

$$(O_2 B) = r_B = \sqrt{(O_2 \Lambda)^2 + (\Lambda B)^2} \quad (1.43)$$

όμως:

$$(O_2 \Lambda) = r_{g2} \quad (1.44)$$

$$(\Lambda B) = (\Lambda C) + (CK) - (KB) \quad (1.45)$$

όπου:

$$(\Lambda C) = \sqrt{(O_2 C)^2 - (O_2 \Lambda)^2} = \sqrt{r_{o2}^2 - r_{g2}^2} \quad (1.46)$$

$$(CK) = \sqrt{(O_1 C)^2 - (O_1 K)^2} = \sqrt{r_{o1}^2 - r_{g1}^2} \quad (1.47)$$

$$(KB) = \sqrt{(O_1 B)^2 - (O_1 K)^2} = \sqrt{r_{k1}^2 - r_{g1}^2} \quad (1.48)$$

Αντικαθιστώντας τις (1.46), (1.47), (1.48) στην (1.45) και ακολούθως τις (1.44), (1.45) στην (1.43), προκύπτει:

$$r_B = \sqrt{r_{g2}^2 + \left( \sqrt{r_{o2}^2 - r_{g2}^2} + \sqrt{r_{o1}^2 - r_{g1}^2} - \sqrt{r_{k1}^2 - r_{g1}^2} \right)^2} \quad (1.49)$$

**Ανώτερο σημείο μονής επαφής (HPSTC = Highest Point of Single Tooth Contact) για τον κινητήριο τροχό.**

$$\text{Βαθμός επικάλυψης: } \varepsilon = \frac{(AB)}{t_g} = \frac{(BC) + (CA)}{t_g} \quad (1.50)$$

όπου:

$$t_g = t_o \cos \alpha_o \quad (1.51)$$

$$(BC) = \sqrt{(r_{o1} + m)^2 - r_{o1}^2 \cos^2 \alpha_o} - r_{o1} \sin \alpha_o \quad (1.52)$$

$$(CA) = \sqrt{(r_{o2} + m)^2 - r_{o2}^2 \cos^2 \alpha_o} - r_{o2} \sin \alpha_o \quad (1.53)$$

Άρα:

$$(AB) = \sqrt{(r_{o1} + m)^2 - r_{o1}^2 \cos^2 \alpha_o} + \sqrt{(r_{o2} + m)^2 - r_{o2}^2 \cos^2 \alpha_o} - (r_{o1} + r_{o2}) \sin \alpha_o \quad (1.54)$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις (1.51), (1.54) στην (1.50) μπορεί να υπολογιστεί ο βαθμός επικάλυψης ( $\varepsilon$ ).

Με βάση το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ( $B'O_1K$ ) ισχύει:

$$(O_1B')^2 = (O_1K)^2 + (KB')^2 \Rightarrow$$

$$(O_1B') = r_{HPSTC1} = \sqrt{(O_1K)^2 + (KB')^2} \quad (1.55)$$

όμως:

$$(O_1K) = r_{g1} \quad (1.56)$$

$$(KB') = (KB) - (B'B) \quad (1.57)$$

όπου:

$$(KB) = \sqrt{(O_1B)^2 - (O_1K)^2} = \sqrt{r_{k1}^2 - r_{g1}^2} \quad (1.58)$$

$$(B'B) = (AB) - (AB') = t_g (\varepsilon - 1) \quad (1.59)$$

Άρα, αντικαθιστώντας τις (1.58), (1.59) στην (1.57) και ακολούθως τις (1.56), (1.57) στην (1.55) προκύπτει:

$$r_{HPSTC1} = \sqrt{r_{g1}^2 + \left( \sqrt{r_{k1}^2 - r_{g1}^2} - t_g (\varepsilon - 1) \right)^2} \Rightarrow$$

$$r_{HPSTC1} = \sqrt{r_{k1}^2 + t_g (\varepsilon - 1) \left( t_g (\varepsilon - 1) - 2\sqrt{r_{k1}^2 - r_{g1}^2} \right)} \quad (1.60)$$

**Ανώτερο σημείο μονής επαφής (HPSTC) για τον κινούμενο τροχό.**

Με όμοιο τρόπο, για τον κινούμενο τροχό προκύπτει:

$$(O_2A') = r_{HPSTC2} = \sqrt{r_{k2}^2 + t_g (\varepsilon - 1) \left( t_g (\varepsilon - 1) - 2\sqrt{r_{k2}^2 - r_{g2}^2} \right)} \quad (1.61)$$

**Κατώτερο σημείο μονής επαφής (LPSTC = Lowest Point of Single Tooth Contact) για τον κινητήριο τροχό.**

Με βάση το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ( $KO_1A'$ ) ισχύει:

$$(O_1A')^2 = (O_1K)^2 + (KA')^2 \Rightarrow$$

$$(O_1A') = r_{LPSTC1} = \sqrt{(O_1K)^2 + (KA')^2} \quad (1.62)$$

όμως:

$$(O_1K) = r_{g1} \quad (1.63)$$

$$(KA') = (KC) + (C\Lambda) - (\Lambda A') \quad (1.64)$$

όπου:

$$(KC) = \sqrt{(O_1C)^2 - (O_1K)^2} = \sqrt{r_{o1}^2 - r_{g1}^2} \quad (1.65)$$

$$(C\Lambda) = \sqrt{(O_2C)^2 - (O_2\Lambda)^2} = \sqrt{r_{o2}^2 - r_{g2}^2} \quad (1.66)$$

$$(\Lambda A') = \sqrt{(O_2A')^2 - (O_2\Lambda)^2} = \sqrt{r_{HPSTC2}^2 - r_{g2}^2} \quad (1.67)$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις (1.65), (1.66), (1.67) στην (1.64) και ακολούθως τις (1.63), (1.64) στην (1.62), προκύπτει:

$$r_{LPSTC1} = \sqrt{r_{g1}^2 + \left( \sqrt{r_{o1}^2 - r_{g1}^2} + \sqrt{r_{o2}^2 - r_{g2}^2} - \sqrt{r_{HPSTC2}^2 - r_{g2}^2} \right)^2} \quad (1.68)$$

**Κατώτερο σημείο μονής επαφής (LPSTC) για τον κινούμενο τροχό.**

Με όμοιο τρόπο, για το κινούμενο τροχό προκύπτει:

$$(O_2B') = r_{LPSTC2} = \sqrt{r_{g2}^2 + \left( \sqrt{r_{o1}^2 - r_{g1}^2} + \sqrt{r_{o2}^2 - r_{g2}^2} - \sqrt{r_{HPSTC1}^2 - r_{g1}^2} \right)^2} \quad (1.69)$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# Περιγραφή προβλήματος και επιλογή παραμέτρων

### 2.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 1, ένας από τους τρόπους μετάδοσης περιστροφικής κίνησης και μεταφοράς ισχύος από μια κινητήρια σε μια κινούμενη άτρακτο, είναι η χρήση οδοντωτών τροχών. Πρόκειται για στοιχεία μηχανών που η λειτουργία τους βασίζεται στην κατάλληλη διαδοχική εμπλοκή συνεργαζόμενων οδόντων. Ωστόσο, η ανάγκη παραλαβής και μεταφοράς υψηλότερων φορτίων και περισσότερης ισχύος έχει οδηγήσει στη μελέτη-κατασκευή οδοντωτών τροχών με αυξημένες δυνατότητες όσον αφορά στον τομέα της αντοχής.

Υπάρχουν διάφορες τεχνικές που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη-κατασκευή οδοντωτών τροχών με αυξημένη αντοχή. Οι τεχνικές αυτές εστιάζονται στην ανάπτυξη και χρήση [9]:

- προηγμένων υλικών
- νέων μορφών κατατομών των οδόντων
- νέων μεθόδων θερμικής κατεργασίας
- νέων μεθόδων κατασκευής οδοντωτών τροχών

Το αντικείμενο της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας έχει προσανατολιστεί προς την κατεύθυνση του δεύτερου από τους προαναφερθέντες τρόπους μελέτης-κατασκευής ανθεκτικότερων οδοντωτών τροχών.

### 2.2 Γενικά στοιχεία

Βασικός στόχος της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη και ο σχεδιασμός μετωπικών οδοντωτών τροχών με ευθείς οδόντες εξειλιγμένης, με σκοπό

την επίτευξη αυξημένης αντοχής των οδόντων τους όσον αφορά στην επικίνδυνη διατομή ποδός τους (αντοχή σε κάμψη). Επικίνδυνη διατομή ποδός ενός οδόντος είναι η περιοχή όπου εμφανίζεται η μέγιστη τιμή της πρώτης κύριας τάσης (first principal stress). Η περιοχή αυτή, λόγω του γεγονότος ότι εκεί εμφανίζονται οι μέγιστες εφελκυστικές τάσεις, αποτελεί και το σημείο έναρξης μιας ενδεχόμενης ρωγμής στον οδόντα του τροχού. Επομένως, κύρια επιδίωξη είναι η εμφάνιση μειωμένης μέγιστης (πρώτης) κύριας τάσης στην προαναφερθείσα περιοχή.

Ο τρόπος επίτευξης του ανωτέρου στόχου είναι η αντικατάσταση ενός τμήματος της καμπύλης που αποτελεί την κατατομή του οδόντος του οδοντωτού τροχού από μία καμπύλη διαφορετικού είδους. Το τμήμα της κατατομής που θα αντικατασταθεί περιλαμβάνει το τροχοειδές και το ήμισυ του κύκλου ποδός του τροχού που αντιστοιχεί στο διάκενο μεταξύ δύο διαδοχικών οδόντων. Η καμπύλη που θα αντικαταστήσει το προαναφερθέν τμήμα είναι μία καμπύλη Bézier. Η μορφή της συγκεκριμένης καμπύλης θα μελετηθεί έτσι ώστε να προκύψουν οδόντες με αυξημένη αντοχή. Να σημειωθεί ότι παράλληλα με τη μελέτη της χρήσης καμπύλης Bézier, εξετάστηκε η χρήση καμπύλης spline αντί αυτής. Οστόσο, λόγω της πολυωνυμικής φύσης των καμπυλών splines, εμφανίζονταν κάποιες ταλαντωτικές συμπεριφορές οι οποίες εμπόδιζαν τη χρήση των συγκεκριμένων καμπυλών.

Κατά τη συνεργασία δύο οδοντωτών τροχών, ο τροχός που καταπονείται περισσότερο στην επικίνδυνη διατομή ποδός του είναι ο τροχός με το μικρότερο αριθμό οδόντων. Δεδομένου ότι αναφερόμαστε σε μία βαθμίδα μειωτήρα, η εστίαση της μελέτης-ανάλυσης θα γίνει στον κινητήριο τροχό της βαθμίδας.

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας κρίθηκε σκόπιμο, λόγω της έκτασής της, να μελετηθεί ένας συγκεκριμένος συνδυασμός αριθμών οδόντων δύο οδοντωτών τροχών εν συνεργασία. Οι τροχοί που επιλέχθηκαν να μελετηθούν είναι ένα ζεύγος που αποτελείται από έναν κινητήριο τροχό με αριθμό οδόντων  $Z_1=18$  και έναν κινούμενο με αριθμό οδόντων  $Z_2=50$ . Έτσι, επιτυγχάνεται σχέση μετάδοσης:

$$i_{12} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{50}{18} = 2.778$$

Τα χαρακτηριστικά μεγέθη των οδοντωτών τροχών που χρησιμοποιήθηκαν φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Χαρακτηριστικό μέγεθος	Κινητήριος τροχός	Κινούμενος τροχός
Z (αριθμός οδόντων)	18	50
m (module)	1 mm	1 mm
b (πλάτος τροχού)	1 mm	1 mm
$\alpha_0$ (γωνία εξειλιγμένης)	20°	20°
$C_k$ (συντελεστής ύψους κεφαλής)	1	1
$C_f$ (συντελεστής ύψους ποδός)	1.25	1.25
$C_s$ (συντελεστής πάχους οδόντος)	0.5	0.5
$r_0$ (ακτίνα αρχικού κύκλου)	9 mm	25 mm
$r_g$ (ακτίνα βασικού κύκλου)	8.4572 mm	23.4923 mm
$r_k$ (ακτίνα κύκλου κεφαλής)	10 mm	26 mm
$r_f$ (ακτίνα κύκλου ποδός)	7.75 mm	23.75 mm

Πίνακας 2-1: Χαρακτηριστικά μεγέθη των εν συνεργασία οδοντωτών τροχών

Τα αποτελέσματα που θα εξαχθούν από την παρούσα εργασία μπορούν να επεκταθούν και σε διαφορετικές από τη μελετώμενη συνεργασία περιπτώσεις.

### 2.3 Ανάλυση της διαδικασίας που ακολουθήθηκε στη διπλωματική εργασία

Το πρώτο βήμα της διαδικασίας που ακολουθήθηκε (περίπτωση οδοντωτού τροχού όπου στην κατατομή του οδόντος του χρησιμοποιείται η καμπύλη του τροχοειδούς και το ήμισυ του κύκλου ποδός του τροχού που αντιστοιχεί στο διάκενο μεταξύ δύο διαδοχικών οδόντων) είναι η ανάπτυξη κώδικα στο προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab ο οποίος με δεδομένα τα εξής γεωμετρικά χαρακτηριστικά του οδοντωτού τροχού:

- αριθμός οδόντων (Z)
- module (m)
- γωνία εξειλιγμένης ( $\alpha_0$ )
- συντελεστής ύψους κεφαλής ( $C_k$ )
- συντελεστής ύψους ποδός ( $C_f$ )



- ακτίνα καμπυλότητας κοπτικού εργαλείου ( $C_c$ )
- συντελεστής πάχους οδόντος ( $C_s$ )

υπολογίζει τα λοιπά γεωμετρικά χαρακτηριστικά του, υπολογίζει όποιο άλλο μέγεθος κρίθηκε απαραίτητο για τη μετέπειτα πορεία της εργασίας και παρέχει την εργαζόμενη κατατομή του οδόντος του οδοντωτού τροχού, σε μορφή μητρώου που περιέχει τις συντεταγμένες των σημείων που την αποτελούν.

Στη συνέχεια, ακολουθεί η διαδικασία της αντικατάστασης του τμήματος της κατατομής που συμπεριλαμβάνει το τροχοειδές και το ήμισυ του κύκλου ποδός του τροχού που αντιστοιχεί στο διάκενο μεταξύ δύο διαδοχικών οδόντων. Το τμήμα αυτό της κατατομής αντικαθίσταται με καμπύλη Βέζιερ. Είναι, επομένως, απαραίτητο να οριστεί η διαδικασία δημιουργίας-καθορισμού της καμπύλης αυτής. Η συγκεκριμένη διαδικασία περιγράφεται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 4 της παρούσας εργασίας. Ωστόσο, ένα σημείο που πρέπει να αναφερθεί προσώρας για την καλύτερη κατανόηση της προαναφερθείσας διαδικασίας, είναι ότι η μορφή της καμπύλης Βέζιερ που προκύπτει μέσω του κώδικα μεταβάλλεται με τη μεταβολή δύο παραμέτρων  $p_1$ ,  $p_2$  (mm) που ορίζει ο χρήστης. Οπότε, ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων  $p_1$ ,  $p_2$ , λαμβάνεται μία διαφορετική καμπύλη Βέζιερ και κατ' επέκταση μία διαφορετική κατατομή του οδόντος.

Έτσι, τροποποιήθηκε κατάλληλα ο κώδικας που είχε δημιουργηθεί στο προηγούμενο βήμα έτσι ώστε με δεδομένα τα στοιχεία:

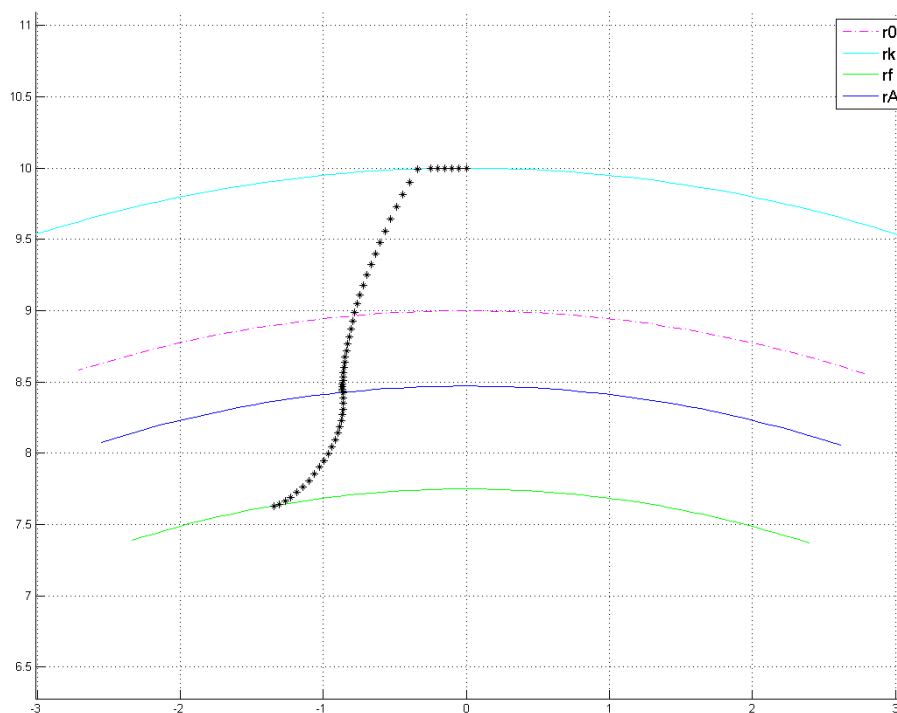
- αριθμός οδόντων κινητήριου τροχού ( $Z_1$ )
- αριθμός οδόντων κινούμενου τροχού ( $Z_2$ )
- module (m)
- γωνία εξειλιγμένης ( $\alpha_0$ )
- συντελεστής ύψους κεφαλής ( $C_k$ )
- συντελεστής ύψους ποδός ( $C_f$ )
- συντελεστής πάχους οδόντος ( $C_s$ )
- παράμετρος  $p_1$
- παράμετρος  $p_2$

να υπολογίζει τα λοιπά γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κινητήριου τροχού με την τροποποιημένη κατατομή (αλλά και κάποια χαρακτηριστικά του κινούμενου τροχού), να υπολογίζει όποιο άλλο μέγεθος κρίθηκε απαραίτητο για τη μετέπειτα πορεία της εργασίας και να παρέχει το ήμισυ της τροποποιημένης κατατομής του οδόντος του

κινητήριου τροχού, σε μορφή μητρώου που περιέχει τις συντεταγμένες των σημείων που την αποτελούν (βλέπε 'ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α').

Σχετικά με το πλήθος των σημείων που δημιουργούν το εκάστοτε τμήμα της κατατομής θα μπορούσε να επιλεγεί οποιοδήποτε μέγεθος, ρυθμίζοντας κατάλληλα την αντίστοιχη, για κάθε καμπύλη, ανάλυση. Έπρεπε το πλήθος των σημείων να μην είναι πολύ μικρό, έτσι ώστε να αποτυπώνεται με ακρίβεια η εκάστοτε κατατομή (ειδικά στα σημεία αλλαγής της καμπυλότητας), αλλά ούτε και πολύ μεγάλο, καθώς δεν θα προσφερόταν σημαντική βελτίωση της αποτύπωσης της κατατομής λόγω του αυξημένου πλήθους των χρησιμοποιούμενων σημείων. Επομένως, με αυτά τα στοιχεία ως γνώμονα, επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθούν για τη διαμόρφωση της εργαζόμενης κατατομής του οδόντος (βλέπε Σχήμα 2-1):

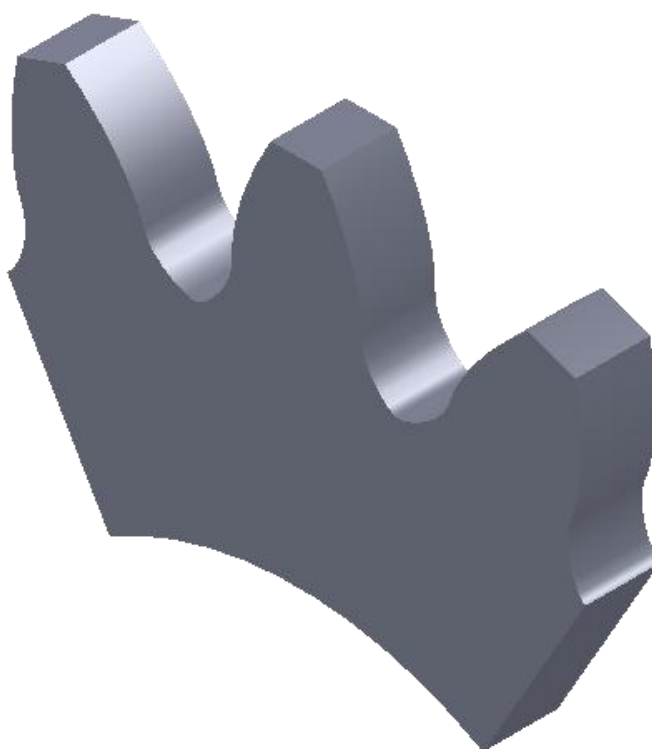
- επτά (7) σημεία για την αποτύπωση του κύκλου κεφαλής
- είκοσι οκτώ (28) σημεία για την αποτύπωση της καμπύλης της εξελιγμένης
- είκοσι ένα (21) σημεία για την αποτύπωση της καμπύλης Bézier



Σχήμα 2-1: Εργαζόμενη κατατομή του οδόντος του κινητήριου τροχού όπως προκύπτει από τον τροποποιημένο κώδικα στο προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab

Επίσης, να σημειωθεί ότι ο κώδικας εφοδιάστηκε με κάποιες συναρτήσεις (functions) που υπολογίζουν το βαθμό επικάλυψης ( $\epsilon$ ), τη θέση του πρώτου σημείου λειτουργίας του κινητήριου τροχού (απαραίτητο για τον καθορισμό της καμπύλης Bézier) καθώς και τη θέση του ανώτερου σημείου μονής επαφής (HPSTC) του κινητήριου τροχού (απαραίτητο για την ανάλυση των μοντέλων που μελετήθηκαν).

Στο επόμενο βήμα (Κεφάλαιο 5), τα σημεία που αποτελούν την εκάστοτε κατατομή οδόντος εισάγονται στο λογισμικό Solidworks της εταιρείας Dassault Systèmes, έτσι ώστε να δημιουργηθεί το αντίστοιχο τρισδιάστατο μοντέλο το οποίο θα μελετηθεί (βλέπε Σχήμα 2-2).



Σχήμα 2-2: Παράδειγμα μοντέλου προς μελέτη

Η διαδικασία που ακολουθείται είναι:

- Ένωση των σημείων της κατατομής με καμπύλη Spline.
- Χρήση της επιλογής mirror προκειμένου να προκύψει η διδιάστατη γεωμετρία ενός οδόντος.
- Δημιουργία διδιάστατου μοντέλου που αποτελείται από 3 οδόντες.

- Μετατροπή του δισδιάστατου μοντέλου σε τρισδιάστατο (με πλάτος τροχού-μοντέλου  $b = 1\text{mm}$ ).

Στη συνέχεια, οριοθετείται ένα τμήμα της πλευρικής επιφάνειας του μεσαίου οδόντος του μοντέλου (στην εργαζόμενη πλευρά του) πάνω στο οποίο θα εφαρμοστεί κάθετα ένα ομοιόμορφα κατανεμημένο, μοναδιαίο φορτίο. Το τμήμα αυτό βρίσκεται στην περιοχή του ανώτερου σημείου μονής επαφής (HPSTC) του οδόντος.

Επόμενο βήμα είναι η πραγματοποίηση στατικής ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων για την επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση (plane strain analysis) του οδόντος του εκάστοτε τρισδιάστατου μοντέλου (στο λογισμικό Solidworks).

Αρχικά γίνεται επιλογή του υλικού που θα χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση το οποίο είναι χάλυβας με μέτρο ελαστικότητας  $E=210000\text{ MPa}$  και λόγο Poisson  $\nu=0.28$ . Έπειτα το μοντέλο στηρίζεται κατάλληλα. Πακτώνεται η κοίλη βάση του καθώς και οι τομές του που αποτελούν το πέρας του σε κάθε πλευρά (στον άξονα συμμετρίας του αντίστοιχου διακένου). Στη συνέχεια ασκείται το προαναφερθέν φορτίο.

Σχετικά με την πλεγματοποίηση, χρησιμοποιήθηκε η αυτόματη γένεση πλέγματος που προσφέρεται από το λογισμικό για στερεά μοντέλα, με χρήση τετραεδρικών στοιχείων (tetrahedral 3D solid elements). Έτσι το πλέγμα του εκάστοτε μοντέλου δημιουργήθηκε αυτόματα με μέγεθος στοιχείου της τάξης των  $0.15\text{mm}$ , καθ' όλο τον όγκο του.

Από τα αποτελέσματα της ανάλυσης, η τιμή που εξετάστηκε για το εκάστοτε μοντέλο είναι η μέγιστη τιμή της πρώτης κύριας τάσης στην επικίνδυνη διατομή ποδός του οδόντος του. Να σημειωθεί ότι σκόπιμα επιλέχθηκε η τιμή του module του οδοντωτού τροχού ( $m=1\text{mm}$ ), η τιμή του πλάτους του ( $b=1\text{mm}$ ) και το μέτρο του επιβαλλόμενου σε αυτόν φορτίου ( $F=1\text{N}$ ), προκειμένου να προκύπτουν εύκολα αδιαστοποιημένα αποτελέσματα από την ανωτέρω ανάλυση.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν συγκεντρώθηκαν σε έναν πίνακα ο οποίος περιέχει τη μέγιστη πρώτη κύρια τάση που εμφανίζεται στην επικίνδυνη διατομή ποδός του οδόντος κάθε μοντέλου, συναρτήσει των παραμέτρων  $p_1$ ,  $p_2$ . Από την παρατήρηση και μόνο αυτού του πίνακα, ήταν πλέον εφικτό να διακρίνει κάποιος την περιοχή τιμών των παραμέτρων  $p_1$ ,  $p_2$  όπου θα εμφανίζόταν η ελάχιστη από τις μέγιστες πρώτες κύριες τάσεις μεταξύ των μοντέλων (περιοχή βέλτιστου

συνδυασμού των παραμέτρων  $p_1$ ,  $p_2$ ). Οστόσο, έπρεπε να προσδιοριστεί με ακρίβεια ο συνδυασμός των παραμέτρων  $p_1$ ,  $p_2$  για τον οποίο θα είχαμε το βέλτιστο αποτέλεσμα. Για να επιτευχθεί αυτό χρησιμοποιήθηκε ένας αλγόριθμος βελτιστοποίησης ο οποίος έχει αναπτυχθεί στο εργαστήριο Στοιχείων Μηχανών. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος παρέχει το ζητούμενο συνδυασμό των παραμέτρων  $p_1$ ,  $p_2$  καθώς και την αντίστοιχη τιμή της μέγιστης πρώτης κύριας τάσης. Στη συνέχεια, ο ανωτέρω συνδυασμός των παραμέτρων  $p_1$ ,  $p_2$  χρησιμοποιήθηκε για τη δημιουργία του αντίστοιχου τρισδιάστατου μοντέλου, στο οποίο πραγματοποιήθηκε ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων και το αποτελέσμά της συγκρίθηκε (ως προς τη μέγιστη πρώτη κύρια τάση) με το αντίστοιχο αποτέλεσμα του κώδικα βελτιστοποίησης.

Επόμενο βήμα είναι η εξακρίβωση της εμφάνισης (ή μη) υποκοπών λειτουργίας στον κινητήριο τροχό της βαθμίδας, κατά τη συνεργασία του με τον κινούμενο οδοντωτό τροχό. Το ενδιαφέρον για την εξακρίβωση αυτή εστιάστηκε αρχικά σε μια ευρύτερη περιοχή του βέλτιστου συνδυασμού των παραμέτρων  $p_1$  και  $p_2$ . Αυτό έγινε προκειμένου να απομονωθεί μια σχετικά μικρή περιοχή ενδιαφέροντος του συνολικού προαναφερθέντος πίνακα των αποτελεσμάτων. Τέλος, έγινε εξακρίβωση της ύπαρξης ή μη υποκοπών λειτουργίας για τον ίδιο το βέλτιστο συνδυασμό των παραμέτρων  $p_1$  και  $p_2$ .

Στο τελευταίο στάδιο της διπλωματικής εργασίας (Κεφάλαιο 6) συγκεντρώνονται και αξιολογούνται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την προαναφερθείσα ανάλυση.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# Προσέγγιση καμπύλης μέσω πολυωνύμων Bézier – Bernstein [6]

### 3.1 Εισαγωγή

Οι καμπύλες Bézier με πολυώνυμα βάσης Bernstein (ή απλά καμπύλες Bézier) αποτελούν έναν απλό και ευέλικτο τρόπο να προσεγγιστεί μια γεωμετρική μορφή χρησιμοποιώντας έναν περιορισμένο αριθμό σημείων ελέγχου. Βασικές ιδιότητες της καμπύλης Bézier είναι:

- Ξεκινάει από το πρώτο σημείο ελέγχου και τερματίζει στο τελευταίο.
- Τα δύο πρώτα σημεία ελέγχου καθορίζουν την κλίση της καμπύλης στο πρώτο σημείο της.
- Τα δύο τελευταία σημεία ελέγχου καθορίζουν την κλίση της καμπύλης στο τελευταίο σημείο της.

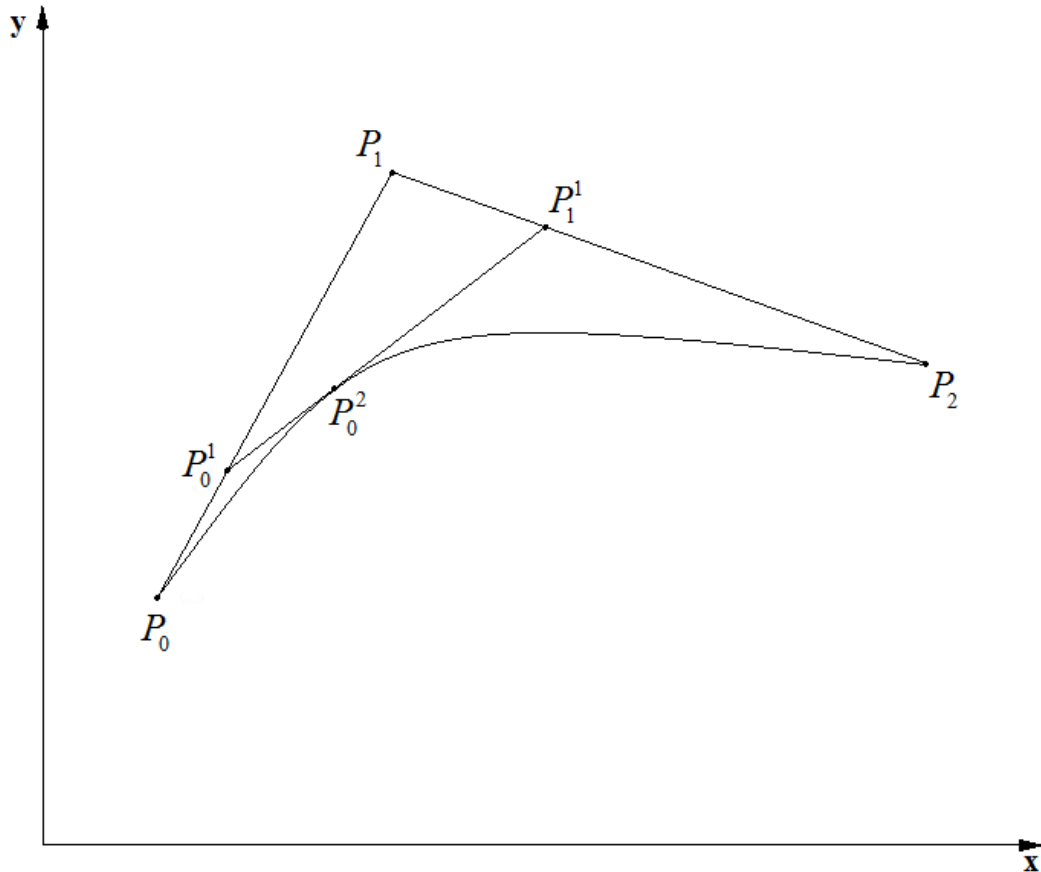
### 3.2 Αλγόριθμος de Casteljau

Ο αλγόριθμος de Casteljau αποτελεί ένα βασικό εργαλείο για τη σχεδίαση καμπυλών ή και επιφανειών. Στο Σχήμα (3-1) παρουσιάζεται μία εφαρμογή του για τρία σημεία (τα  $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ ).

Έστω  $t$  μία παράμετρος, όπου  $t \in [0,1]$ . Με βάση την παράμετρο αυτή και με αφετηρία τα τρία σημεία ( $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ ), δημιουργούμε για κάθε τιμή της  $t$  δύο νέα σημεία ως εξής:

$$\vec{r}_0^1(t) = (1-t)\vec{r}_0 + t\vec{r}_1 \quad (3.1\alpha)$$

$$\vec{r}_1^1(t) = (1-t)\vec{r}_1 + t\vec{r}_2 \quad (3.1\beta)$$



Σχήμα 3-1: Εφαρμογή του αλγόριθμου de Casteljau για τρία δεδομένα σημεία

Το σημείο  $\vec{r}_0^1(t)$  ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα  $P_0P_1$  και το σημείο  $\vec{r}_1^1(t)$  στο τμήμα  $P_1P_2$  (βάσει των ορισμών τους). Με βάση αυτά τα νέα σημεία, που έστω προέκυψαν για μια τιμή της παραμέτρου  $t$ , δημιουργούμε ένα τρίτο νέο σημείο (για την ίδια τιμή της  $t$ ) με βάση τη σχέση:

$$\vec{r}_0^2(t) = (1-t)\vec{r}_0^1 + t\vec{r}_1^1 \quad (3.2)$$

το οποίο θα ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα  $P_0^1P_1^1$ . Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.1α) και (3.1β) στην (3.2) προκύπτει ότι:

$$\vec{r}_0^2(t) = (1-t)^2\vec{r}_0 + 2t(t-1)\vec{r}_1 + t^2\vec{r}_2 \quad (3.3)$$

Επομένως, προέκυψε μια τετραγωνική έκφραση ως προς την παράμετρο  $t$ . Καθώς το  $t$  λαμβάνει τιμές εντός του διαστήματος  $[0,1]$ , δημιουργείται μια παραβολή. Η παραβολή αυτή, όπως φάνηκε παραπάνω, σχηματίστηκε από την αναδρομική εφαρμογή σχημάτων γραμμικής παρεμβολής.

Ο αναδρομικός τύπος του de Casteljau για N+1 σημεία ( $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ ) εκφράζεται μαθηματικά ως:

$$\vec{r}_i^\alpha(t) = (1-t)\vec{r}_i^{\alpha-1}(t) + t\vec{r}_{i+1}^{\alpha-1}(t) \quad (3.4)$$

όπου θέτουμε ότι:

$$\vec{r}_i^0(t) = \vec{r}_i, i=0, 1, \dots, N$$

(δηλαδή τα δεδομένα N+1 σημεία που ονομάζονται σημεία ελέγχου).

Αντίστοιχα, το πολυώνυμο που ορίζεται από την αλληλουχία των σημείων ( $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ ) ονομάζεται πολύγωνο Bézier. Η σχέση (3.4) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αναδρομικός τύπος σε οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού. Αποτελείται από δύο βρόχους τον ένα μέσα στον άλλον. Ο εξωτερικός βρόχος έχει ως μεταβλητή την  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, N$ ) και ο εσωτερικός την  $i$  ( $i = 0, 1, \dots, N-\alpha$ ). Ο διπλός αυτός βρόχος παριστάνεται εποπτικά με τον ακόλουθο τριγωνικό σχηματισμό που ονομάζεται και σχηματισμός του de Casteljau:

$$\begin{bmatrix} \vec{r}_0 & & & & & \\ \vec{r}_1 & \vec{r}_0^1 & & & & \\ \vec{r}_2 & \vec{r}_1^1 & \vec{r}_0^2 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \vec{r}_N & \vec{r}_{N-1}^1 & \vec{r}_{N-2}^2 & \dots & \vec{r}_0^N & \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Η εκτέλεση των πράξεων που αντιστοιχούν στον προαναφερθέντα αναδρομικό τύπο, καταλήγουν στην καμπύλη  $\vec{r}_0^N(t)$ , που είναι η ζητούμενη καμπύλη Bézier για τα προαναφερθέντα σημεία ελέγχου. Θα αποτελείται από τόσα σημεία  $\vec{r}_0^N(t)$  όσες διακριτές τιμές της παραμέτρου  $t \in [0,1]$  επιλεγούν.

Για την αναλυτική έκφραση της καμπύλης Bézier χρησιμοποιούνται τα λεγόμενα Bernstein πολυώνυμα. Έτσι, η καμπύλη Bézier δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{r}_0^N(t) = \sum_{i=0}^N \vec{r}_i B_i^N(t) \quad (3.6)$$

Προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων θέσης των σημείων ελέγχου, με συντελεστές που προσδιορίζονται από τα πολυώνυμα Bernstein:



$$B_i^N(t) = \binom{N}{i} t^i (1-t)^{N-i} \quad (3.7)$$

όπου:

$$\binom{a}{i} = \frac{a!}{i!(a-i)!} \quad (3.8)$$

Η σχέση (3.7) ισχύει για οποιαδήποτε τιμή του άνω δείκτη  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ .

Δηλαδή:

$$B_i^a(t) = \binom{a}{i} t^i (1-t)^{a-i} \quad (3.9)$$

ενώ ισχύει ο αναδρομικός τύπος:

$$B_i^a(t) = (1-t)B_i^{a-1}(t) + tB_{i-1}^{a-1}(t) \quad (3.10)$$

με ιδιότητες:

$$B_0^0(t) \equiv 1 \quad (3.11)$$

$$B_j^a(t) \equiv 0, j \notin \{0, \dots, N\} \quad (3.12)$$

$$\sum_{i=0}^N B_i^N(t) \equiv 1 \quad (3.13)$$

Όπως ο αλγόριθμος de Casteljau δημιουργεί τον τριγωνικό σχηματισμό (3.5), οι συντελεστές-πολυώνυμα Bernstein μπορούν να ενταχθούν και αυτοί σε ένα τριγωνικό μητρώο ως εξής:

$$\begin{bmatrix} B_0^0(t) & B_0^1(t) & B_0^2(t) & \cdots & B_0^N(t) \\ & B_1^1(t) & B_1^2(t) & \cdots & B_1^N(t) \\ & & B_2^2(t) & \cdots & B_2^N(t) \\ & & & \ddots & \\ & & & & B_N^N(t) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

όπου χρησιμοποιείται η αναδρομική σχέση (3.10) για τον υπολογισμό τους, ενώ τα στοιχεία που παραλείπονται είναι όλα μηδενικά.

Έτσι το μητρώο (3.14) μετασχηματίζεται στο:

$$\begin{bmatrix} 1 & (1-t) & (1-t)^2 & (1-t)^3 & (1-t)^4 & \dots \\ & t & 2 \cdot t \cdot (1-t) & 3 \cdot t \cdot (1-t)^2 & 4 \cdot t \cdot (1-t)^3 & \dots \\ & & t^2 & 3 \cdot t^2 \cdot (1-t) & 6 \cdot t^2 \cdot (1-t)^2 & \dots \\ & & & t^3 & 4 \cdot t^3 \cdot (1-t) & \dots \\ & & & & t^4 & \dots \\ & & & & & \vdots \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Οι ανωτέρω σχέσεις που αφορούν την καμπύλη Bézier μπορούν να υλοποιηθούν σε κάποια γλώσσα προγραμματισμού.

Για  $N+1$  σημεία ελέγχου  $(\vec{r}_0, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  και για οποιαδήποτε τιμή του  $t \in [0,1]$ , ο αναδρομικός τύπος (3.10) υπολογίζει τους  $N+1$  συντελεστές  $B_0^N(t), \dots, B_N^N(t)$ . Έτσι, για κάθε τιμή του  $t$  προκύπτει ένα νέο σημείο της ζητούμενης καμπύλης. Πρέπει, επομένως, να καθοριστεί αρχικά μια αλληλουχία τιμών της παραμέτρου  $t$  για την οποία θα υπολογιστούν τα αντίστοιχα σημεία της καμπύλης Bézier. Προφανώς, η επιλογή του πλήθους των σημείων που προκύπτουν μπορεί να γίνει από το χρήστη.

Τέλος, για τον υπολογισμό των σημείων της ζητούμενης καμπύλης χρησιμοποιείται η σχέση (3.6) με βάση τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου.

Είναι σημαντικό να τονιστεί η “ανεξαρτησία” και η “ομοιότητα” των εκφράσεων που παράγουν τις τρεις συντεταγμένες κάθε σημείου της καμπύλης Bézier. Ισχύει δηλαδή:

$$x^N(t) = x(t) = \sum_{i=0}^N B_i^N(t) x_i \quad (3.16\alpha)$$

$$y^N(t) = y(t) = \sum_{i=0}^N B_i^N(t) y_i \quad (3.16\beta)$$

$$z^N(t) = z(t) = \sum_{i=0}^N B_i^N(t) z_i \quad (3.16\gamma)$$

όπου  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$  είναι οι τρεις συντεταγμένες κάθε σημείου Bézier.

### 3.3 Μητρική γραφή μιας καμπύλης Bézier

Όσα προαναφέρθηκαν μπορούν να ενσωματωθούν σε μια μητρική γραφή η οποία δίνει κάθε σημείο  $\vec{r}_N$  της καμπύλης Bézier ως:

$$\vec{r}_N(t) \equiv \vec{r}(t) = \sum_{i=0}^N \vec{r}_i C_i(t) \quad (3.17)$$

δηλαδή:

$$x(t) = \sum_{i=0}^N x_i C_i(t) \quad (3.18\alpha)$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^N y_i C_i(t) \quad (3.18\beta)$$

$$z(t) = \sum_{i=0}^N z_i C_i(t) \quad (3.18\gamma)$$

όπου:

$$\begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ \vdots \\ C_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & \cdots & m_{0,N} \\ m_{1,0} & m_{1,1} & \cdots & m_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{N,0} & m_{N,1} & \cdots & m_{N,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

και

$$m_{i,j} = (-1)^{j-i} \binom{N}{j} \binom{j}{i} \quad (3.20)$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας N+1 σημεία ελέγχου δημιουργείται η αντίστοιχη καμπύλη Bézier.

Ισχύει:

$$\vec{r}_N(t=0) = \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \quad (3.21)$$

$$\vec{r}_N(t=1) = \vec{r}(1) = \vec{r}_N \quad (3.22)$$

δηλαδή η καμπύλη Bézier ξεκινάει από το πρώτο σημείο ελέγχου και καταλήγει στο τελευταίο (όπως έχει προαναφερθεί).

Με βάση το μητρώο (3.15) και για  $N+1$  σημεία ελέγχου, εκφράζεται η καμπύλη Bézier ως:

$$\vec{r}_N(t) = \vec{r}(t) = (1-t)^N \vec{r}_0 + Nt(1-t)^{N-1} \vec{r}_1 + O(t^2) \quad (3.23)$$

Παραγωγίζοντας ως προς  $t$  προκύπτει:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -N(1-t)^{N-1} \vec{r}_0 + N[(1-t)^{N-1} - (N-1)t(1-t)^{N-2}] \vec{r}_1 + O(t) \quad (3.24)$$

όπου:

$$\text{για } t=0, \quad \frac{d\vec{r}(0)}{dt} = N(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \quad (3.25)$$

$$\text{για } t=1, \quad \frac{d\vec{r}(1)}{dt} = N(\vec{r}_N - \vec{r}_{N-1}) \quad (3.26)$$

άρα αποδεικνύεται ότι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δύο πρώτα σημεία ελέγχου καθορίζει την κλίση της καμπύλης στο πρώτο σημείο της ( $t=0$ ), ενώ το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δύο τελευταία σημεία ελέγχου καθορίζει την κλίση της στο τελευταίο σημείο της ( $t=1$ ).

Να τονιστεί ότι τα σημεία ελέγχου μιας καμπύλης Bézier λειτουργούν ως πόλοι έλξης της καμπύλης. Με αλλαγή της θέσης ενός οποιοδήποτε σημείου ελέγχου, επηρεάζεται ολόκληρη η καμπύλη (αν και παρατηρείται μετακίνηση της καμπύλης κυρίως τοπικά, προς τη νέα θέση του σημείου ελέγχου που μετακινήθηκε).

Τα χαρακτηριστικά αυτά της καμπύλης Bézier θα εκμεταλλευτούμε στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

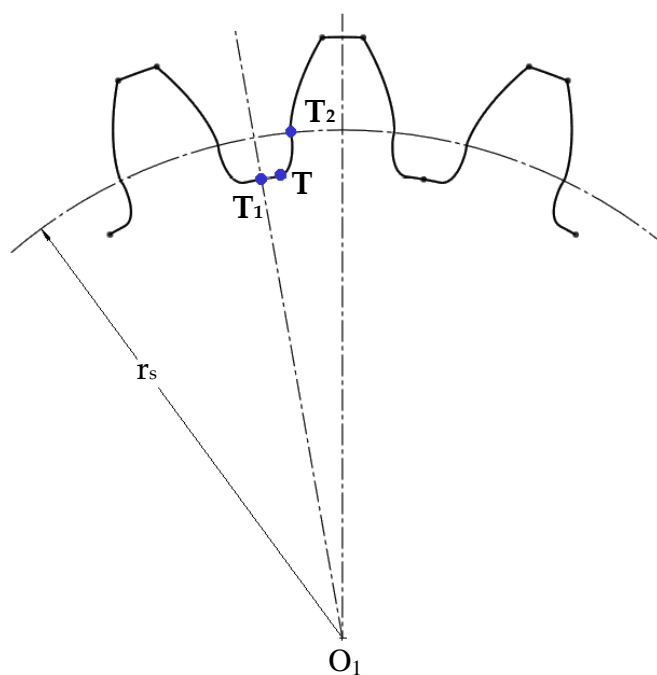
# Αντικατάσταση τμήματος της κατατομής με καμπύλη Bézier

### 4.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2, στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία μελετάται η μορφή της κατατομής του οδόντος ενός οδοντωτού τροχού (κινητήριος), με εστίαση στην ευρύτερη περιοχή της επικίνδυνης διατομής ποδός του οδόντος του τροχού. Κατά τη μελέτη αυτή, θα γίνει αντικατάσταση συγκεκριμένου τμήματος της κατατομής που υπάρχει στους κοινούς οδοντωτούς τροχούς με καμπύλη Bézier.

### 4.2 Περιγραφή διαδικασίας αντικατάστασης

Το τμήμα της κατατομής που θα αντικατασταθεί είναι το τμήμα  $T_1T_2$  (όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-1).



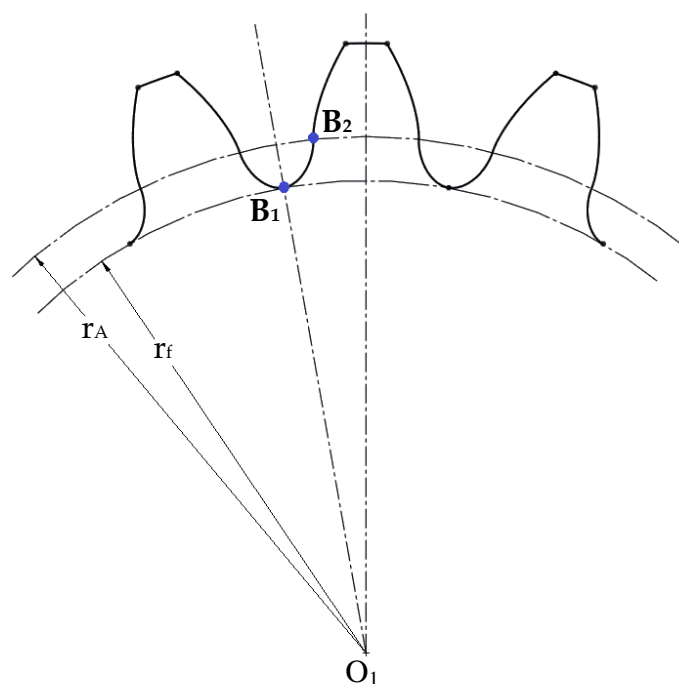
Σχήμα 4-1: Αρχική μορφή της κατατομής του οδόντος του κινητήριου τροχού.

Το τμήμα αυτό αποτελείται από δύο καμπύλες:

- Το ήμισυ του τμήματος του κύκλου ποδός που αντιστοιχεί στο διάκενο μεταξύ δύο διαδοχικών οδόντων, το οποίο έχει ως αρχή τον άξονα συμμετρίας του διακένου (σημείο  $T_1$ ) και ως πέρας το σημείο έναρξης του τμήματος του τροχοειδούς (σημείο  $T$ ).
- Το τροχοειδές (trochoid), το οποίο έχει ως αρχή το σημείο  $T$  και ως πέρας (σημείο  $T_2$ ) το σημείο έναρξης της εξειλιγμένης πάνω στον κύκλο ακτίνας  $r_s$  (βλέπε Κεφάλαιο 1).

Η καμπύλη Bézier που θα χρησιμοποιηθεί για την αντικατάσταση του τμήματος  $T_1T_2$  της κατατομής του οδόντος θα έχει:

- Ως αρχή (σημείο  $B_1$  στο Σχήμα 4-2), το σημείο τομής του άξονα συμμετρίας του διακένου μεταξύ δύο διαδοχικών οδόντων με τον κύκλο ποδός του οδοντωτού τροχού.
- Ως πέρας (σημείο  $B_2$  στο Σχήμα 4-2), το σημείο έναρξης της εξειλιγμένης καμπύλης πάνω στον κύκλο ακτίνας  $r_A$  (βλέπε Κεφάλαιο 1), και όχι πάνω στον κύκλο ακτίνας  $r_s$  όπως συμβαίνει κατά τη χρήση του τροχοειδούς.



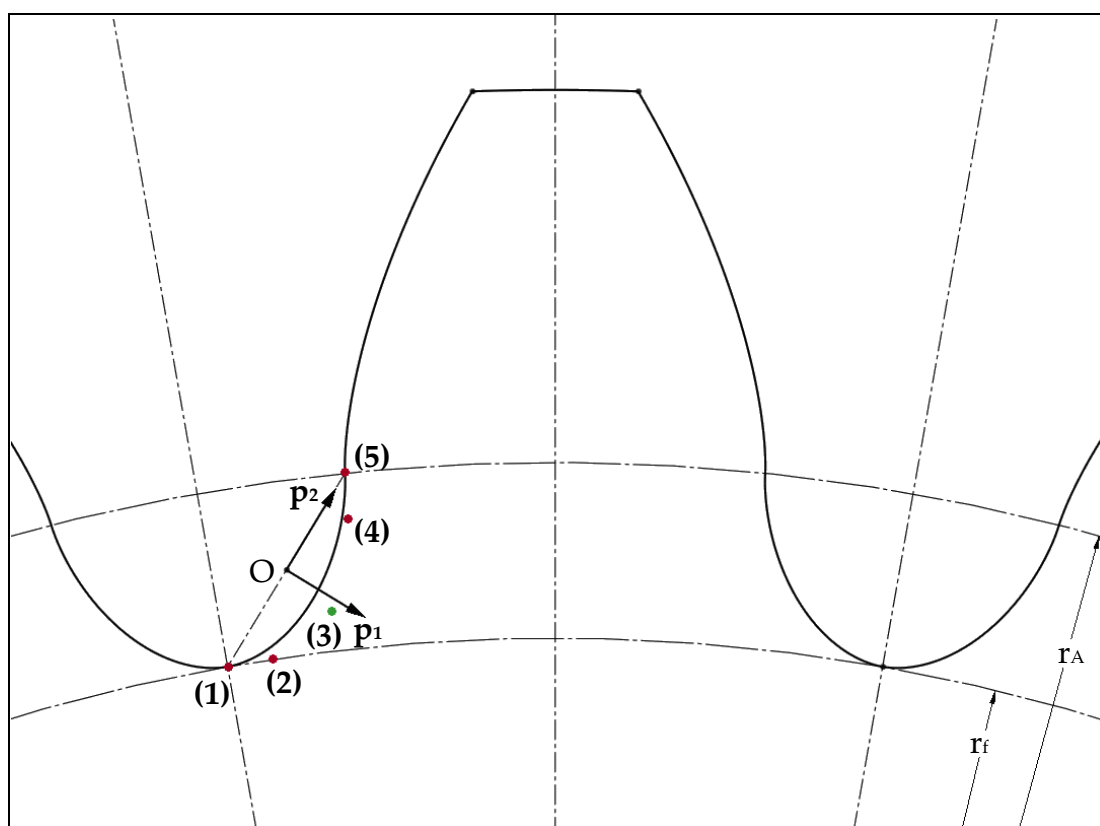
Σχήμα 4-2: Τελική μορφή της κατατομής του οδόντος του κινητήριου τροχού (χρήση Bézier)

## 4.3 Σημεία ελέγχου καμπύλης Bézier

### 4.3.1 Καθορισμός σημείων ελέγχου

Η καμπύλη που χρησιμοποιήθηκε είναι μια καμπύλη Bézier με πέντε (5) σημεία ελέγχου (βλέπε Σχήμα 4-3 και Σχήμα 4-4):

- τέσσερα σημεία σταθερής θέσης: (1), (2), (4), (5)
- ένα σημείο μεταβλητής θέσης: (3)



Σχήμα 4-3: Καμπύλη Bézier και σημεία ελέγχου της

**Πρώτο σημείο (1) με συντεταγμένες  $(x_1, y_1)$ :**

Το σημείο τομής του άξονα συμμετρίας του διακένου μεταξύ δύο διαδοχικών οδόντων, με τον κύκλο ποδός του οδοντωτού τροχού. Πρόκειται για το σημείο  $B_1$  στο Σχήμα 4-2. Η θέση του είναι σταθερή λόγω της φύσης της καμπύλης Bézier (βλέπε Κεφάλαιο 3).

### **Δεύτερο σημείο (2) με συντεταγμένες $(x_2, y_2)$ :**

Η θέση του επιλέγεται να είναι σταθερή και τέτοια ώστε το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δύο πρώτα σημεία ελέγχου (και καθορίζει την κλίση της καμπύλης Bézier στην αφετηρία της) να έχει την ίδια κλίση με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα δύο πρώτα σημεία ελέγχου της καμπύλης Bézier του γειτονικού οδόντα. Δηλαδή οι καμπύλες Bézier των δύο γειτονικών οδόντων θα έχουν την ίδια κλίση στο σημείο τομής τους. Επιπροσθέτως, να σημειωθεί ότι ο κώδικας (βλέπε 'ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α') έχει διαμορφωθεί έτσι ώστε η απόσταση του δεύτερου σημείου από το πρώτο, να είναι ίση (με ακρίβεια που ορίζεται από το χρήστη) με το ένα πέμπτο της απόστασης μεταξύ των σημείων (1) και (5).

### **Τρίτο σημείο (3) με συντεταγμένες $(x_3, y_3)$ :**

Είναι το σημείο του οποίου μεταβάλλεται η θέση προκειμένου να προκύπτει κάθε φορά μία νέα καμπύλη Bézier (η επίδραση της οποίας, επί της συγκέντρωσης τάσεων στον πόδα του οδόντος του οδοντωτού τροχού, μελετάται). Στην επόμενη ενότητα θα ακολουθήσει περαιτέρω ανάλυση σχετικά με τον τρόπο καθορισμού της θέσης του συγκεκριμένου σημείου.

### **Τέταρτο σημείο (4) με συντεταγμένες $(x_4, y_4)$ :**

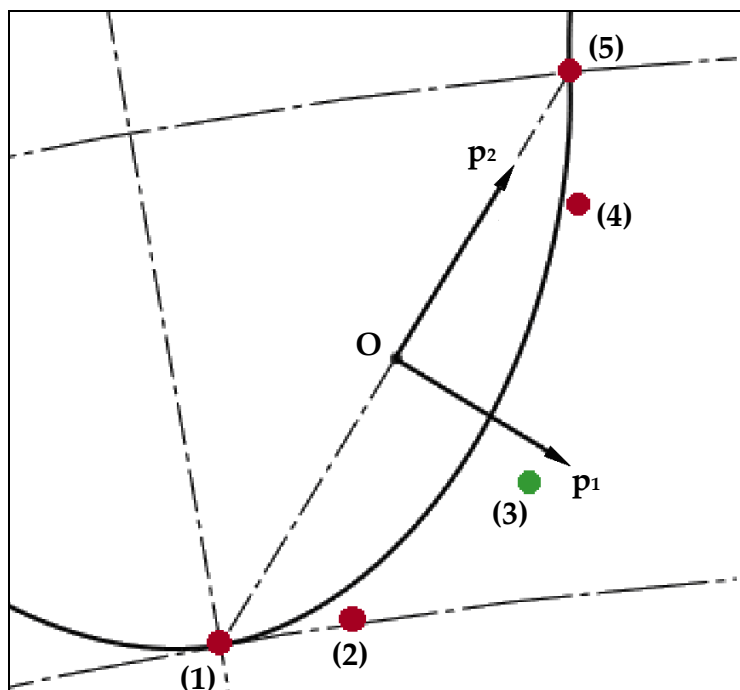
Όμοια με το δεύτερο σημείο, η θέση του επιλέγεται να είναι σταθερή και τέτοια ώστε η κλίση του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα δύο τελευταία σημεία ελέγχου (και καθορίζει την κλίση της καμπύλης Bézier στο πέρας της) να είναι ίση με την εφαπτομένη της εξειλιγμένης καμπύλης στο πρώτο σημείο της (σημείο που βρίσκεται σε ακτίνα  $r_a$  από το κέντρο  $O_1$  του κινητήριου τροχού). Η τιμή της κλίσης αυτής προκύπτει από τον κώδικα με βάση τη σχέση 1.9 του Κεφαλαίου 1. Επιπροσθέτως, να σημειωθεί ότι ο κώδικας (βλέπε 'ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α') έχει διαμορφωθεί έτσι ώστε η απόσταση του τέταρτου σημείου από το πέμπτο, να είναι ίση (με ακρίβεια που ορίζεται από το χρήστη) με το ένα πέμπτο της απόστασης μεταξύ των σημείων (1) και (5).

### **Πέμπτο σημείο (5) με συντεταγμένες $(x_5, y_5)$ :**

Βρίσκεται στο σημείο έναρξης της εξειλιγμένης καμπύλης, σε ακτίνα  $r_a$  από το κέντρο  $O_1$  του κινητήριου τροχού (βλέπε Κεφάλαιο 1) και πρόκειται για το σημείο  $B_2$  στο Σχήμα 4-2. Είναι το πρώτο σημείο λειτουργίας του



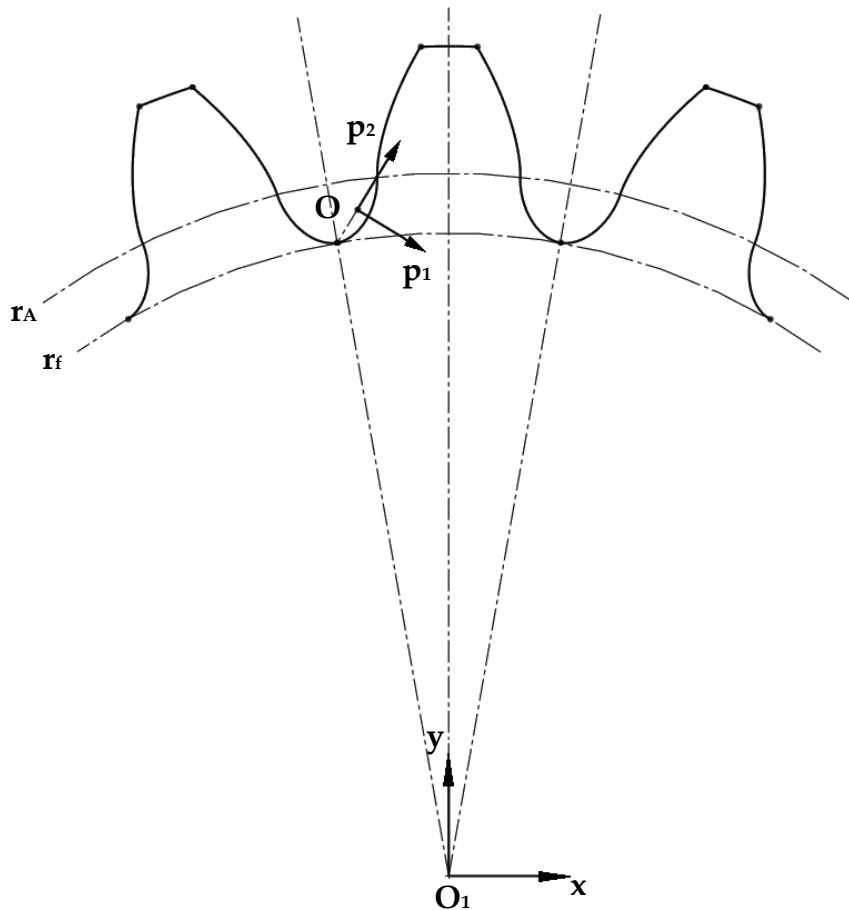
κινητήριου τροχού. Η θέση του είναι σταθερή λόγω της φύσης της καμπύλης Bézier (βλέπε Κεφάλαιο 3).



Σχήμα 4-4: Σημεία ελέγχου καμπύλης Bézier.

#### 4.3.2 Αναλυτική περιγραφή του τρόπου καθορισμού της θέσης του τρίτου σημείου ελέγχου

Για τον ορισμό της θέσης του τρίτου σημείου (3), αρχικά ορίστηκε ένα τοπικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $p_1 O p_2$  (βλέπε Σχήματα 4-4 και 4-5). Το κέντρο του συγκεκριμένου συστήματος συντεταγμένων βρίσκεται στο μέσο της απόστασης των σημείων (1) και (5). Ο ένας άξονάς του (άξονας που αφορά την τετμημένη  $p_1$ ) είναι κάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία (1) και (5) και με φορά που δείχνεται στο Σχήμα 4-4, ενώ ο άλλος του άξονας (άξονας που αφορά την τεταγμένη  $p_2$ ) είναι κάθετος στον άξονα των  $p_1$  και με φορά που δείχνεται στο ίδιο σχήμα. Έτσι, το σημείο (3) θα έχει συντεταγμένες  $(p_1, p_2)$  σε mm ως προς το τοπικό σύστημα συντεταγμένων.



Σχήμα 4-5: Χρησιμοποιούμενα συστήματα συντεταγμένων.

Ακολούθως, εκφράζεται [7] το τοπικό σύστημα συντεταγμένων  $p_1O_2p_2$  ως προς το καθολικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $xO_1y$  (βλέπε Σχήμα 4-5), το οποίο βρίσκεται στο κέντρο  $O_1$  του κινητήριου τροχού (πάνω στον άξονα περιστροφής του). Ο άξονας των τετμημένων του είναι οριζόντιος ενώ ο άξονας των τεταγμένων του κατακόρυφος. Να σημειωθεί ότι η καμπύλη Βέζιερ εκφράζεται ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $xO_1y$ .

Με τη διαδικασία αυτή, εκφράζεται τελικά η θέση του σημείου (3) ως προς το καθολικό σύστημα συντεταγμένων  $xO_1y$ . Με αυτόν τον τρόπο, μεταβάλλοντας τις παραμέτρους-συντεταγμένες  $p_1$  και  $p_2$ , μεταβάλλονται οι συντεταγμένες  $(x_3, y_3)$  του σημείου ελέγχου (3). Έτσι, μπορεί να αλλάξει η μορφή της καμπύλης Βέζιερ, απλώς, αλλάζοντας τις παραμέτρους  $p_1$  και  $p_2$ . Στο 'ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β' παρουσιάζονται κάποια παραδείγματα κατατομών που προκύπτουν με μεταβολή του συνδυασμού των παραμέτρων αυτών.

Σχετικά με τα όρια των τιμών των παραμέτρων  $p_1$  και  $p_2$ , πρέπει να είναι τέτοια ώστε η προκύπτουσα καμπύλη Bézier :

- Να μη βρίσκεται σε περιοχή εσωτερικά της ακτίνας του κύκλου ποδός του οδοντωτού τροχού.
- Να μην τέμνεται με κάποια από τις υπόλοιπες καμπύλες που αποτελούν την κατατομή του οδόντος.
- Να καλύπτεται μία σχετικά ευρεία περιοχή των παραμέτρων  $p_1$  και  $p_2$ .

Με βάση τα ανωτέρω κριτήρια, επιλέχθηκε να γίνει μελέτη:

- Της πρώτης παραμέτρου  $p_1$  για τιμές από 0.10mm έως 0.40mm, με βήμα 0.05mm.
- Της δεύτερης παραμέτρου  $p_2$  για τιμές από -0.15mm έως 0.45mm, με βήμα 0.10mm.

#### 4.4 Υπολογισμός καμπύλης Bézier

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 3, η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης Bézier είναι (οι εξισώσεις επαναλαμβάνονται για λόγους πληρότητας του κειμένου):

$$\vec{r}_N(t) \equiv \vec{r}(t) = \sum_{i=0}^N \vec{r}_i C_i(t) \quad (4.1)$$

δηλαδή:

$$x(t) = \sum_{i=0}^N x_i C_i(t) \quad (4.2\alpha)$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^N y_i C_i(t) \quad (4.2\beta)$$

$$z(t) = \sum_{i=0}^N z_i C_i(t) \quad (4.2\gamma)$$

(δεν λαμβάνεται υπόψιν εφόσον αναφερόμαστε στο επίπεδο  $xO_1y$ )

με  $0 \leq t \leq 1$

όπου για χρήση πέντε (5) σημείων ελέγχου προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \\ C_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -12 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ t^2 \\ t^3 \\ t^4 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Εισάγοντας τις παραπάνω εξισώσεις σε ένα βρόχο με μεταβλητή  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) και με χρήση των προαναφερθέντων πέντε σημείων ελέγχου, προκύπτουν τα σημεία της εκάστοτε καμπύλης Bézier.

Να σημειωθεί (για λόγους καλύτερης κατανόησης αν και είναι απλώς ζήτημα συμβολισμού) ότι, με βάση τη θεωρία, στους ανωτέρω τύπους (4.1, 4.2α, 4.2β, 4.2γ) χρησιμοποιούνται ως σημεία ελέγχου (για 5 σημεία ελέγχου, άρα  $N=4$ ) τα σημεία  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ ,  $(x_4, y_4)$ . Ωστόσο, τα σημεία που χρησιμοποιούνται στον κώδικα είναι τα σημεία  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ ,  $(x_4, y_4)$ ,  $(x_5, y_5)$ . Οπότε, αν στους προαναφερθέντες τύπους αντικατασταθεί το  $\vec{r}_i$  με  $\vec{r}_{i+1}$ , το  $x_i$  με  $x_{i+1}$  και αντίστοιχα το  $y_i$  με  $y_{i+1}$  και το  $z_i$  με  $z_{i+1}$ , προκύπτουν οι σχέσεις που παρέχουν την ζητούμενη καμπύλη.

Με βάση τη μεθοδολογία που περιγράφεται ανωτέρω, τροποποιήθηκε κατάλληλα ο αρχικός κώδικας (βλέπε Κεφάλαιο 2 και 'ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α'). Έτσι, προέκυψε ο τελικός κώδικας που υπολογίζει τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κινητήριου τροχού με την τροποποιημένη κατατομή, υπολογίζει όποιο άλλο μέγεθος κρίθηκε απαραίτητο για τη μετέπειτα πορεία της εργασίας και παρέχει το ήμισυ της τροποποιημένης κατατομής του οδόντος του κινητήριου τροχού, σε μορφή μητρώου που περιέχει τις συντεταγμένες των σημείων που την αποτελούν. Ανάλογα με το ζεύγος των παραμέτρων  $(p_1, p_2)$  που χρησιμοποιούνται στον κώδικα, προκύπτει μία διαφορετική καμπύλη Bézier, άρα μία διαφορετική κατατομή οδόντος και κατά συνέπεια ένα νέο μοντέλο προς ανάλυση.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

# Ανάλυση τάσεων οδοντωτών τροχών με πεπερασμένα στοιχεία

### 5.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια έχουν παρουσιαστεί κάποια βασικά στοιχεία θεωρίας που απαιτούνται για την ανάπτυξη και περιγραφή της μεθοδολογίας που ακολουθήθηκε στην παρούσα εργασία. Επίσης, παρουσιάστηκαν κάποια στοιχεία απαραίτητα για την ανάπτυξη και κατανόηση της ακόλουθης ανάλυσης, ενώ τα υπολειπόμενα θα αναφερθούν στο συγκεκριμένο κεφάλαιο.

Αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου είναι η παρουσίαση του βασικού μέρους της ανάλυσης. Σε αυτό περιλαμβάνεται ο ορισμός των χαρακτηριστικών των μελετώμενων οδοντωτών τροχών, ο τρόπος μοντελοποίησης της συνεργασίας τους, η συνολική περιγραφή της διαδικασίας μελέτης τους καθώς και η παράθεση των αποτελεσμάτων της μελέτης αυτής. Έπειτα, αναπτύσσεται η διαδικασία εύρεσης του μοντέλου με τη βέλτιστη απόδοση όσον αφορά στην αντοχή των οδόντων του σε κάμψη.

Τελευταίο βήμα είναι η εξακρίβωση της εμφάνισης (ή μη) υποκοπών λειτουργίας στον τροχό με τους λιγότερους οδόντες (κινητήριος) καθώς και η μελέτη της ομαλής συνεργασίας του ζεύγους των οδοντωτών τροχών.

### 5.2 Χαρακτηριστικά μελετώμενων οδοντωτών τροχών

Όπως προαναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2, κατά τη συνεργασία δύο οδοντωτών τροχών, ο τροχός που καταπονείται περισσότερο (λόγω κάμψης) στην επικίνδυνη διατομή ποδός των οδόντων του είναι ο τροχός με το μικρότερο αριθμό οδόντων. Έτσι, η εστίαση της μελέτης-ανάλυσης θα γίνει στον κινητήριο τροχό της βαθμίδας.

Οι τροχοί που επιλέχθηκαν να μελετηθούν είναι ένα ζεύγος μετωπικών τροχών με ευθείς οδόντες όπου ο κινητήριος τροχός θα έχει αριθμό οδόντων  $Z_1=18$  ενώ ο κινούμενος τροχός θα έχει αριθμό οδόντων  $Z_2=50$ .

Τα μοντέλα των οδοντωτών τροχών που χρησιμοποιήθηκαν ως κινητήριος τροχός κατά την ανάλυση έχουν χαρακτηριστικά τα οποία αναφέρονται συγκεντρωτικά στον Πίνακα 5-1. Ορισμένα χαρακτηριστικά έχουν αναφερθεί στο Κεφάλαιο 2 αλλά επαναλαμβάνονται για λόγους πληρότητας του κειμένου. Για τον προσδιορισμό των μεγεθών (εκτός αυτών που ορίζονται εκ των προτέρων) χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις που αναφέρονται στο Κεφάλαιο 1.

Χαρακτηριστικά κινητήριου τροχού	Τιμή
$Z_1$ (αριθμός οδόντων)	18
m (module)	1 mm
b (πλάτος τροχού)	1 mm
$\alpha_o$ (γωνία εξειλιγμένης)	20°
$C_k$ (συντελεστής ύψους κεφαλής)	1
$C_f$ (συντελεστής ύψους ποδός)	1.25
$C_s$ (συντελεστής πάχους οδόντος)	0.5
$r_o$ (ακτίνα αρχικού κύκλου)	9 mm
$r_g$ (ακτίνα βασικού κύκλου)	8.4572 mm
$r_k$ (ακτίνα κύκλου κεφαλής)	10 mm
$r_f$ (ακτίνα κύκλου ποδός)	7.75 mm
$r_A$ (ακτίνα πρώτου σημείου λειτουργίας)	8.4713 mm
$r_{HPSTC}$ (ακτίνα ανώτερου σημείου μονής επαφής)	9.1302 mm
$\varepsilon$ (βαθμός επικάλυψης)	1.6422

Πίνακας 5-1: Χαρακτηριστικά κινητήριου τροχού

Τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά του κινούμενου τροχού αναφέρονται στον Πίνακα 5-2. Δεν αναφέρονται οι ακτίνες που προσδιορίζουν τη θέση των διακριτών σημείων της τροχιάς επαφών (όσον αφορά στον κινούμενο τροχό) καθώς δεν ήταν απαραίτητες για την πραγματοποίηση της ανάλυσης.

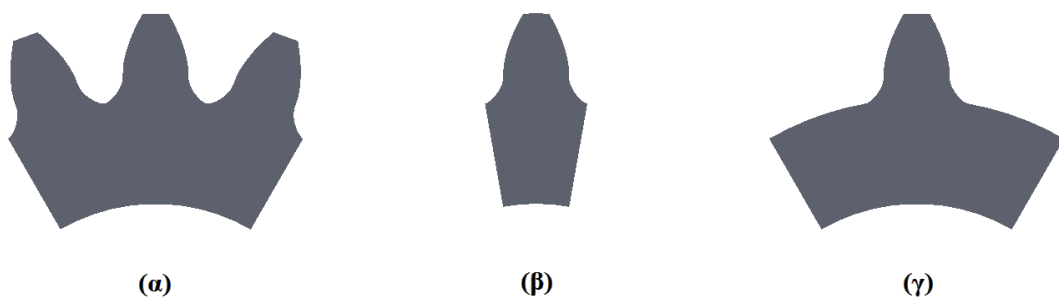
Χαρακτηριστικά κινούμενου οδοντωτού τροχού	Τιμή
$Z_2$ (αριθμός οδόντων τροχού)	50
m (module)	1 mm
b (πλάτος τροχού)	1 mm
$\alpha_0$ (γωνία εξειλιγμένης)	20°
$C_k$ (συντελεστής ύψους κεφαλής)	1
$C_f$ (συντελεστής ύψους ποδός)	1.25
$C_s$ (συντελεστής πάχους οδόντος)	0.5
$r_0$ (ακτίνα αρχικού κύκλου)	25 mm
$r_g$ (ακτίνα βασικού κύκλου)	23.4923 mm
$r_k$ (ακτίνα κύκλου κεφαλής)	26 mm
$r_f$ (ακτίνα κύκλου ποδός)	23.75 mm

Πίνακας 5-2: Χαρακτηριστικά κινούμενου οδοντωτού τροχού

### 5.3 Τρόπος μοντελοποίησης συνεργασίας οδοντωτών τροχών

Η μοντελοποίηση της προαναφερθείσας συνεργασίας πραγματοποιείται θεωρώντας ένα μοντέλο το οποίο αποτελεί τμήμα του συνολικού κινητήριου τροχού. Το μοντέλο αυτό πακτώνεται και φορτίζεται κατάλληλα έτσι ώστε να προσομοιάζεται η συνεργασία του κινητήριου με τον κινούμενο τροχό.

Το προαναφερθέν μοντέλο αποτελείται από τρεις (3) οδόντες και το πέρας του σε κάθε πλευρά βρίσκεται στον άξονα συμμετρίας του αντίστοιχου διακένου (Σχήμα 5-1(α)). Είχε εξεταστεί η περίπτωση της χρησιμοποίησης μοντέλου με έναν οδόντα, όπου το πέρας του σε κάθε πλευρά βρίσκεται στον άξονα συμμετρίας του αντίστοιχου διακένου (Σχήμα 5-1(β)), αλλά και η περίπτωση της χρησιμοποίησης μοντέλου με έναν οδόντα, όπου μετά τον άξονα συμμετρίας του αντίστοιχου διακένου σε κάθε πλευρά, υπάρχει κυκλικός τομέας (Σχήμα 5-1(γ)). Ωστόσο, έπειτα από δοκιμές που έγιναν με εφαρμογή φορτίου στο μεσαίο οδόντα του μοντέλου με τους τρεις οδόντες καθώς και στον οδόντα καθενός εκ των άλλων δύο μοντέλων, διαπιστώθηκε ότι με τη χρήση του μοντέλου με τους τρεις οδόντες προκύπτουν πιο ακριβή αποτελέσματα.



Σχήμα 5-1: Επιλογή μοντέλου προς μελέτη

Όπως προαναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 1, το πλέον κατάλληλο τμήμα της τροχιάς επαφών για τη μελέτη της αντοχής ενός οδόντος είναι το τμήμα στο οποίο βρίσκεται σε επαφή μόνο ένα ζεύγος συνεργαζόμενων οδόντων. Είναι το τμήμα (A'B') του Σχήματος 1-13.

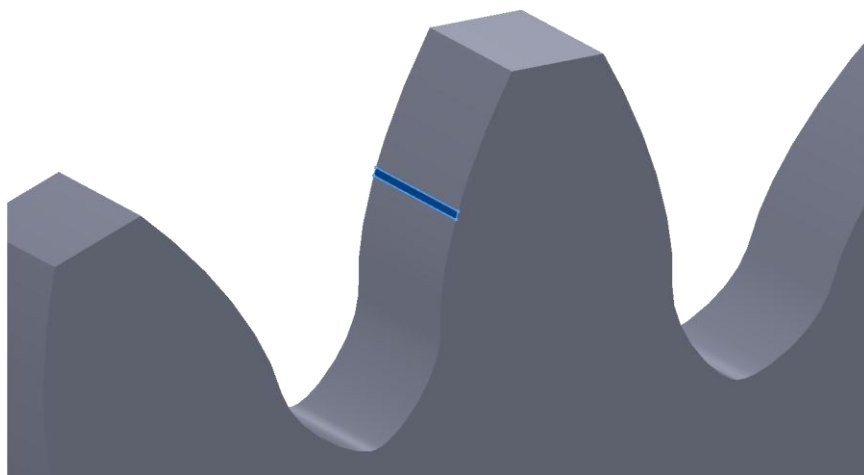
Ήταν επομένως απαραίτητο να προσδιορισθεί ένα συγκεκριμένο σημείο του τμήματος (A'B'), στο οποίο, όταν ασκείται φορτίο στον οδόντα, προκαλείται η μέγιστη δυνατή καταπόνηση στην επικίνδυνη διατομή ποδός του. Για το λόγο αυτό, χρειάστηκε (δεδομένου ότι πραγματοποιείται στατική ανάλυση) να επιλεχθεί το σημείο στο οποίο δημιουργείται ο μέγιστος δυνατός μοχλοβραχίονας ως προς την επικίνδυνη διατομή ποδός του οδόντος υπό το μέγιστο δυνατό φορτίο. Με αυτόν τον τρόπο, εμφανίζεται η μέγιστη δυνατή τιμή της πρώτης κύριας τάσης στην επικίνδυνη διατομή ποδός της εργαζόμενης κατατομής του οδόντος (που είναι και το ζητούμενο). Το προαναφερθέν σημείο είναι το ανώτερο σημείο μονής επαφής (HPSTC) του οδόντος του κινητήριου τροχού.

Επιπροσθέτως, πρέπει να σημειωθεί ότι (δεδομένου ότι το εκάστοτε μοντέλο μελετάται σε τρεις διαστάσεις) το προαναφερθέν φορτίο θα ασκούνταν, θεωρητικά, ως κατανεμημένο φορτίο πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Το ευθύγραμμο αυτό τμήμα θα διερχόταν από το σημείο HPSTC (επί της εργαζόμενης κατατομής του οδόντος), θα ήταν παράλληλο στον άξονα περιστροφής του οδοντωτού τροχού και θα κειτόταν πάνω στην πλευρική επιφάνεια του οδόντος.

Όμως, επιδίωξη είναι να υπάρξει καλύτερη μοντελοποίηση της φόρτισης που ασκείται πραγματικά στον οδόντα του κινητήριου τροχού κατά τη συνεργασία του με τον κινούμενο τροχό. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκαν δύο ευθύγραμμα τμήματα εκατέρωθεν του προαναφερθέντος ευθύγραμμου τμήματος που θα διερχόταν από το



HPSTC. Τα τμήματα αυτά είναι παράλληλα στο προαναφερθέν ευθύγραμμο τμήμα, ισαπέχουν από αυτό και κείτονται επί της πλευρικής επιφάνειας του οδόντος. Με τον τρόπο αυτό οριοθετείται μία επιφάνεια της κατατομής (Σχήμα 5-2) πάνω στην οποία ασκείται το επιβαλλόμενο φορτίο. Το πλάτος της επιφάνειας αυτής είναι της τάξης των  $0.05m$  (τάξη μεγέθους της πεπλατυσμένης περιοχής λόγω πίεσης επιφάνειας-όπου  $m=module$ ) [12].



Σχήμα 5-2: Επιφάνεια επιβολής φορτίου ( πλάτους  $0.05 \cdot m$  )

Επομένως, τα βήματα που ακολουθήθηκαν προκειμένου να δημιουργηθούν τα προς μελέτη μοντέλα αναφέρονται ακολούθως (μέρος της συνολική διαδικασίας έχει αναφερθεί και στο Κεφάλαιο 2, ωστόσο, επαναλαμβάνεται εδώ επιγραμματικά για λόγους πληρότητας του κειμένου):

- Χρήση του κώδικα που έχει αναπτυχθεί στο προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab ('ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α') και ανάλογα με τις παραμέτρους  $r_1$ ,  $r_2$  (mm) που χρησιμοποιούνταν (οι οποίες καθορίζουν τη μορφή της καμπύλης Bézier που χρησιμοποιείται στην αντίστοιχη κατατομή), προέκυπτε κάθε φορά μία διαφορετική κατατομή οδόντος υπό μορφή μητρώου συντεταγμένων των σημείων που την αποτελούν.
- Εισαγωγή της εκάστοτε κατατομής στο λογισμικό Solidworks προκειμένου να δημιουργηθεί το αντίστοιχο δισδιάστατο μοντέλο τριών οδόντων.
- Μετατροπή του δισδιάστατου μοντέλου σε τρισδιάστατο (με πλάτος τροχού-μοντέλου  $b = 1mm$ ).

- Δημιουργία της επιφάνειας επιβολής του φορτίου.

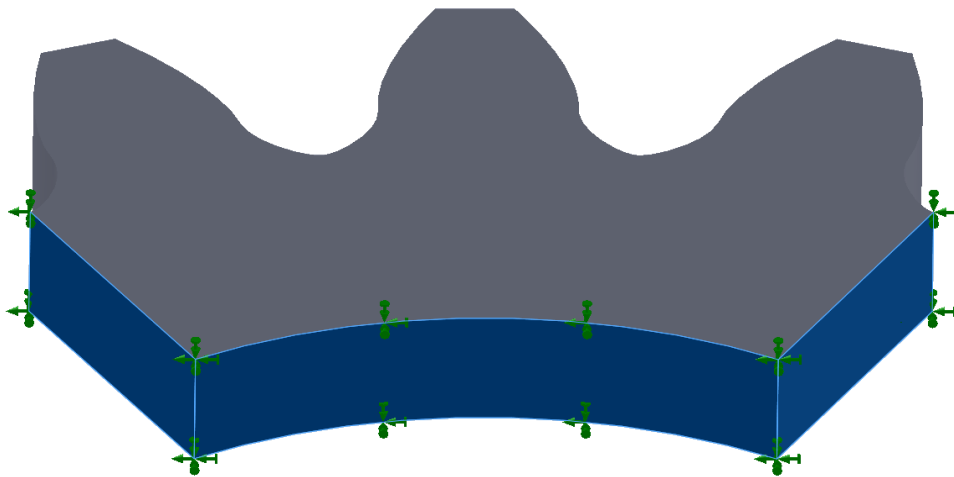
Εφόσον έχουν δημιουργηθεί τα μοντέλα που πρόκειται να μελετηθούν, επόμενο βήμα είναι η πραγματοποίηση της ανάλυσης.

## 5.4 Περιγραφή διαδικασίας ανάλυσης [5]

Πραγματοποιείται στατική ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων για την επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση (plane strain analysis) του οδόντος του εκάστοτε τρισδιάστατου μοντέλου (στο λογισμικό Solidworks).

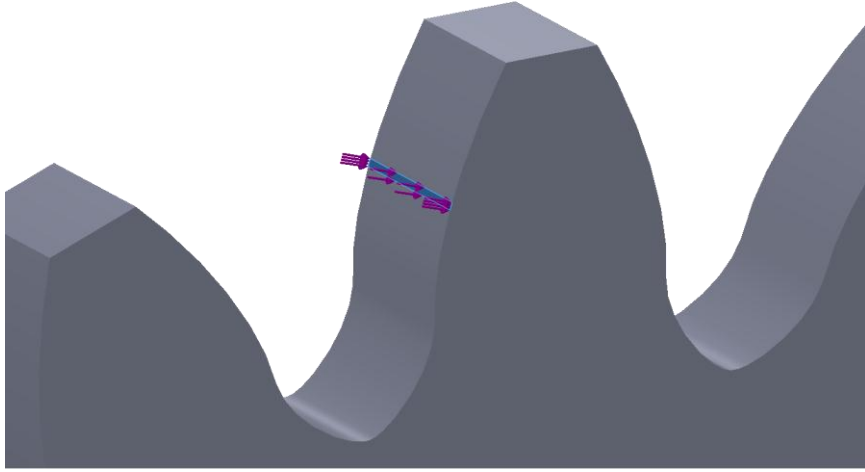
Αρχικά γίνεται επιλογή του υλικού που θα χρησιμοποιηθεί το οποίο είναι κραματωμένος χάλυβας (Alloy Steel) με μέτρο ελαστικότητας  $E=210000\text{MPa}$  και λόγο Poisson  $\nu=0.28$ .

Στη συνέχεια ορίζονται οι συνθήκες στήριξης του εκάστοτε μοντέλου. Γίνεται πάκτωση της κοίλης βάσης του καθώς και των τομών του που αποτελούν το πέρασ του σε κάθε πλευρά (στον άξονα συμμετρίας του αντίστοιχου διακένου-Σχήμα 5-3).



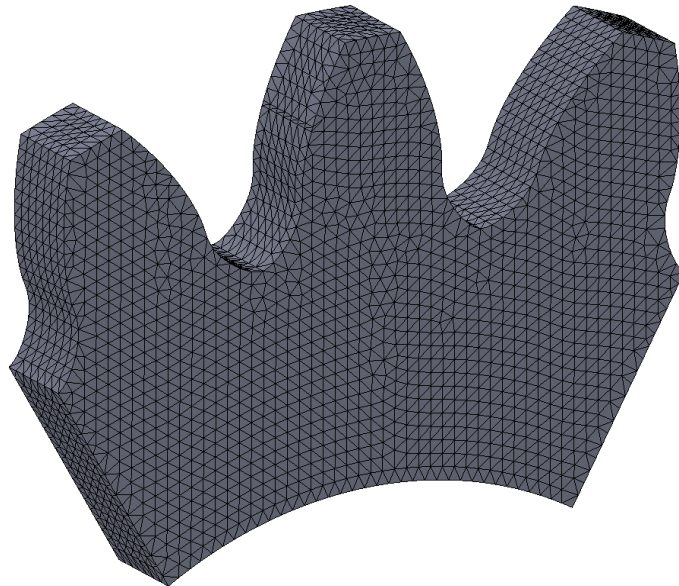
Σχήμα 5-3: Επιβολή συνθηκών στήριξης στο μοντέλο

Επόμενο βήμα είναι η εφαρμογή του επιθυμητού φορτίου στην επιφάνεια που έχει οριοθετηθεί, όπως προαναφέρθηκε, στην πλευρική επιφάνεια της εργαζόμενης πλευράς του μεσαίου οδόντος του μοντέλου. Το φορτίο είναι στατικό, μοναδιαίο ( $F=1\text{N}$ ), κάθετο στην προαναφερθείσα επιφάνεια και ομοιόμορφα κατανεμημένο σε αυτή (Σχήμα 5-4).



Σχήμα 5-4: Επιβαλλόμενο φορτίο στο μοντέλο

Για την πλεγματοποίηση του εκάστοτε μοντέλου, χρησιμοποιήθηκε η αυτόματη γένεση πλέγματος που προσφέρεται από το λογισμικό για στερεά μοντέλα, με χρήση τετραεδρικών στοιχείων (tetrahedral 3D solid elements). Έτσι, το πλέγμα του εκάστοτε μοντέλου δημιουργήθηκε αυτόματα με μέγεθος στοιχείου της τάξης των 0.15mm καθ' όλο τον όγκο του (Σχήμα 5-5).



Σχήμα 5-5: Πλεγματοποίηση μοντέλου με πεπερασμένα στοιχεία

Κατά τη διαδικασία της ανάλυσης, η τιμή που εξετάστηκε για το εκάστοτε μοντέλο είναι η μέγιστη τιμή της πρώτης κύριας τάσης στην επικίνδυνη διατομή ποδός του οδόντος του. Να σημειωθεί ότι η μέγιστη πρώτη κύρια

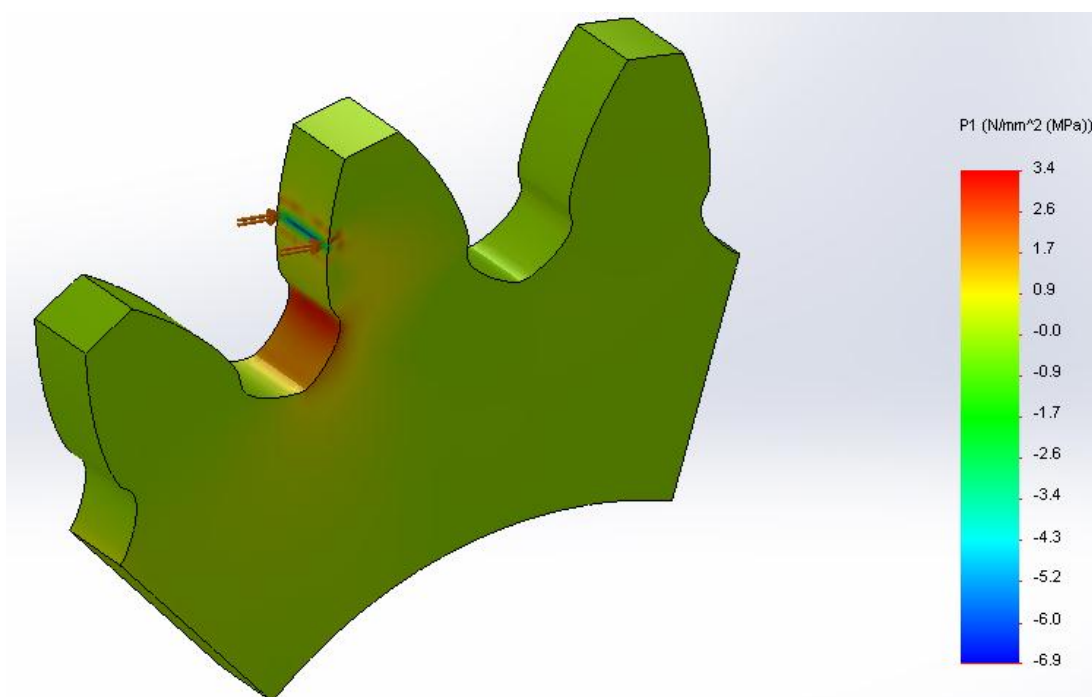
τάση αποτελεί τη μέγιστη εφελκυστική τάση στον κύκλο ποδός της εργαζομένης κατατομής του οδόντος.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν συγκεντρώθηκαν στον ακόλουθο πίνακα ο οποίος περιέχει τη ζητούμενη μέγιστη πρώτη κύρια τάση συναρτήσει των παραμέτρων  $p_1$ ,  $p_2$ .

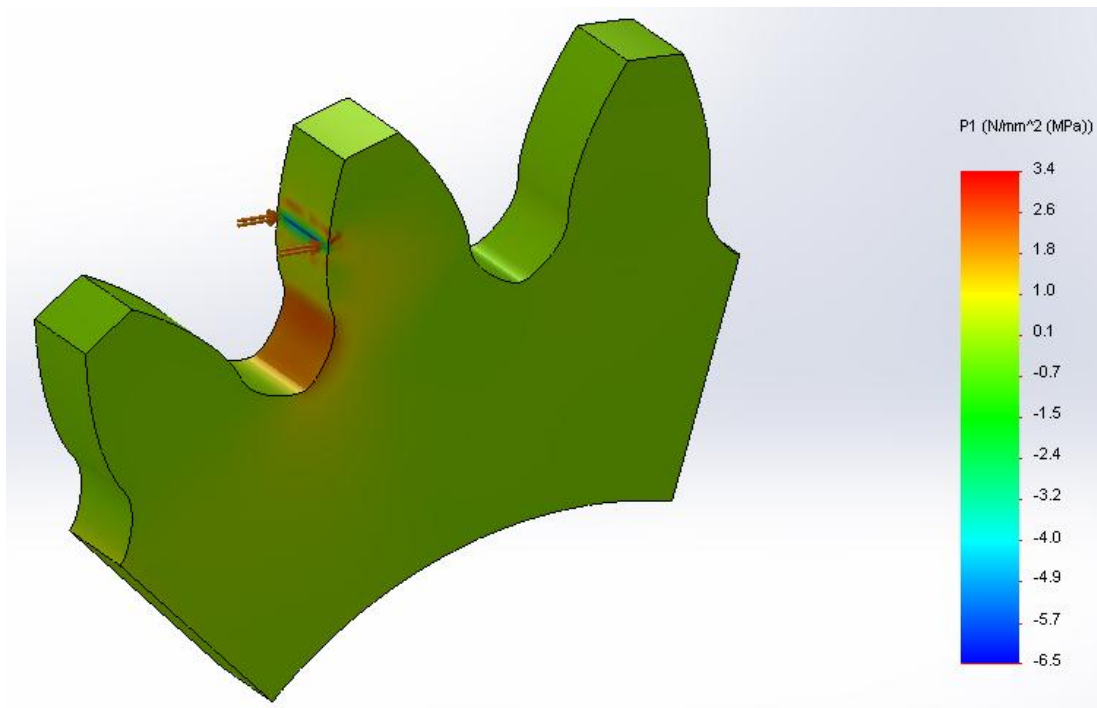
$p_2 \backslash p_1$	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
0.45	2.3610	2.3948	2.5699	2.6952	2.8712	2.9983	3.2205
0.35	2.3747	2.2970	2.4000	2.5971	2.7353	2.9712	3.0964
0.25	2.3948	2.2862	2.2825	2.4855	2.6946	2.8348	3.0357
0.15	2.4150	2.3261	2.2418	2.4114	2.6074	2.7881	2.9752
0.05	2.3964	2.3356	2.2726	2.4063	2.5739	2.7468	2.9562
-0.05	2.4388	2.3342	2.3454	2.4554	2.6233	2.8075	2.9526
-0.15	2.4760	2.4121	2.4435	2.5822	2.7020	2.8700	2.9711

Πίνακας 5-3: Μέγιστη πρώτη κύρια τάση (MPa) στην επικίνδυνη διατομή ποδός του οδόντος του εκάστοτε μοντέλου

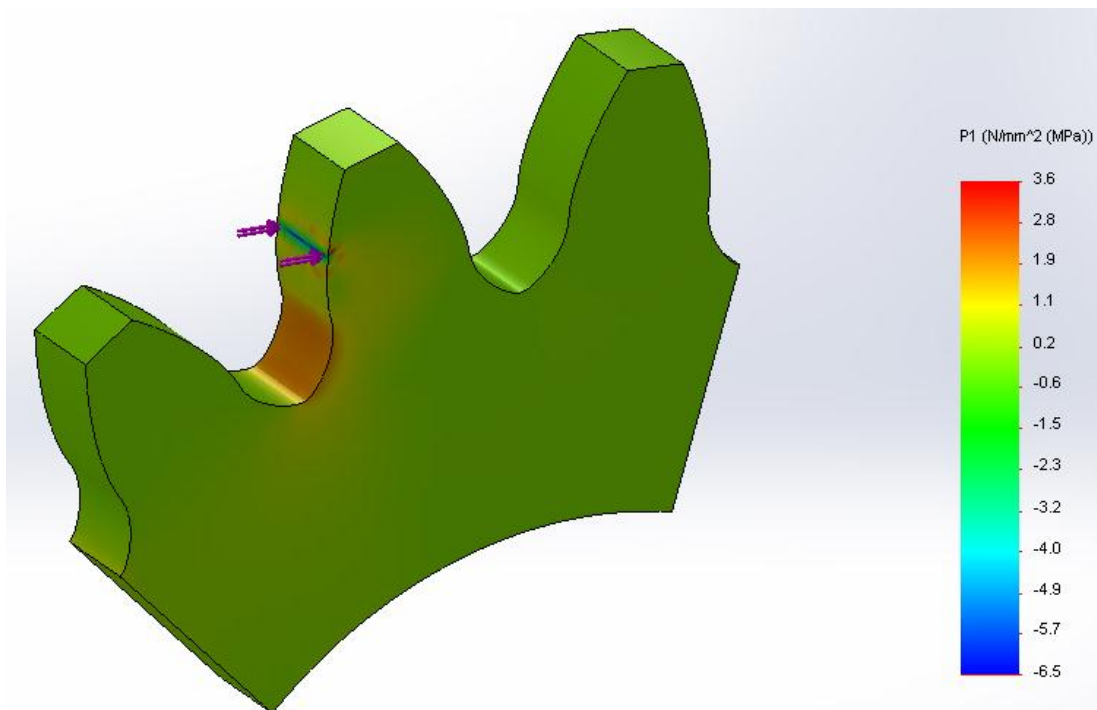
Ακολούθως, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης κάποιων μοντέλων του ανωτέρω πίνακα.



Παράμετροι:  $p_1 = 0.40$ ,  $p_2 = 0.45$  **maximum first principal stress: 3.2205 MPa**



Παράμετροι:  $p_1 = 0.25$ ,  $p_2 = 0.25$  maximum first principal stress: 2.4855 MPa



Παράμετροι:  $p_1 = 0.20$ ,  $p_2 = 0.15$  maximum first principal stress: 2.2418 MPa

Να σημειωθεί ότι στο 'ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ' παρουσιάζεται η μορφή ορισμένων μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν στην ανάλυση.

## 5.5 Διαδικασία βελτιστοποίησης

Από την παρατήρηση και μόνο του Πίνακα 5-3, είναι πλέον εφικτό να διακρίνει κάποιος την περιοχή των παραμέτρων  $p_1$ ,  $p_2$  που εμφανίζεται η ελάχιστη (σε σχέση με τα υπόλοιπα μοντέλα) μέγιστη πρώτη κύρια τάση. Το μοντέλο στο οποίο θα εμφανίζεται το βέλτιστο αποτέλεσμα προκύπτει για ένα συνδυασμό των παραμέτρων  $p_1$  και  $p_2$  στην περιοχή των τιμών 0.20 και 0.15 αντίστοιχα. Ωστόσο, έπρεπε να προσδιοριστεί με ακρίβεια ο συνδυασμός των παραμέτρων για τον οποίο προκύπτει η βέλτιστη κατατομή οδόντος. Για να επιτευχθεί αυτό, χρησιμοποιήθηκε ένας αλγόριθμος βελτιστοποίησης ο οποίος έχει αναπτυχθεί στο εργαστήριο Στοιχείων Μηχανών [11]. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος περιγράφεται ακολούθως.

### Περιγραφή του αλγόριθμου βελτιστοποίησης

Εφόσον η τιμή της εξεταζόμενης τάσης εξαρτάται από την τιμή των δύο προαναφερθεισών παραμέτρων, μπορεί κανείς να υποθέσει ότι υπάρχει μία συνάρτηση δύο μεταβλητών, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία που αναφέρονται στον Πίνακα 5-3. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να προβλέψει την τιμή της μέγιστης πρώτης κύριας τάσης για οποιοδήποτε συνδυασμό των παραμέτρων  $p_1$ ,  $p_2$ .

Επομένως, αν προσδιοριστεί αυτή η συνάρτηση, είναι εφικτό να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή της μέσα στο εύρος των δύο μεταβλητών. Η προκύπτουσα ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αντιστοιχεί σε ένα μοντέλο οδοντωτού τροχού που εμφανίζει μέγιστη πρώτη κύρια τάση, στην επικίνδυνη διατομή ποδός του, με την ελάχιστη δυνατή απόκλιση από τη βέλτιστη.

Για την εύρεση της προαναφερθείσας συνάρτησης, χρησιμοποιείται μία αριθμητική μέθοδος παρεμβολής με μία επιφάνεια Bézier. Οι επιφάνειες (όπως και οι καμπύλες) Bézier χρησιμοποιούνται για την αριθμητική προσέγγιση σημείων (ή γεωμετρικών μορφών) και δεν έχουν τη δυνατότητα να κάνουν παρεμβολή. Για το λόγο αυτό, δημιουργήθηκε ειδικός αλγόριθμος (βασισμένος στη θεωρία που αφορά τις προαναφερθείσες επιφάνειες) που κάνει παρεμβολή. Ο επαναληπτικός

αυτός αλγόριθμος δημιουργεί ένα σύνολο ψευδοσημείων ελέγχου κατά τέτοιο τρόπο ώστε η προκύπτουσα από αυτά επιφάνεια να διέρχεται από τα ζητούμενα προς παρεμβολή σημεία. Στην πραγματικότητα, ο αλγόριθμος επαναλαμβάνεται έως ότου, η απόκλιση των σημείων της προκύπτουσας επιφάνειας από τα αντίστοιχα ζητούμενα σημεία προσέγγισης, γίνει μικρότερη από ένα όριο σύγκλισης που θέτει ο χρήστης. Να σημειωθεί ότι στην παρούσα ανάλυση το όριο που ελήφθη είναι ίσο με 0.000001 MPa.

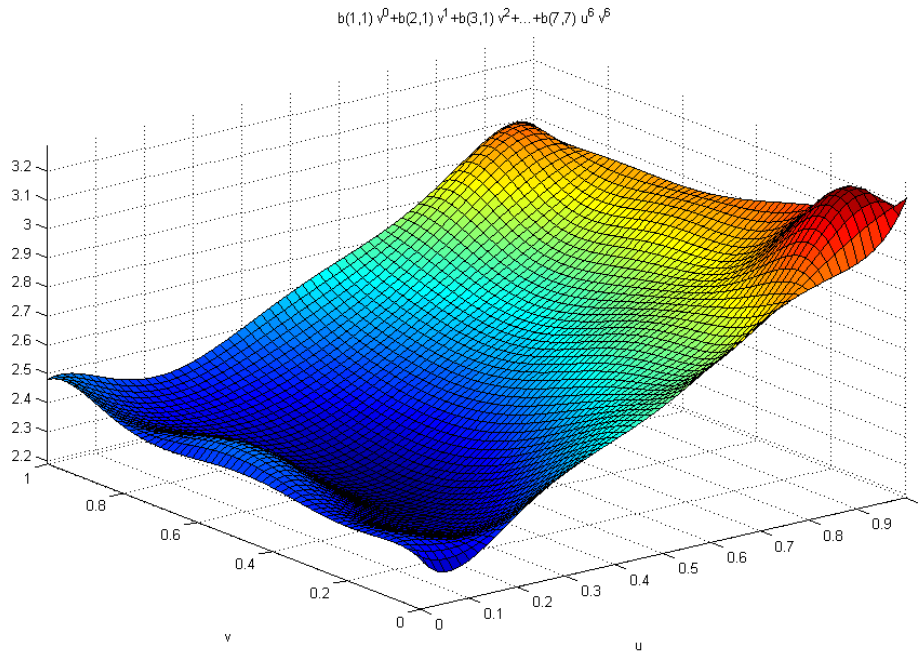
### Παρεμβολή των αποτελεσμάτων της ανάλυσης

Με βάση τον προαναφερθέντα αλγόριθμο, έγινε παρεμβολή των σημείων του Πίνακα 5-3 με σκοπό να βρεθεί η μαθηματική έκφραση που περιγράφει την τιμή της μέγιστης πρώτης κύριας τάσης συναρτήσει των παραμέτρων  $p_1$ ,  $p_2$ . (ο πίνακας επαναλαμβάνεται για λόγους πληρότητας του κειμένου).

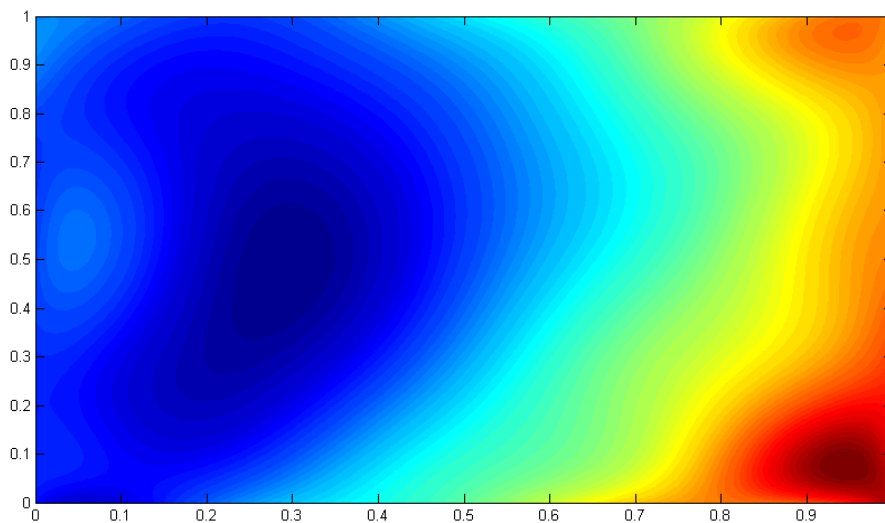
$p_1 \backslash p_2$	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
0.45	2.3610	2.3948	2.5699	2.6952	2.8712	2.9983	3.2205
0.35	2.3747	2.2970	2.4000	2.5971	2.7353	2.9712	3.0964
0.25	2.3948	2.2862	2.2825	2.4855	2.6946	2.8348	3.0357
0.15	2.4150	2.3261	2.2418	2.4114	2.6074	2.7881	2.9752
0.05	2.3964	2.3356	2.2726	2.4063	2.5739	2.7468	2.9562
-0.05	2.4388	2.3342	2.3454	2.4554	2.6233	2.8075	2.9526
-0.15	2.4760	2.4121	2.4435	2.5822	2.7020	2.8700	2.9711

Πίνακας 5-4: Μέγιστη πρώτη κύρια τάση (MPa) στην επικίνδυνη διατομή ποδός του οδόντος του εκάστοτε μοντέλου

Η γραφική παράσταση της εξίσωσης που προέκυψε (η οποία διέρχεται από όλα τα σημεία του ανωτέρω πίνακα με ακρίβεια πέμπτου δεκαδικού ψηφίου) φαίνεται στο Σχήμα 5-6 ενώ στο Σχήμα 5-7 παρουσιάζονται οι αντίστοιχες ισοϋψείς καμπύλες.



Σχήμα 5-6: Επιφάνεια παρεμβολής των σημείων του Πίνακα 5-4



Σχήμα 5-7: Ισοϋψείς καμπύλες που αντιστοιχούν στην επιφάνεια του Σχήματος 5-6

Παρατηρώντας τα ανωτέρα σχήματα μπορεί κάποιος να εντοπίσει την περιοχή που εμφανίζεται το ζητούμενο βέλτιστο σημείο.

Η εξίσωση της ανωτέρω επιφάνειας είναι έκτου βαθμού ως προς  $u$  και ως προς  $v$ . Είναι τη μορφής:



$$z(u, v) = \sum_{i=1}^7 \left( \sum_{j=1}^7 B_{i,j} v^{j-1} \right) u^{i-1}$$

Η ανωτέρω μαθηματική έκφραση, αν και διέρχεται από όλα τα σημεία με καλή ακρίβεια, εμφανίζει σχετικά αυξημένες καμπυλότητες σε κάποια τμήματα, οι οποίες οφείλονται στη φύση των πολυωνυμικών συναρτήσεων και στο μεγάλο βαθμό της συνάρτησης. Έτσι, είναι πιθανό να μην προσεγγίζεται με την απαιτούμενη ακρίβεια ο ζητούμενος βέλτιστος συνδυασμός των παραμέτρων της ανάλυσης.

Προκειμένου να αυξηθεί η ακρίβεια προσδιορισμού του βέλτιστου συνδυασμού, απαιτείται είτε η παρεμβολή λιγότερων σημείων (έτσι ώστε να μειωθεί ο βαθμός της πολυωνυμικής συνάρτησης και να δημιουργηθεί μια πιο ομαλή επιφάνεια), είτε να ακολουθηθεί κάποια διαδικασία εξομάλυνσης (smoothing). Ωστόσο, όπως προαναφέρθηκε, μπορούμε να διακρίνουμε στον Πίνακα 5-4 μία περιοχή όπου εμφανίζονται τιμές της τάσης κοντά στη βέλτιστη. Είναι δυνατόν, επομένως, να γίνει παρεμβολή μόνο εκείνων των σημείων που βρίσκονται στην ευρύτερη περιοχή του βέλτιστου σημείου και να αμεληθούν τα υπόλοιπα σημεία (όπου εμφανίζονται υψηλότερες τιμές της τάσης) χωρίς να δημιουργούνται προβλήματα στη διαδικασία βελτιστοποίησης.

Με βάση τα ανωτέρω, πραγματοποιήθηκε παρεμβολή σημείων που βρίσκονται στην ευρύτερη περιοχή του βέλτιστου συνδυασμού των εξεταζόμενων παραμέτρων. Τα σημεία αυτά φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

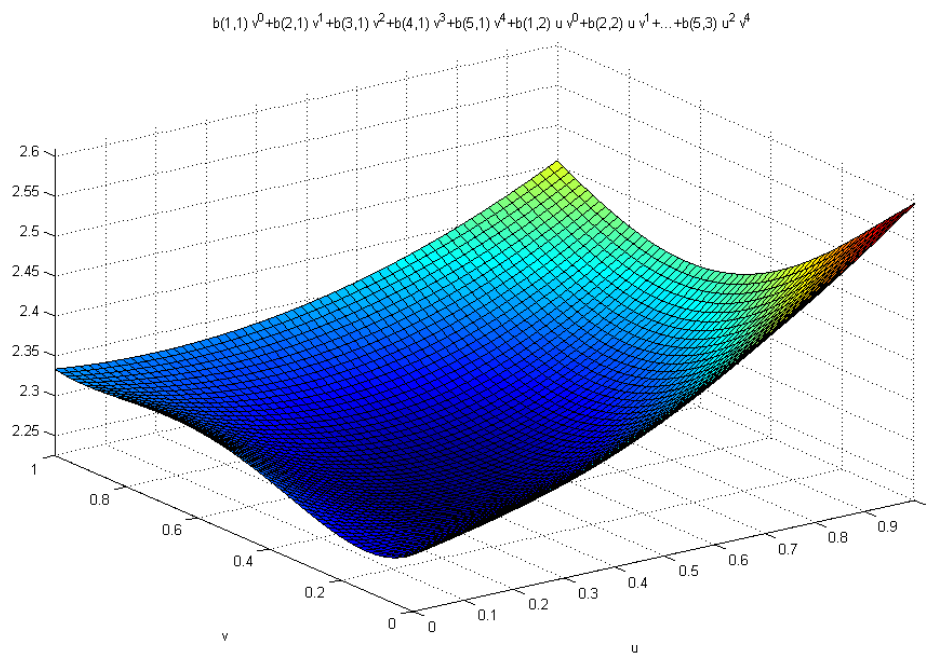
$p_1 \backslash p_2$	0.15	0.20	0.25
0.35	2.2970	2.4000	2.5971
0.25	2.2862	2.2825	2.4855
0.15	2.3261	2.2418	2.4114
0.05	2.3356	2.2726	2.4063
-0.05	2.3342	2.3454	2.4554

Πίνακας 5-5: Σημεία που βρίσκονται στην ευρύτερη περιοχή του βέλτιστου συνδυασμού των παραμέτρων  $p_1, p_2$

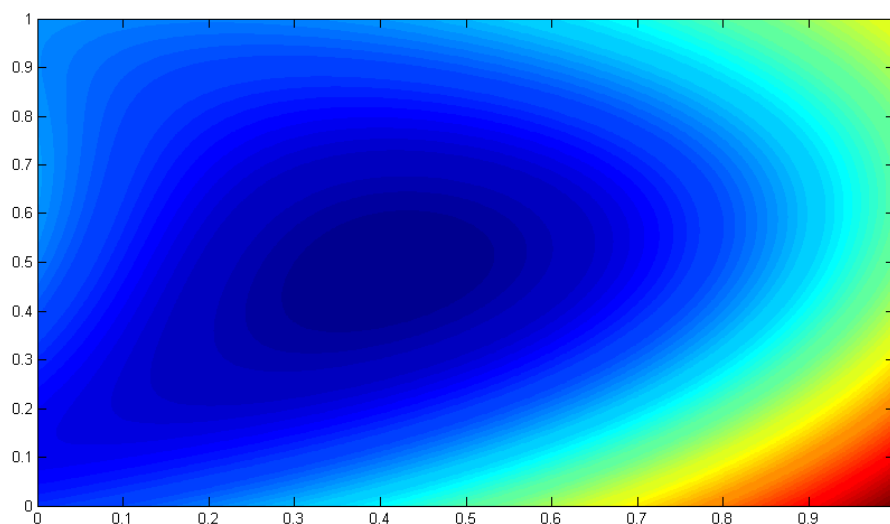
Έτσι προέκυψε η επιφάνεια του Σχήματος 5-8 με σχέση της μορφής:

$$z(u, v) = \sum_{i=1}^5 \left( \sum_{j=1}^3 B_{i,j} v^{j-1} \right) u^{i-1}$$

ενώ οι αντίστοιχες ισοϋψείς καμπύλες παρουσιάζονται στο Σχήμα 5-9.



Σχήμα 5-8: Επιφάνεια παρεμβολής των σημείων του Πίνακα 5-5



Σχήμα 5-9: Ισοϋψείς καμπύλες που αντιστοιχούν στην επιφάνεια του Σχήματος 5-8

Η συνάρτηση που προέκυψε είναι μικρότερου βαθμού και αρκετά ομαλότερη, όπως αναμενόταν. Έχοντας πλέον την προκύπτουσα μαθηματική σχέση, είναι δυνατόν να γίνει ελαχιστοποίησή της με κάποιο αλγόριθμο ελαχιστοποίησης και να βρεθεί ο συνδυασμός των παραμέτρων του προβλήματος που οδηγεί στη βέλτιστη γεωμετρία οδόντος.

Πλέον, το φυσικό πρόβλημα βελτιστοποίησης της κατατομής του οδόντος, όσον αφορά στην επικίνδυνη διατομή του ποδός του, έχει μετατραπεί σε ένα μαθηματικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης μίας συνάρτησης.

Η προκύπτουσα συνάρτηση είναι μία πολυωνυμική συνάρτηση της οποίας η ελάχιστη τιμή είναι εύκολο να βρεθεί χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο ελαχιστοποίησης. Η συνάρτηση αυτή είναι αρκετά ομαλή και διευκολύνεται η σύγκλιση του αλγορίθμου, καθώς μειώνεται η πιθανότητα να εγκλωβιστεί ο αλγόριθμος σε κάποιο τοπικό ελάχιστο.

Για την ελαχιστοποίηση επιλέχθηκε η συνάρτηση `fmincon` του προγραμματιστικού περιβάλλοντος Matlab. Η `fmincon` πραγματοποιεί ελαχιστοποίηση συνάρτησης δύο μεταβλητών υπό περιορισμούς.

### **Αποτέλεσμα βελτιστοποίησης**

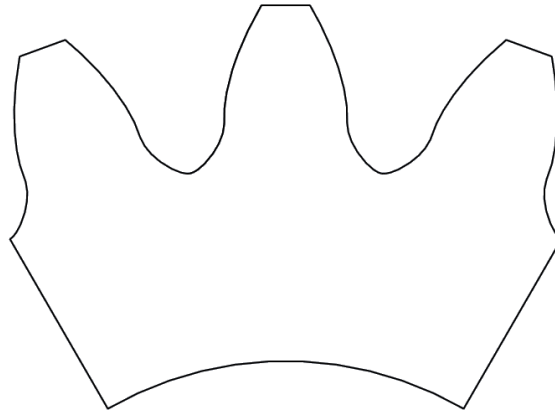
Με χρήση της συνάρτησης `fmincon` προέκυψαν οι ακόλουθες τιμές των παραμέτρων  $p_1$  και  $p_2$  που ελαχιστοποιούν τη ζητούμενη εξίσωση:

- $p_1 = 0.1911 \text{ mm}$
- $p_2 = 0.1432 \text{ mm}$

Οι παράμετροι αυτές δημιουργούν τη βέλτιστη κατατομή οδόντος. Η μέγιστη πρώτη κύρια τάση που εμφανίζεται στην επικίνδυνη διατομή ποδός του είναι:

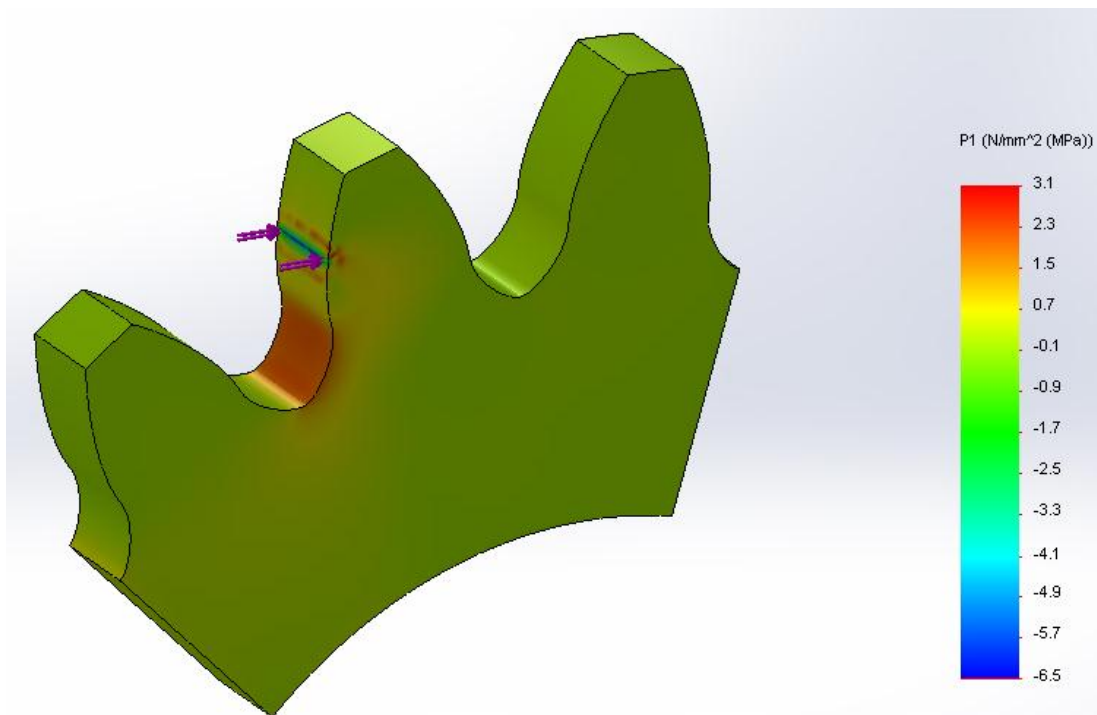
- $\sigma_1 = 2.2380 \text{ MPa}$

Η μορφή των συγκεκριμένων οδόντων παρουσιάζεται στο Σχήμα 5-10.



Σχήμα 5-10: Μορφή οδόντων με τη βέλτιστη κατατομή

Στη συνέχεια, ο ανωτέρω συνδυασμός των παραμέτρων  $p_1$ ,  $p_2$  χρησιμοποιήθηκε για τη δημιουργία (στο λογισμικό Solidworks) του αντίστοιχου τρισδιάστατου μοντέλου. Στο συγκεκριμένο μοντέλο πραγματοποιήθηκε ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων (όπως αυτή περιγράφεται στις προηγούμενες ενότητες του παρόντος κεφαλαίου). Το αποτέλεσμα της συγκεκριμένης ανάλυσης είναι η εμφάνιση μέγιστης πρώτης κύριας τάσης, στην επικίνδυνη διατομή ποδός του βέλτιστου οδόντα, ίσης με  $\sigma_1 = 2.2320 \text{ MPa}$  (βλέπε ακόλουθη εικόνα).



Παράμετροι:  $p_1 = 0.1911$ ,  $p_2 = 0.1432$  **maximum first principal stress: 2.2320 MPa**

Το ανωτέρω αποτέλεσμα διαφέρει από το αποτέλεσμα του αλγόριθμου βελτιστοποίησης κατά 0.006 MPa. Οπότε το αποτέλεσμα του αλγόριθμου βελτιστοποίησης κρίνεται αρκετά ικανοποιητικό.

## 5.6 Έλεγχος ομαλής συνεργασίας οδοντωτών τροχών

Σημαντικές προϋποθέσεις για να έχουμε ομαλή συνεργασία μεταξύ του ζεύγους των οδοντωτών τροχών που αποτελούν τη βαθμίδα, είναι η εξασφάλιση βαθμού επικάλυψης ( $\epsilon$ ) με τιμή μεγαλύτερη της μονάδας και μη ύπαρξη υποκοπών λειτουργίας.

### Βαθμός επικάλυψης

Η εξασφάλιση βαθμού επικάλυψης ( $\epsilon$ ) με τιμή μεγαλύτερη της μονάδας έχει επιτευχθεί, καθώς ο βαθμός επικάλυψης της υπό μελέτη βαθμίδας είναι:

$$\epsilon = 1.6422 \text{ (όπως προκύπτει από τον Πίνακα 5-1)}$$

### Υποκοπές λειτουργίας (Interference)

Για την εξακρίβωση της εμφάνισης (ή μη) υποκοπών λειτουργίας στον κινητήριο τροχό της βαθμίδας, χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό Solidworks. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε είναι η εξής:

- Εισαγωγή, στο λογισμικό Solidworks, του προς μελέτη μοντέλου και του συνεργαζόμενου τροχού.
- Τοποθέτησή των τροχών έτσι ώστε η απόσταση των κέντρων τους να είναι ίση με  $(O_1O_2) = r_{o1} + r_{o2}$ .
- Περιστροφή του κινητήριου τροχού ως προς τον κινούμενο. Σκοπός είναι να προσδιοριστεί αν η κεφαλή του οδόντος του κινούμενου τροχού, εισέρχεται στον πόδα του οδόντος του κινητήριου τροχού με τον οποίο συνεργάζεται. Να σημειωθεί ότι όσον αφορά στον κινούμενο τροχό, το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην ακμή του οδόντος του (που σχηματίζεται από την επιφάνεια της κεφαλής του και από την κατατομή της εργαζόμενης πλευράς του).

Στο ακόλουθο σχήμα παρουσιάζεται μία περίπτωση όπου η κεφαλή του οδόντος του κινούμενου τροχού (τροχός με μπλέ χρώμα), εισέρχεται στον πόδα του οδόντος του κινητήριου τροχού με τον οποίο συνεργάζεται (τροχός με γκρι χρώμα).



Σχήμα 5-11: Εμφάνιση υποκοπών λειτουργίας

Η μελέτη της εμφάνισης (ή μη) υποκοπών εστιάστηκε, αρχικά, σε μια ευρύτερη περιοχή του βέλτιστου συνδυασμού των παραμέτρων  $p_1$  και  $p_2$  (όπως αυτός προσδιορίστηκε προηγουμένως). Αυτό έγινε προκειμένου να απομονωθεί μια σχετικά μικρή περιοχή ενδιαφέροντος του πίνακα των αποτελεσμάτων της ανάλυσης (Πίνακας 5-4). Η περιοχή που επιλέχθηκε να μελετηθεί είναι η περιοχή που ορίζεται από τις τιμές των παραμέτρων  $p_1 \in [0.15, 0.25]$  και  $p_2 \in [0.05, 0.25]$ .

Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα (Πίνακας 5-6) όπου με πράσινο χρώμα παρουσιάζεται ο εκάστοτε συνδυασμός των παραμέτρων για τον οποίο δεν υφίστανται υποκοπές λειτουργίας ενώ με κόκκινο χρώμα παρουσιάζεται ο εκάστοτε συνδυασμός των παραμέτρων για τον οποίο υφίστανται υποκοπές λειτουργίας.

$p_1 \backslash p_2$	0.15	0.20	0.25
0.25	2.2862	2.2825	2.4855
0.15	2.3261	2.2418	2.4114
0.05	2.3356	2.2726	2.4063

Πίνακας 5-6: Καθορισμός περιοχής ύπαρξης υποκοπών λειτουργίας

Παρατηρώντας τον ανωτέρω πίνακα, μπορεί κάποιος να διακρίνει ότι στην ευρύτερη περιοχή εμφάνισης του βέλτιστου συνδυασμού των παραμέτρων της ανάλυσης, υπάρχει μία υποπεριοχή όπου εμφανίζονται υποκοπές λειτουργίας και μία υποπεριοχή όπου δεν εμφανίζονται. Ωστόσο, η περιοχή μη ύπαρξης υποκοπών λειτουργίας είναι πλησίον του βέλτιστου συνδυασμού των παραμέτρων του προβλήματος. Για το λόγο αυτό, επόμενο βήμα είναι ο έλεγχος της ύπαρξης υποκοπών λειτουργίας για τον ίδιο το βέλτιστο συνδυασμό των παραμέτρων  $p_1$  και  $p_2$ . Δηλαδή, για:

- $p_1 = 0.1911$  mm
- $p_2 = 0.1432$  mm

Ο έλεγχος είχε ως αποτέλεσμα ότι για τιμές των παραμέτρων που αντιστοιχούν στο βέλτιστο μοντέλο δεν υφίστανται υποκοπές λειτουργίας.

Επομένως, η συνεργασία του κινητήριου τροχού (με τη βέλτιστη μορφή κατατομής) με τον κινούμενο οδοντωτό τροχό είναι ομαλή.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

# Σχολιασμός αποτελεσμάτων ανάλυσης

### 6.1 Εισαγωγή

Τελευταίο βήμα της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η πραγματοποίηση σύγκρισης μεταξύ του βέλτιστου αποτελέσματος που προέκυψε στο Κεφάλαιο 5 και αντίστοιχων αποτελεσμάτων που προκύπτουν από εργασίες που εξετάζουν το ζήτημα της βελτιστοποίησης οδοντωτών τροχών (όσον αφορά στο σχεδιασμό του ποδός των οδόντων τους).

Η εργασία της οποίας τα αποτελέσματα θα χρησιμοποιηθούν για την προαναφερθείσα σύγκριση αναφέρεται στη βιβλιογραφική αναφορά [10]. Αποτελεί μία από τις πιο πρόσφατες προσπάθειες βελτιστοποίησης οδοντωτών τροχών, όσον αφορά στην επικίνδυνη διατομή ποδός των οδόντων τους, και επιδιώκεται βελτιστοποίησή τους με χρήση καμπυλών cubic Splines.

Οστόσο, για να πραγματοποιηθεί σύγκριση επί ίσοις όροις, είναι απαραίτητο:

- τα αποτελέσματα που συγκρίνονται να είναι αδιαστατοποιημένα
- τα προς σύγκριση μεγέθη να είναι ίδιου είδους
- να συγκριθούν μοντέλα τα οποία θα έχουν, κατά το δυνατόν, όμοια χαρακτηριστικά

### 6.2 Προϋποθέσεις σύγκρισης

#### 6.2.1 Αδιαστατοποίηση αποτελεσμάτων

Πρέπει να τονιστεί ότι, στην παρούσα διπλωματική εργασία, σκόπιμα επιλέχθηκαν τα ακόλουθα στοιχεία:



- module του οδοντωτού τροχού  $m = 1 \text{ mm}$
- τιμή του πλάτους του  $b = 1 \text{ mm}$
- μέτρο του επιβαλλόμενου σε αυτόν φορτίου  $F = 1 \text{ N}$

προκειμένου να προκύπτουν εύκολα αδιαστοποιημένα αποτελέσματα από την ανάλυση.

Αυτό φαίνεται και από τη σχέση που συνδέει την τάση  $\sigma$  (πρώτη κύρια τάση εν προκειμένω) με την αντίστοιχη αδιάστατη τάση  $\sigma_u$  [8]:

$$\sigma = \sigma_u \frac{F}{mb} \quad (6.1)$$

όπου:

$\sigma$ : πραγματική τάση (MPa)

$\sigma_u$ : αδιάστατη τάση

$F$ : επιβαλλόμενο φορτίο (N)

$m$ : module (mm)

$b$ : πλάτος τροχού (mm)

με βάση την οποία, γίνεται αντιληπτό ότι τα αποτελέσματα της ανάλυσης που πραγματοποιήθηκε είναι αδιαστατοποιημένα.

Επιπροσθέτως, χρησιμοποιώντας την ανωτέρω σχέση, και εφόσον έχει υπολογιστεί η αδιάστατη τιμή της ζητούμενης τάσης για έναν οδοντωτό τροχό, είναι εφικτό να προσδιοριστεί η πραγματική τιμή της αντίστοιχης τάσης για οποιαδήποτε τιμή των τριών μεταβλητών μεγεθών ( $F, m, b$ ).

### 6.2.2 Συγκρινόμενη τιμή τάσης

Κατά τη μελέτη του εκάστοτε μοντέλου, δεν υφίσταται καταπόνησή του στην τρίτη διάσταση. Έτσι, στο αφόρτιστο όριο ισχύει:

$$\sigma_1 = \sigma_v \quad (6.2)$$

δηλαδή η προκύπτουσα τιμή της πρώτης κύριας τάσης ισούται με την ισοδύναμη τάση von Mises στο ίδιο σημείο.

Επομένως, μπορούν να συγκριθούν τα αποτελέσματα της παρούσας διπλωματικής εργασίας με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της εργασίας της προαναφερθείσας βιβλιογραφικής αναφοράς, στα οποία χρησιμοποιείται η μέγιστη ισοδύναμη τάση von Mises που εμφανίζεται στην επικίνδυνη διατομή ποδός του οδόντος του οδοντωτού τροχού.

### 6.2.3 Ομοιότητα συγκρινόμενων μοντέλων

Στην εργασία της προαναφερθείσας βιβλιογραφικής αναφοράς μελετάται μία βαθμίδα που αποτελείται από οδοντωτούς τροχούς με χαρακτηριστικά που φαίνονται στον Πίνακα 6-1. Να σημειωθεί ότι λοιπά χαρακτηριστικά όπως:

- module (m)
- πλάτος τροχού (b)
- εφαρμοζόμενο φορτίο (F) στον μελετώμενο οδόντα (κατά τη μοντελοποίηση)

δεν κρίθηκε απαραίτητο να αναφερθούν. Αυτό έγινε καθώς τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης εργασίας είναι αδιαστατοποιημένα. Αυτό σημαίνει ότι δεν θα χρειαστεί εφαρμογή του τύπου (6.1) για αδιαστατοποίηση των αποτελεσμάτων.

Z <sub>1</sub> (αριθμός οδόντων κινητήριου τροχού)	20
Z <sub>2</sub> (αριθμός οδόντων κινούμενου τροχού)	96
E (μέτρο ελαστικότητας)	210000 MPa
$\nu$ (λόγος Poisson)	0.30
$\rho$ (πυκνότητα)	7870 kg/m <sup>3</sup>

Πίνακας 6-1: Χαρακτηριστικά οδοντωτών τροχών βιβλιογραφικής αναφοράς [10]

Είναι, επομένως, απαραίτητη η δημιουργία του μοντέλου ενός κινητήριου τροχού (βάσει της μεθοδολογίας που περιγράφεται στην παρούσα διπλωματική εργασία) που θα συνάδει με τα χαρακτηριστικά του Πίνακα 6-1.

Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιήθηκε ο βέλτιστος συνδυασμός των παραμέτρων  $p_1$ ,  $p_2$  (όπως προέκυψαν στο Κεφάλαιο 5) προκειμένου να δημιουργηθεί το επιθυμητό μοντέλο. Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε στατική ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων για την επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση (plane strain analysis) του οδόντος του.

Η μέγιστη πρώτη κύρια τάση που εμφανίζεται στην επικίνδυνη διατομή του οδόντος του είναι:

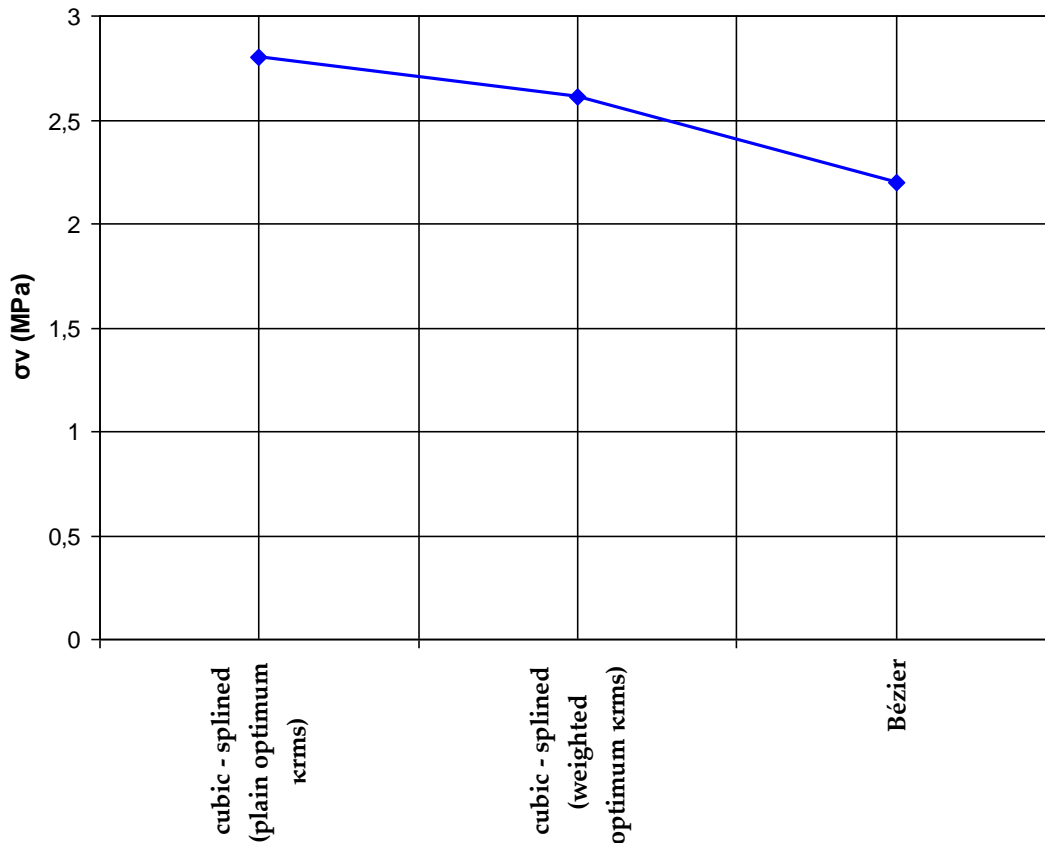
$$\sigma_1 = \sigma_v = 2.2010 \text{ MPa}$$

### 6.3 Σύγκριση των αποτελεσμάτων

Το ανωτέρω αποτέλεσμα, καθώς και τα αντίστοιχα αποτελέσματα της προαναφερθείσας βιβλιογραφικής αναφοράς, παρουσιάζονται στον Πίνακα 6-2 και στο Σχήμα 6-1. Στον Πίνακα 6-2 συγκεκριμένα, παρουσιάζεται το ποσοστό μείωσης (reduction rate) της τιμής της τάσης που αντιστοιχεί στον εκάστοτε χρησιμοποιούμενο τύπο καμπύλης, σε σχέση με την τιμή της τάσης που αντιστοιχεί στον αμέσως προηγούμενο χρησιμοποιούμενο τύπο καμπύλης.

χρησιμοποιούμενος τύπος καμπύλης	$\sigma_v$ (MPa)	reduction rate
cubic-splined (plain optimum $\kappa_{rms}$ )	2.8020	0
cubic-splined (weighted optimum $\kappa_{rms}$ )	2.6084	6.91%
Bézier	2.2010	15.62%

Πίνακας 6-2: Σύγκριση αποτελεσμάτων



Σχήμα 6-1: Διάγραμμα σύγκρισης αποτελεσμάτων

Συμπερασματικά μπορεί να αναφερθεί πως, όταν γίνεται χρήση της καμπύλης Bézier (με βάση τη μεθοδολογία της παρούσας εργασίας) για τη βελτιστοποίηση του σχεδιασμού του ποδός του οδόντος ενός οδοντωτού τροχού, υπάρχει σημαντική βελτίωση όσον αφορά στην αντοχή του οδόντος σε κάμψη. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 6-2, υπάρχει μείωση της μέγιστης εμφανιζόμενης ισοδύναμης τάσης von Mises κατά 15.62% σε σχέση με τη χρησιμοποιούμενη βέλτιστη μορφή της συγκρινόμενης βιβλιογραφικής αναφοράς.

# Βιβλιογραφία

- [1] Κωστόπουλος Θ. Ν., Οδοντώσεις και μειωτήρες στροφών, εκδόσεις Συμμεών, Αθήνα 1991
- [2] Γραϊκούσης Ρ., Στοιχεία Μηχανών ΙΙΙ, Σ: Οδοντοκινήσεις, εκδόσεις Γιαχούδη
- [3] Στεργίου Ι. Κ., Στοιχεία Μηχανών ΙΙ, Αθήνα 1979
- [4] Παπαμητούκας Β., Μηχανολογικό σχέδιο, εκδόσεις Παπασωτηρίου Α., Θεσσαλονίκη 1982
- [5] Τσαμασφύρος Γ.Τ., Μηχανική Παραμορφώσιμων Σωμάτων Ι, εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1990
- [6] Γιαννάκογλου Κ.Χ., Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς, Αθήνα 2003
- [7] Παπαδόπουλος Ε., Κυριακόπουλος Κ., Σημειώσεις Ρομποτικής
- [8] Spitas V., Spitas C., Numerical and Experimental Comparative study of strength- optimised AGMA and FZG spur gears, Acta Mechanica, 193, 113-126, 2007
- [9] Spitas V., Costopoulos T., Spitas C., Increasing the strength of standard involute gear teeth with novel circular root fillet design, American Journal of Applied Sciences, 2, 1058-1064, 2005
- [10] Zou T., Angeles J., Shaker M., Morozov A., Optimization of tooth root profile of spur gears for maximum load-carrying capacity, Proceedings of the ASME 2014 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, Paper No. 34568, Buffalo, New York, USA, August 17-20, 2014
- [11] Βακουφτοής Χ., Σχεδιασμός βέλτιστου τερματικού συνδετήρα πολυμερών σχοινιών υψηλής αντοχής για ομοιόμορφη κατανομή των διατμητικών τάσεων, Διπλωματική εργασία, Εργαστήριο Στοιχείων Μηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα 2014

[12] Kitsos I., Kanellopoulos I., Vasileiou I., Sensitivity analysis of tip-thickness and slope on the tip strength of spur gear sets, Proceedings of the AIP Conference 1618, Paper No. 652, Athens, Greece, 2014

[13] Βασιλείου Ι., Μοντελοποίηση της μηχανικής συμπεριφοράς ινωδών ενισχύσεων σε πλαστική μήτρα και εφαρμογή στην περιοχική συνεχή ενίσχυση οδοντωτών τροχών, Διπλωματική εργασία, Εργαστήριο Στοιχείων Μηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα 2013

[14] Γιαννάκης Α., Παραμετρικός σχεδιασμός τροχιάς κοπτικών εργαλείων για την κατασκευή οδοντωτών τροχών ευθείας οδόντωσης σε κέντρα κατεργασιών CNC τεσσάρων αξόνων, Διπλωματική εργασία, Ε.Μ.Π., Αθήνα, Μάρτιος 2010

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α [1], [6], [7], [13], [14]

### 1. Κώδικας υπολογισμού των σημείων της τροποποιημένης κατατομής του οδόντος του κινητήριου τροχού (όπου χρησιμοποιείται η καμπύλη Bézier)

```
clc
clear all

%%ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΟΔΟΝΤΩΤΩΝ ΤΡΟΧΩΝ
z1=18;      %αριθμός οδόντων κινητήριου τροχού
z2=50;      %αριθμός οδόντων κινούμενου τροχού
m=1;        %module
a0_deg=20;  %γωνία εξειλιγμένης (σε μοίρες)
ck=1;       %συντελεστής ύψους κεφαλής
cf=1.25;    %συντελεστής ύψους ποδός
cs=0.5;     %συντελεστής πάχους οδόντος
x0=0;       %τεταμημένη του κέντρου του κινητήριου τροχού
y0=0;       %τεταγμένη του κέντρου του κινητήριου τροχού

%%ΡΥΘΜΙΣΗ ΠΛΗΘΟΥΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΘΕ ΚΑΜΠΥΛΗΣ-ΑΝΑΛΥΣΗ
bim_kef=0.005; %ρύθμιση πλήθους σημείων της κεφαλής του οδόντος
bim_eks=0.02;  %ρύθμιση πλήθους σημείων της εξειλιγμένης καμπύλης
bim_bez=0.05;  %ρύθμιση πλήθους σημείων της καμπύλης Bézier

%%ΣΧΕΔΙΣΜΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΤΟΥ ΚΙΝΗΤΗΡΙΟΥ ΤΡΟΧΟΥ
a0_rad=a0_deg*pi/180; %γωνία εξειλιγμένης (σε ακτίνια)
hk=ck*m;              %ύψος κεφαλής οδόντος
hf=cf*m;              %ύψος ποδός οδόντος
r0=m*z1/2;           %ακτίνα αρχικού κύκλου
rg=r0*cos(a0_rad);   %ακτίνα βασικού κύκλου
rk=r0+hk;             %ακτίνα κύκλου κεφαλής
rf=r0-hf;             %ακτίνα κύκλου ποδός
t0=pi*m;             %βήμα οδοντώσεως στον αρχικό κύκλο
s0=cs*t0;            %πάχος οδόντος στον αρχικό κύκλο
l0=t0-s0;            %διάκενο στον αρχικό κύκλο

%%ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ
g=s0/(2*r0)+(tan(a0_rad)-a0_rad); %γωνία ανάμεσα στον άξονα συμμε-
%τρίας του οδόντος του τροχού και
%στην ευθεία που διέρχεται από το
%κέντρο του τροχού και από το
%σημείο έναρξης της εξειλιγμένης
%στο βασικό κύκλο
ak=acos(rg/rk); %γωνία ανάμεσα στις εξής ευθείες:
%%(1) ευθεία που διέρχεται από το
%κέντρο του τροχού και από το
%σημείο τομής εξειλιγμένης-κύκλου
%κεφαλής
```

```

fk=tan(ak)-ak;
fk_sun=fk+ak;

%%% (2) ευθεία που διέρχεται από το
%%κέντρο του τροχού και από το
%σημείο όπου η κυλιόμενη ευθεία
%εφάπτεται στο βασικό κύκλο όταν
%ταυτόχρονα διέρχεται από το
%προαναφερθέν σημείο τομής
%γωνία ανάμεσα στις εξής δύο
%ευθείες:
%%% (1) ευθεία που διέρχεται από το
%%κέντρο του τροχού και από το
%σημείο έναρξης της εξελιγμένης
%πάνω στο βασικό κύκλο
%%% (2) ευθεία που διέρχεται από το
%%κέντρο του τροχού και από το
%σημείο τομής εξελιγμένης-κύκλου
%κεφαλής
%γωνία ανάμεσα στις εξής δύο
%ευθείες:
%%% (1) ευθεία που διέρχεται από το
%%κέντρο του τροχού και από το
%σημείο έναρξης της εξελιγμένης
%στο βασικό κύκλο
%%% (2) ευθεία που διέρχεται από το
%%κέντρο του τροχού και από το
%σημείο όπου η κυλιόμενη ευθεία
%εφάπτεται στο βασικό κύκλο όταν
%διέρχεται ταυτόχρονα από το
%σημείο τομής εξελιγμένης-κύκλου
%κεφαλής

%%%ΚΛΗΣΗ ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

%Υπολογισμός: rA (που αντιστοιχεί στον κινητήριο τροχό), r02, rk2 (ο
%δείκτης 2 αναφέρεται στον κινούμενο τροχό)
[rA,r02,rk2] = rA_comput(m,z2,a0_rad,ck,rg,r0);

%Υπολογισμός βαθμού επικάλυψης και της θέσης του HPSTC του κινητήριου
%τροχού
[rHPSTC,e] = HPSTC_comput(m,r0,a0_rad,r02,t0,rk,rg);

%Υπολογισμός εξελιγμένης καμπύλης
[sun_sim_eks,pin_eks,wmega] = ...
ekseiligmeni_comput(g,fk_sun,rg,rA,bim_eks);

%Υπολογισμός κεφαλής οδόντος του κινητήριου τροχού
[sun_sim_kef,pin_kef_od] = kef_od_comput(bim_kef,g,fk,x0,y0,rk);

%%%ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ Bézier

%%ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

%Ορισμός της θέσης του σημείου (1) και της κλίσης της καμπύλης Bézier
%σε αυτό
x1=-rf*sin((s0+10)/(2*r0)-g);
y1=rf*cos((s0+10)/(2*r0)-g);
klisil=tan((s0+10)/(2*r0)-g);

```



```

%Ορισμός της θέσης του σημείου (5) και της κλίσης της καμπύλης Bézier
%σε αυτό
x5=pin_eks(sun_sim_eks,1);
y5=pin_eks(sun_sim_eks,2);
klisi5=cot(wmega);

%Ορισμός της θέσης του σημείου (2)
x2=x1;
y2=y1;
dist_x2=0;
dist_s2=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2);

while dist_s2 <= sqrt((x5-x1)^2+(y5-y1)^2)/5

    x2=x1+dist_x2;
    y2=y1+klisi5*dist_x2;
    dist_s2=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2);

    prec2=0.00001;

    dist_x2=dist_x2+prec2;
end

%Ορισμός της θέσης του σημείου (4)
x4=x5;
y4=y5;
dist_x4=0;
dist_s4=sqrt((x4-x5)^2+(y4-y5)^2);

while dist_s4 <= sqrt((x5-x1)^2+(y5-y1)^2)/5

    x4=x5-dist_x4;
    y4=y5-klisi5*dist_x4;
    dist_s4=sqrt((x4-x5)^2+(y4-y5)^2);

    prec4=0.00001;

    dist_x4=dist_x4+prec4;
end

```

```

%αρχικοποίηση τιμής
%αρχικοποίηση τιμής
%αρχικοποίηση τιμής
%απόσταση σημείου (2)
%από (1)
%ο βρόχος καθορίζει
%τη θέση του σημείου
%(2) και ορίζει την
%απόστασή του από το
%σημείο (1) να είναι
%ίση (με ακρίβεια που
%ορίζεται) με το 1/5
%της απόστασης των
%σημείων (1) και (5)
%τετμημένη του (2)
%τεταγμένη του (2)
%απόσταση σημείου (2)
%από (1)
%ορισμός ακρίβειας
%της απόστασης του
%σημείου (2) από το
%(1)

```

```

%αρχικοποίηση τιμής
%αρχικοποίηση τιμής
%αρχικοποίηση τιμής
%απόσταση σημείου (4)
%από (5)
%ο βρόχος καθορίζει
%τη θέση του σημείου
%(4) και ορίζει την
%απόστασή του από το
%σημείο (5) να είναι
%ίση (με ακρίβεια που
%ορίζεται) με το 1/5
%της απόστασης των
%σημείων (1) και (5)
%τετμημένη του (4)
%τεταγμένη του (4)
%απόσταση σημείου (4)
%από (5)
%ορισμός ακρίβειας
%της απόστασης του
%σημείου (4) από το
%(5)

```

```

%Ορισμός της θέσης του σημείου (3)
p1=0.20; %ορισμός παραμέτρου p1 (τετμημένη
%σημείου (3) ως προς το τοπικό
%σύστημα συντεταγμένων p1Op2)
p2=0.15; %ορισμός παραμέτρου p2 (τεταγμένη
%σημείου (3) ως προς το τοπικό
%σύστημα συντεταγμένων p1Op2)

thita_Oloc=atan((y5-y1)/(x5-x1)); %γωνία που σχηματίζει η ευθεία
%που διέρχεται από τα σημεία
%(1), (5) με τον οριζόντιο άξονα
xloc=x5-(x5-x1)/2; %απόσταση του κέντρου του τοπικού
%συστηματος συντεταγμένων p1Op2
%από το σημείο (5), κατά x
yloc=y5-(y5-y1)/2; %απόσταση του κέντρου του τοπικού
%συστηματος συντεταγμένων p1Op2
%από το σημείο (5), κατά y
zloc=0; %απόσταση του κέντρου του τοπικού
%συστηματος συντεταγμένων p1Op2
%από το σημείο (5), κατά z

bx=xloc; %απόσταση του κέντρου του τοπικού
%συστηματος συντεταγμένων p1Op2
%από το κέντρο του καθολικού
%συστηματος συντεταγμένων xO1y,
%κατά x
by=yloc; %απόσταση του κέντρου του τοπικού
%συστηματος συντεταγμένων p1Op2
%από το κέντρο του καθολικού
%συστηματος συντεταγμένων xO1y,
%κατά y
bz=zloc; %απόσταση του κέντρου του τοπικού
%συστηματος συντεταγμένων p1Op2
%από το κέντρο του καθολικού
%συστηματος συντεταγμένων xO1y,
%κατά z

%Περιγραφή των συντεταγμένων του σημείου (3) ως προς το καθολικό
%σύστημα συντεταγμένων xO1y

%Ομογενής μετασχηματισμός
pin_metasx=[cos(pi/2-thita_Oloc) sin(pi/2-thita_Oloc) 0 bx;
-sin(pi/2-thita_Oloc) cos(pi/2-thita_Oloc) 0 by;
0 0 1 bz;
0 0 0 1];

%Εφαρμογή ομογενούς μετασχηματισμού
K=pin_metasx*[p1;p2;0;1];

%Συντεταγμένες του σημείου (3) ως προς το καθολικό σύστημα συντε-
%ταγμένων xO1y
x3=K(1,1);
y3=K(2,1);

%%ΚΛΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ Bézier
[pin_bez] = Bezier_5points( x1,x2,x3,x4,x5,y1,y2,y3,y4,y5,bim_bez );

```

```

%%%ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΠΟΥ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝ ΤΗΝ ΚΑΤΑΤΟΜΗ ΓΙΑ ΝΑ ΠΡΟΚΥΨΕΙ
%ΟΔΟΝΤΑΣ ΣΕ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΘΕΣΗ
per_g=[cos(g)  sin(g);
      -sin(g)  cos(g)];
pin_eks=pin_eks*per_g;
pin_bez=pin_bez*per_g;

%%%ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΤΑΤΟΜΗΣ (3D)

%Τμήμα κεφαλής οδόντιος
for h=1:length(pin_kef_od)
    PINAKAS(h,1)=pin_kef_od(h,1);
    PINAKAS(h,2)=pin_kef_od(h,2);
    PINAKAS(h,3)=0;
end

%Τμήμα εξειλιγμένης καμπύλης
metr_eks=1;
for h=length(pin_kef_od)+1:length(pin_kef_od)+length(pin_eks)-1
    PINAKAS(h,1)=pin_eks(sun_sim_eks-metr_eks,1);
    PINAKAS(h,2)=pin_eks(sun_sim_eks-metr_eks,2);
    PINAKAS(h,3)=0;
    metr_eks=metr_eks+1;
end

%Τμήμα καμπύλης Bézier
metr_bezier=1;
for h=length(pin_kef_od)+length(pin_eks):length(pin_kef_od)+...
length(pin_eks)+length(pin_bez)-1
    PINAKAS(h,1)=pin_bez(metr_bezier,1);
    PINAKAS(h,2)=pin_bez(metr_bezier,2);
    PINAKAS(h,3)=0;
    metr_bezier=metr_bezier+1;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%ΚΛΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΙ ΤΟΥΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥΣ ΤΗΣ
%ΟΔΟΝΤΩΣΗΣ
[x_b,y_b,x_arx,y_arx,x_pod,y_pod,x_kef,y_kef,x_A,y_A] =...
    circles_comput(x0,y0,rg,r0,rf,rk,rA,m);

%%%PLOTS
figure
axis equal
hold on
grid on
plot(x0,y0,'k*')
plot(x_arx,y_arx,'m-.')
plot(x_kef,y_kef,'c')
plot(x_pod,y_pod,'g')
plot(x_A,y_A,'b')

for h=1:length(PINAKAS)
    plot(PINAKAS(h,1),PINAKAS(h,2),'k*')
end

hold off

```

## 2. Συνάρτηση υπολογισμού του βαθμού επικάλυψης και της θέσης του HPSTC του κινητήριου τροχού

```
function [rHPSTC,e] = HPSTC_comput(m,r0,a0_rad,r02,t0,rk,rg)
    %ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΒΑΘΜΟΥ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΘΕΣΗΣ ΤΟΥ HPSTC
    %ΤΟΥ ΚΙΝΗΤΗΡΙΟΥ ΤΡΟΧΟΥ

    %Υπολογισμός βαθμού επικάλυψης
    BC=sqrt((r0+m)^2-r0^2*cos(a0_rad)^2)-r0*sin(a0_rad);
    CA=sqrt((r02+m)^2-r02^2*cos(a0_rad)^2)-r02*sin(a0_rad);
    tg=t0*cos(a0_rad);
    e=(BC+CA)/tg;

    %Υπολογισμός της θέσης του HPSTC
    rHPSTC=sqrt(rk^2+(e-1)*tg*((e-1)*tg-2*sqrt(rk^2-rg^2)));
end
```

## 3. Συνάρτηση υπολογισμού χαρακτηριστικών κύκλων του κινούμενου τροχού και της ακτίνας rA που αντιστοιχεί στον κινητήριο τροχό

```
function [rA,r02,rk2] = rA_comput(m,z2,a0_rad,ck,rg,r0)
    %ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΝ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΤΡΟΧΟΥ
    %ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΑΣ rA ΠΟΥ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΙ ΣΤΟΝ ΚΙΝΗΤΗΡΙΟ ΤΡΟΧΟ

    r02=m*z2/2;           %ακτίνα αρχικού κύκλου κινούμενου
                        %τροχού
    rg2=r02*cos(a0_rad); %ακτίνα βασικού κύκλου κινούμενου
                        %τροχού
    hk2=ck*m;            %ύψος κεφαλής οδόντος κινούμενου τροχού
    rk2=r02+hk2;         %ακτίνα κύκλου κεφαλής κινούμενου
                        %τροχού

    %Υπολογισμός ακτίνας rA
    rA=sqrt(rg^2+(sqrt(r0^2-rg^2)+sqrt(r02^2-rg2^2)-...
    sqrt(rk2^2-rg2^2))^2);
end
```

## 4. Συνάρτηση υπολογισμού της κεφαλής οδόντος του κινητήριου τροχού

```
function [sun_sim_kef,pin_kef_od] = ...
    kef_od_comput(bim_kef,g,fk,x0,y0,rk)
    %ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΕΦΑΛΗΣ ΟΔΟΝΤΟΣ ΚΙΝΗΤΗΡΙΟΥ ΤΡΟΧΟΥ

    k=1;
    for kef=pi/2:bim_kef:pi/2+g-fk;
        x_kef_od=x0+rk*cos(kef); %εξίσωση κύκλου κεφαλής
        y_kef_od=y0+rk*sin(kef); %εξίσωση κύκλου κεφαλής
        pin_kef_od(k,1)=x_kef_od; %τετμημένη σημείου κεφαλής
    end
```

```

        pin_kef_od(k,2)=y_kef_od;      %τεταγμένη σημείου κεφαλής
        sun_sim_kef=k;                %συνολικός αριθμός σημείων
                                      %κεφαλής
    k=k+1;
end

pin_kef_od(1,1)=0;                    %επιβολή πρώτου σημείου
pin_kef_od(1,2)=rk;                    %επιβολή πρώτου σημείου

pin_kef_od(sun_sim_kef,1)=x0+rk*cos(pi/2+g-fk); %επιβολή
%τελευταίου
%σημείου
pin_kef_od(sun_sim_kef,2)=y0+rk*sin(pi/2+g-fk); %επιβολή
%τελευταίου
%σημείου

end

```

## 5. Συνάρτηση υπολογισμού της εξελιγμένης καμπύλης

```

function [sun_sim_eks,pin_eks,wmega] = ...
    ekseiligmeni_comput(g, fk_sun, rg, rA, bim_eks)
%ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΞΕΙΛΙΓΜΕΝΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

i=1;
wmega=fk_sun;

%αρχικοποίηση τιμής
pin_eks(1,1)=rg*(sin(fk_sun)-fk_sun*cos(fk_sun));
%αρχικοποίηση τιμής
pin_eks(1,2)=rg*(cos(fk_sun)+fk_sun*sin(fk_sun));
%αρχικοποίηση τιμής
rizaeks=sqrt((pin_eks(i,1))^2+(pin_eks(i,2))^2);

while rizaeks >= rA
    wmega=wmega-bim_eks;

    %εξίσωση καμπύλης εξελιγμένης
    x_eks=rg*(sin(wmega)-wmega*cos(wmega));
    %εξίσωση καμπύλης εξελιγμένης
    y_eks=rg*(cos(wmega)+wmega*sin(wmega));

    pin_eks(i,1)=x_eks;      %τετμημένη σημείου εξελιγμένης
    pin_eks(i,2)=y_eks;      %τεταγμένη σημείου εξελιγμένης
    sun_sim_eks=i;          %συνολικός αριθμός σημείων εξελιγμένης

    %απόσταση σημείου εξελιγμένης από το κέντρο του τροχού
    rizaeks=sqrt((pin_eks(i,1))^2+(pin_eks(i,2))^2);

    i=i+1;
end
end

```

## 6. Συνάρτηση υπολογισμού της καμπύλης Bézier

```
function [pin_bez] = ...
   Bezier_5points(x1,x2,x3,x4,x5,y1,y2,y3,y4,y5,bim_bez)
%ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ Bézier

bez=1;
for t=0:bim_bez:1;
    x_bez=(1-4*t+6*t^2-4*t^3+t^4)*x1+... %εξίσωση καμπύλης Bézier
        (4*t-12*t^2+12*t^3-4*t^4)*x2+...
        (6*t^2-12*t^3+6*t^4)*x3+...
        (4*t^3-4*t^4)*x4+...
        (t^4)*x5;
    y_bez=(1-4*t+6*t^2-4*t^3+t^4)*y1+... %εξίσωση καμπύλης Bézier
        (4*t-12*t^2+12*t^3-4*t^4)*y2+...
        (6*t^2-12*t^3+6*t^4)*y3+...
        (4*t^3-4*t^4)*y4+...
        (t^4)*y5;
    pin_bez (bez,1)=x_bez; %τετμημένη σημείου καμπύλης
    pin_bez (bez,2)=y_bez; %τεταγμένη σημείου καμπύλης
    bez=bez+1;
end
end
```

## 7. Συνάρτηση υπολογισμού των χαρακτηριστικών κύκλων της οδόντωσης

```
function [x_b,y_b,x_arx,y_arx,x_pod,y_pod,x_kef,y_kef,x_A,y_A] = ...
    circles_comput( x0,y0,rg,r0,rf,rk,rA,m )
%ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΝ ΟΔΟΝΤΩΣΗΣ

%κοινά χαρακτηριστικά
arxi=2*pi/5;
peras=3*pi/5;
vima=0.01;
x0=0; %τετμημένη κέντρου κύκλου
y0=0; %τεταγμένη κέντρου κύκλου

%αρχικός κύκλος
u=(arxi:vima:peras);
x_arx=x0+r0*cos(u);
y_arx=y0+r0*sin(u);

%βασικός κύκλος
u=(arxi:vima:peras);
x_b=x0+rg*cos(u);
y_b=y0+rg*sin(u);

%κύκλος κεφαλής
u=(arxi:vima:peras);
x_kef=x0+rk*cos(u);
y_kef=y0+rk*sin(u);
```

```

%κύκλος ποδός
u=(arxi:vima:peras);
x_pod=x0+rf*cos(u);
y_pod=y0+rf*sin(u);

%κύκλος ακτίνας rA
u=(arxi:vima:peras);
x_A=x0+rA*cos(u);
y_A=y0+rA*sin(u);
end

```

## 8. Συνάρτηση υπολογισμού της ακτίνας $r_s$

Να σημειωθεί ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση δεν απαιτείται από τον κώδικα που παρέχει την τροποποιημένη κατατομή του οδόντος. Χρησιμοποιήθηκε στον αρχικό κώδικα όπου στην κατατομή του οδόντος συμμετέχει το τροχοειδές και ο κύκλος ποδός του τροχού, αντί της καμπύλης Bézier.

```

function [rs,fs,f0] = rs_comput(a0_rad,l0,r0,rg,m)
%ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΑΣ rs
%Οι συμβολισμοί προκύπτουν από τις αντίστοιχες ενότητες της
%βιβλιογραφικής πηγής [1] και αναφέρονται στο Κεφάλαιο 1
%της διπλωματικής εργασίας

f0=tan(a0_rad)-a0_rad;           %γωνία φο
cc=0.30;                         %συντελεστής της ακτίνας
                                 %καμπυλότητας της ακμής του
                                 %οδόντος του κοπτικού εργαλείου
rc=cc*m;                          %ακτίνα καμπυλότητας της ακμής
                                 %του οδόντος του κοπτικού εργαλείου
at=hf-rc*(1-sin(a0_rad));        %απόσταση (κατά y) του κέντρου
                                 %καμπυλότητας της ακμής του
                                 %οδόντος του κοπτικού εργαλείου
                                 %από το σημείο κύλισης C
d=l0-2*(at*tan(a0_rad)+rc*cos(a0_rad)); %απόσταση μεταξύ των
                                 %κέντρων καμπυλότητας
                                 %των ακμών του οδόντος
                                 %του κοπτικού εργαλείου

x_ita=0.5*(l0-d);
y_lamda=-at+rc*sin(a0_rad);

ds=0.001; %ακρίβεια επίτευξης ισότητας των γωνιών gamma και fs
gamma=0; %αρχικοποίηση γωνίας
fs=1; %αρχικοποίηση γωνίας

for wmega_s=pi/2-a0_rad :-0.01:0
    if gamma<=fs-ds | gamma>=fs+ds
        x=x_ita-rc*sin(wmega_s);
        y=y_lamda-rc*cos(wmega_s);

        k=-(x+y*(-tan(wmega_s)));

        thita=k/r0;
    end
end

```

```
x1k=(x+k)*cos(thita)-(y+r0)*sin(thita);
y1k=(x+k)*sin(thita)+(y+r0)*cos(thita);

xs=x1k*cos(-f0)+y1k*sin(-f0);
ys=-x1k*sin(-f0)+y1k*cos(-f0);

rs=sqrt(xs^2+ys^2);

gamma=atan(-(xs/ys));

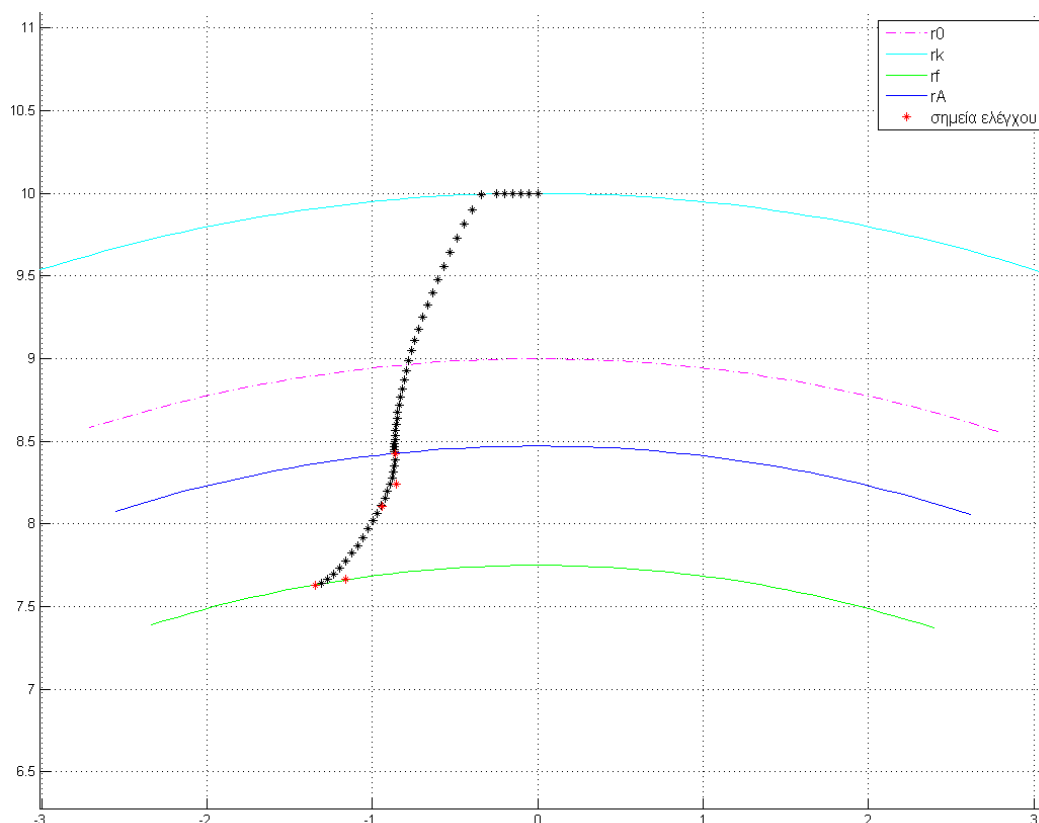
as=acos(rg/rs);
fs=tan(as)-as;
else
end
end
end
```



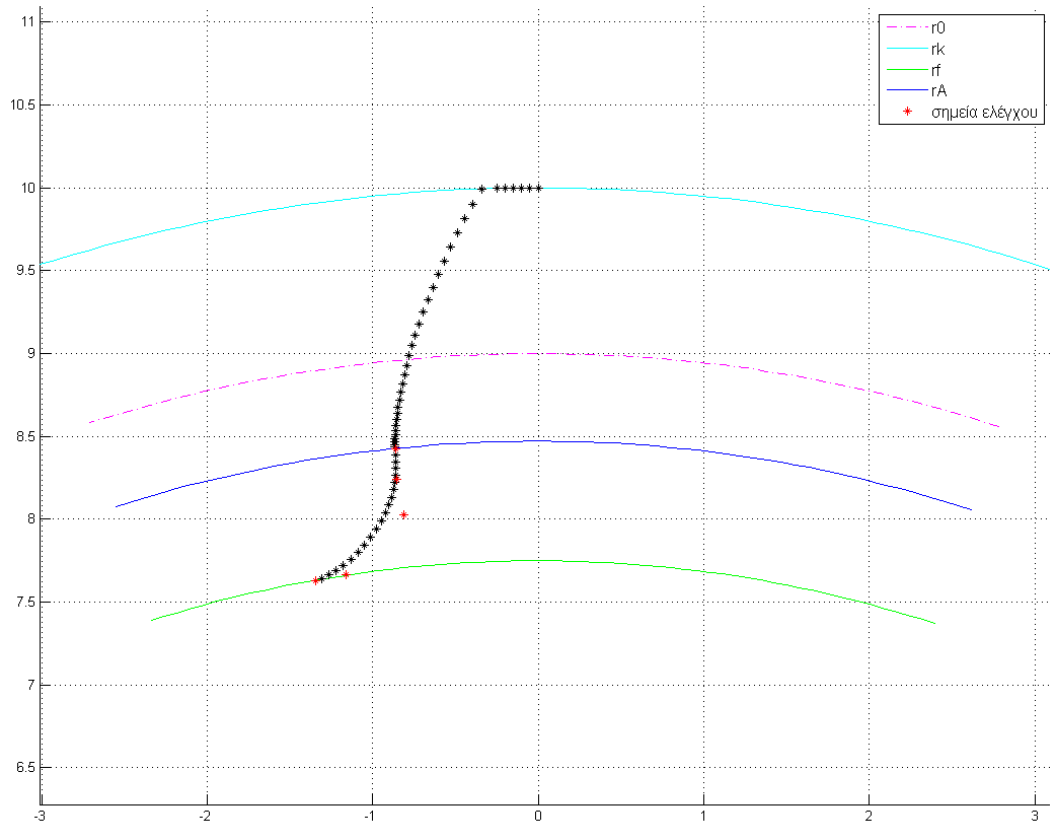
## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Παραδείγματα κατατομών συναρτήσεων της θέσης του σημείου (3)

Στα ακόλουθα σχήματα παρουσιάζεται η επίδραση της θέσης του τρίτου σημείου (3) στη μορφή της κατατομής του οδόντος. Συγκεκριμένα, στα τρία πρώτα σχήματα μελετάται η επίδραση της μεταβολής της παραμέτρου  $p_1$ , καθώς η παράμετρος  $p_2$  διατηρείται σταθερή. Στα υπόλοιπα τρία σχήματα μελετάται η επίδραση της μεταβολής της παραμέτρου  $p_2$ , καθώς η παράμετρος  $p_1$  διατηρείται σταθερή.

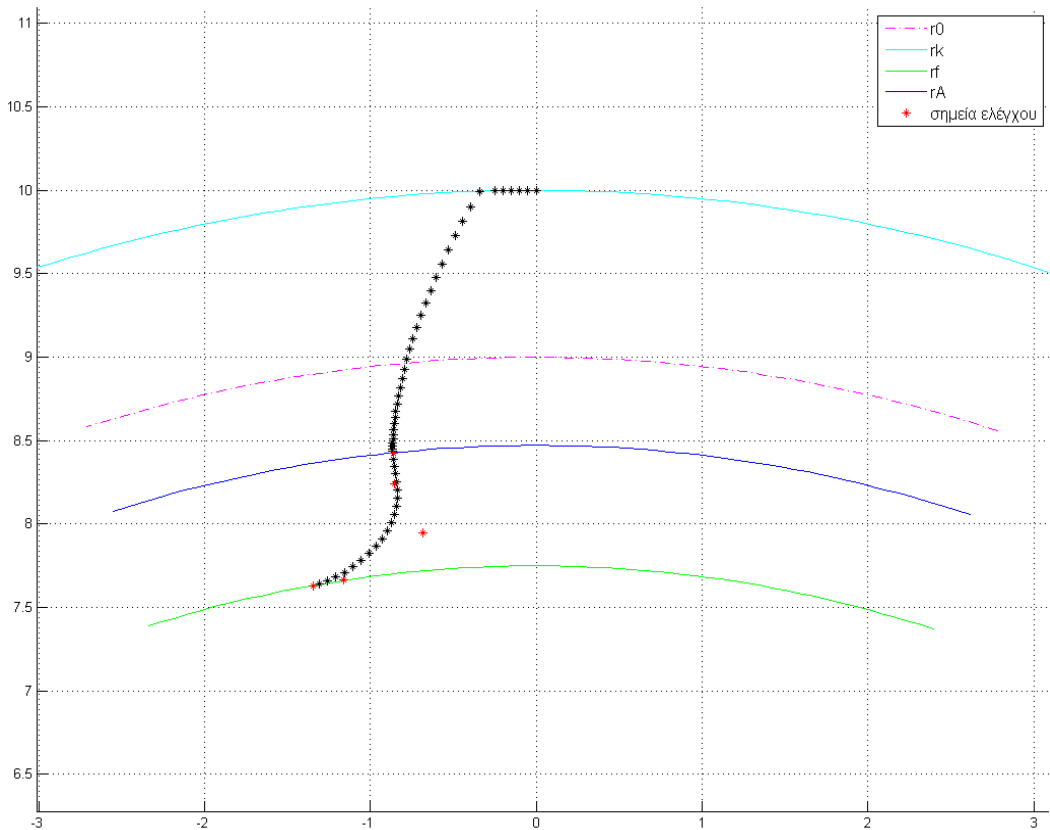
Να σημειωθεί ότι το πρώτο (1) και το πέμπτο (5) σημείο ελέγχου ταυτίζονται με το πρώτο και το τελευταίο, αντίστοιχα, σημείο της καμπύλης Βέζιερ. Έχει επιλεχθεί να υπερισχύει οπτικά το σημείο ελέγχου έναντι του αντίστοιχου σημείου της καμπύλης για την καλύτερη κατανόηση των σχημάτων.



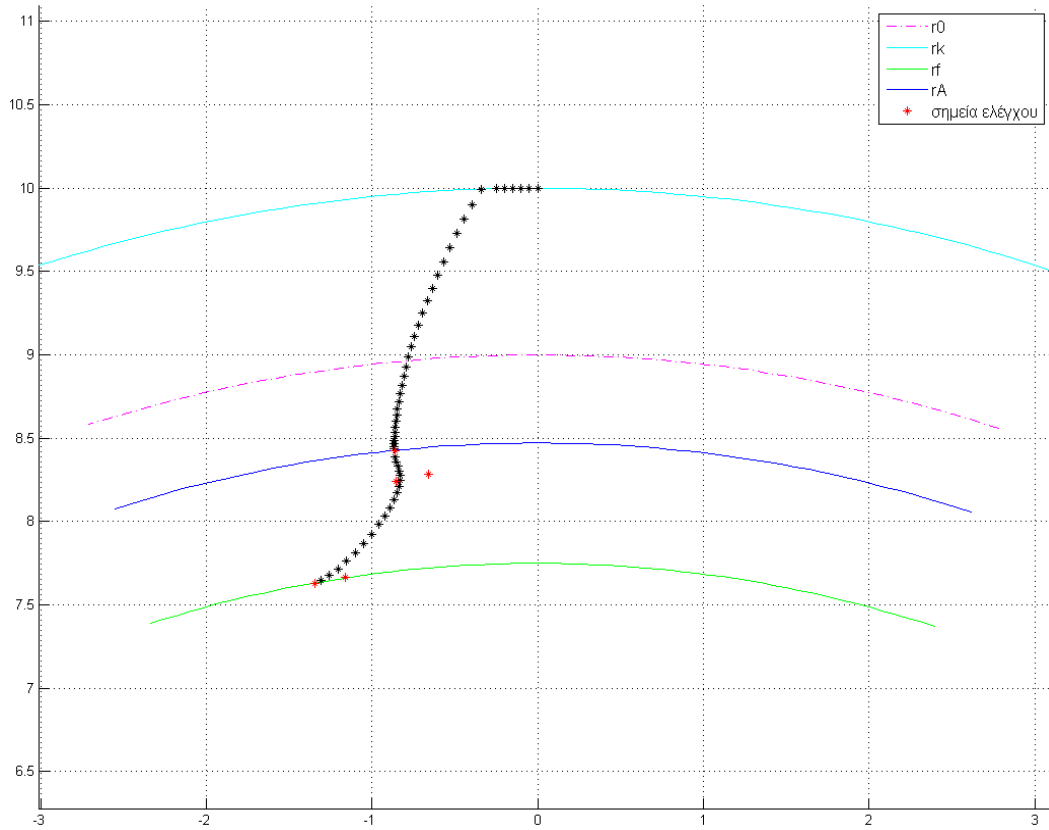
Παράμετροι:  $p_1 = 0.10$ ,  $p_2 = 0.15$



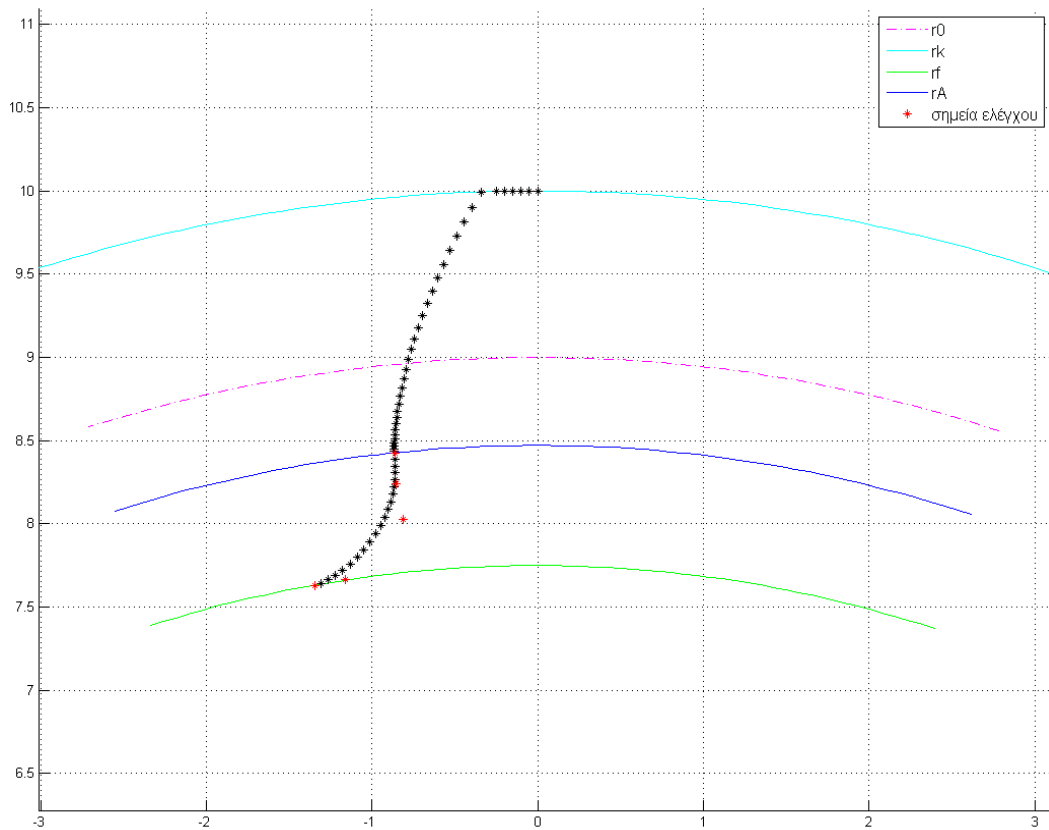
Παράμετροι:  $p_1 = 0.25$ ,  $p_2 = 0.15$



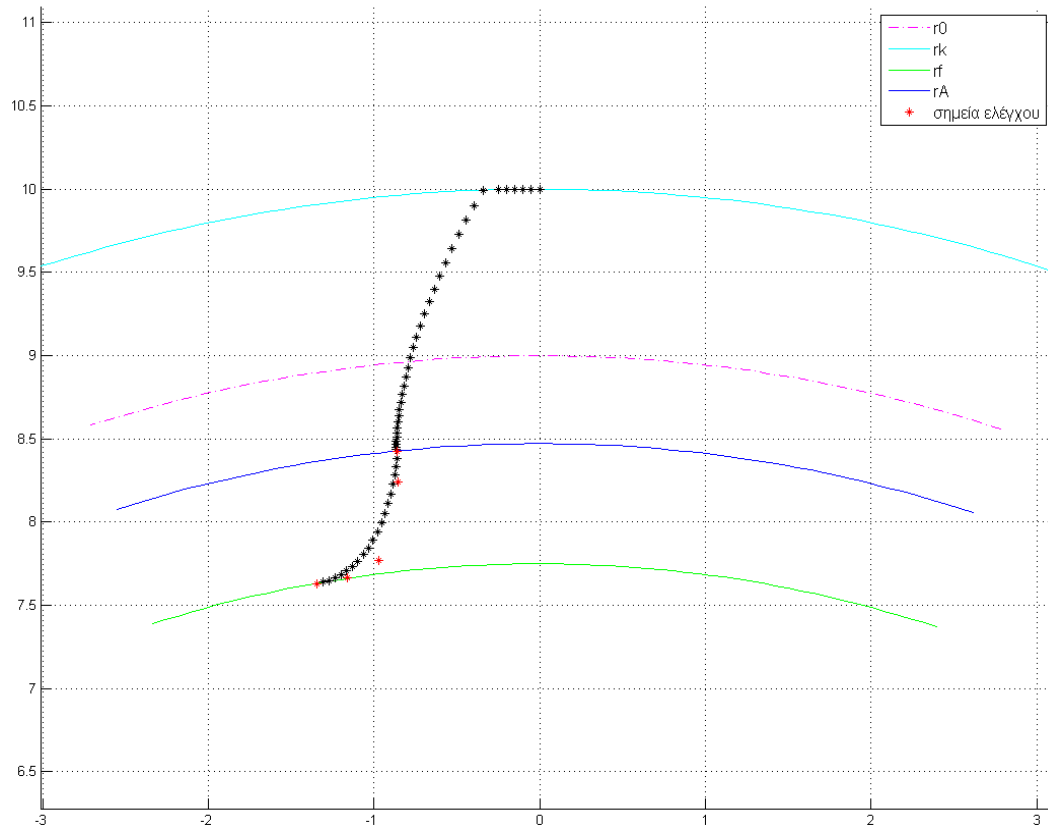
Παράμετροι:  $p_1 = 0.40$ ,  $p_2 = 0.15$



Παράμετροι:  $p_1 = 0.25$ ,  $p_2 = 0.45$

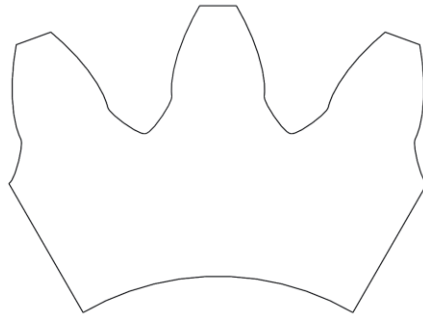


Παράμετροι:  $p_1 = 0.25$ ,  $p_2 = 0.15$

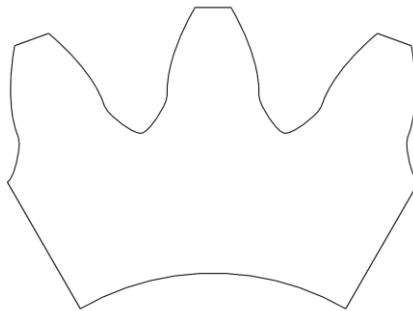


Παράμετροι:  $p_1 = 0.25$ ,  $p_2 = -0.15$

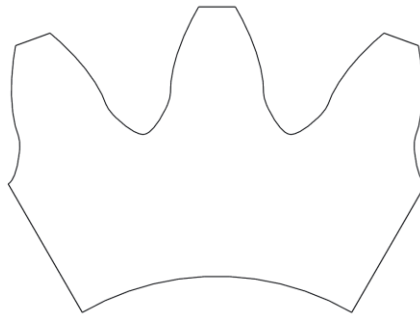
**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Παρουσίαση ενδεικτικών μοντέλων του Πίνακα 5-3**



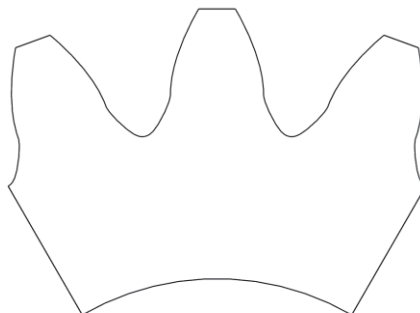
**$p_1 = 0.10, p_2 = 0.45$**



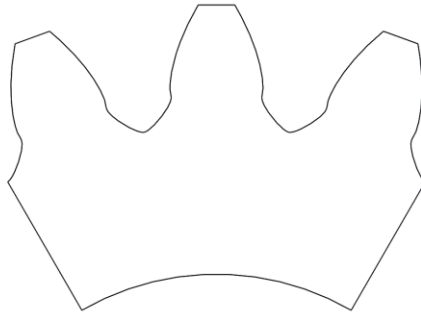
**$p_1 = 0.10, p_2 = 0.25$**



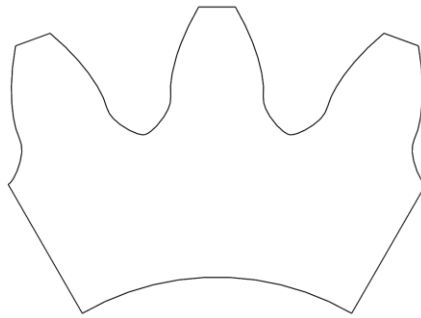
**$p_1 = 0.10, p_2 = 0.05$**



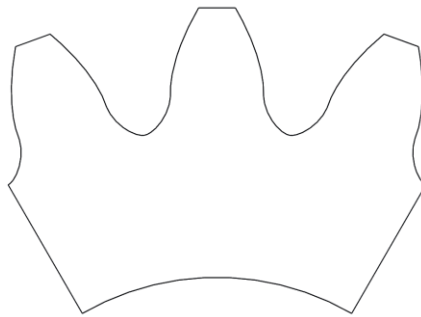
**$p_1 = 0.10, p_2 = -0.15$**



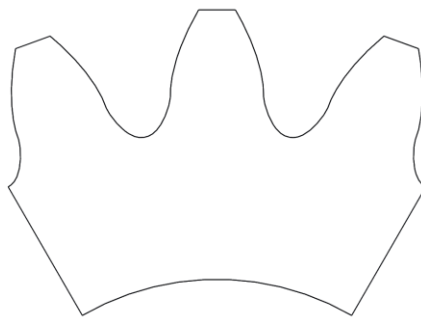
**$p_1 = 0.20, p_2 = 0.45$**



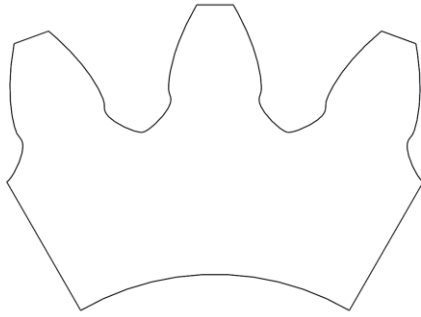
**$p_1 = 0.20, p_2 = 0.25$**



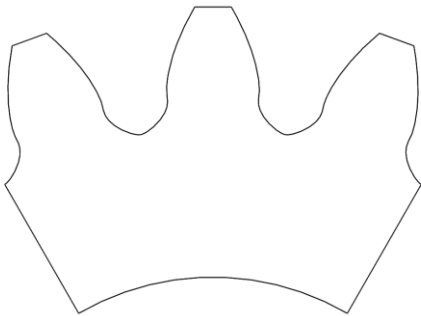
**$p_1 = 0.20, p_2 = 0.05$**



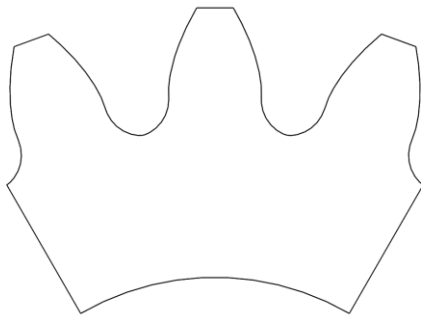
**$p_1 = 0.20, p_2 = -0.15$**



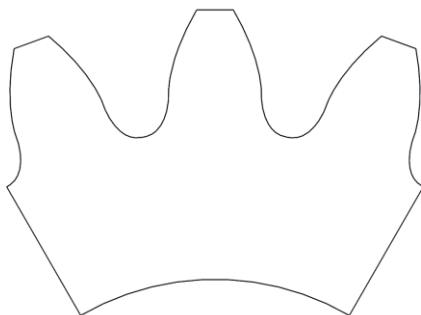
**$p_1 = 0.30, p_2 = 0.45$**



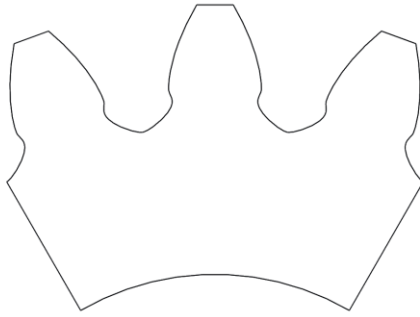
**$p_1 = 0.30, p_2 = 0.25$**



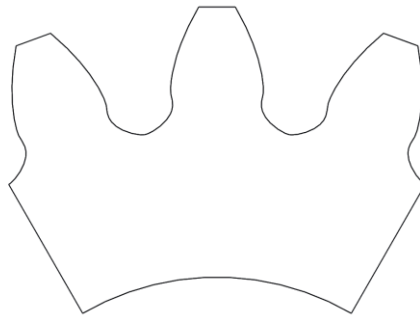
**$p_1 = 0.30, p_2 = 0.05$**



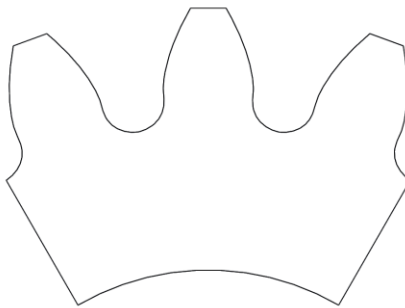
**$p_1 = 0.30, p_2 = -0.15$**



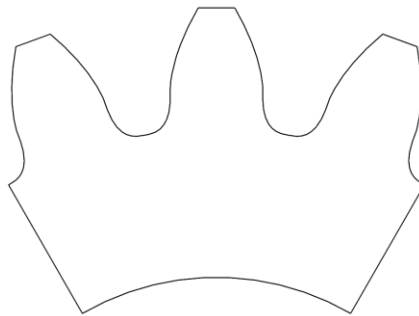
**$p_1 = 0.40, p_2 = 0.45$**



**$p_1 = 0.40, p_2 = 0.25$**



**$p_1 = 0.40, p_2 = 0.05$**



**$p_1 = 0.40, p_2 = -0.15$**