



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ REDHEFFER, ΟΙ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ
ΤΟΥΣ ΚΑΙ Η ΥΠΟΘΕΣΗ RIEMANN**

Αγγελική-Μαρία Μπίτση

Αθήνα, Ιούλιος 2014



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ REDHEFFER, ΟΙ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ
ΤΟΥΣ ΚΑΙ Η ΥΠΟΘΕΣΗ RIEMANN**

Αγγελική-Μαρία Μπίτση

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή:

- Σωτήριος Καρανάσιος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
- Βασίλειος Κανελλόπουλος, Επίκ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
- Παναγιώτης Ψαρράκος, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π. (επιβλέπων)

Αθήνα, Ιούλιος 2014

Περιεχόμενα

• Εισαγωγή	4
• Κεφάλαιο 1	
1.1 Οι πίνακες Redheffer και η ισοδυναμία με την υπόθεση Riemann	8
1.2 Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A_n	14
1.3 Η φασματική ακτίνα του A_n	18
• Κεφάλαιο 2	
2.1 Το πολυώνυμο $g_n(x)$	24
2.2 Οι ρίζες του $g_n(x)$	31
• Κεφάλαιο 3	
3.1 εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A_n	39
3.2 οι μεγάλες κατά μέτρο ρίζες του $f_n(t)$	44
3.3 φράγμα για τις υπόλοιπες ρίζες του $f_n(t)$	51
• Συμπεράσματα	55
• Παράρτημα	56
• Βιβλιογραφία	76

Εισαγωγή

Ο Georg Friedrich Bernhard Riemann (17 Σεπτεμβρίου 1826- 20 Ιουλίου 1866), ήταν κορυφαίος Γερμανός μαθηματικός, που συνέβαλε σημαντικά σε τομείς όπως η ανάλυση, η θεωρία αριθμών η διαφορική γεωμετρία κλπ.

Το 1859, σε μία δημοσίευσή του με τίτλο: “Ueber die Anzahl der Primzahlen unter eine gegebener Grosse”, ο Riemann εισήγαγε τη Riemann zeta συνάρτηση.

Ορισμός

Η Riemann zeta συνάρτηση $\zeta(s)$ με πεδίο ορισμού το \mathbb{C} , ορίζεται στο ημιεπίπεδο $\text{Re}(s) > 1$ από την απολύτως συγκλίνουσα σειρά

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Ο Riemann έδειξε ότι η $\zeta(s)$ επεκτείνεται σε όλο το \mathbb{C} ως μερόμορφη συνάρτηση, με έναν μόνο απλό πόλο στο $s=1$, με ολοκληρωτικό υπόλοιπο 1, και ότι ικανοποιεί την εξίσωση $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$, όπου $\Gamma(s)$ η γνωστή συνάρτηση Γάμμα, καθώς ακόμη και πολλές άλλες ιδιότητές της.

Να τονιστεί εδώ, ότι με την ίδια συνάρτηση με πραγματικό πεδίο ορισμού είχε ήδη ασχοληθεί ο Euler.

Η σπουδαιότητα της συνάρτησης αυτής, όπως παρατήρησε ο Riemann, είναι ότι η κατανομή των πρώτων αριθμών εξαρτάται από την κατανομή των μιγαδικών ριζών της $\zeta(s)$.

Υπόθεση Riemann

Όλες οι μη τετριμμένες ρίζες της $\zeta(s)$, βρίσκονται πάνω στη γραμμή

$$\text{Re}(s) = \frac{1}{2}.$$

Για να αποδεχθεί η υπόθεση Riemann, έχουν γίνει πολλές προσπάθειες, και οι μαθηματικοί έχουν προσπαθήσει να βρουν διάφορες ισοδύναμες

μορφές, που θα κάνουν πιο προσιτή την υπόθεση αυτή και θα μας φέρουν πιο κοντά στην απόδειξή της. Μέχρι και σήμερα δεν έχει όμως αποδειχθεί.

Μερικές από τις ισοδύναμες μορφές της υπόθεσης Riemann είναι:

- Το κριτήριο του Riesz (1916), το οποίο λέει ότι η υπόθεση Riemann ισχύει αν και μόνο αν $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{(k-1)! \zeta(2k)} = O\left(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right)$ για κάθε $\varepsilon > 0$
- Το 1950, ο Nyman απέδειξε, ότι η υπόθεση Riemann ισχύει αν και μόνο αν ο χώρος συναρτήσεων της μορφής $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu} c_{\nu} \rho(\theta_{\nu} / x)$, όπου $\rho(x) = x - [x]$, $0 \leq \theta_{\nu} \leq 1$, και $\sum_{\nu=1}^{\nu} c_{\nu} \theta_{\nu} = 0$ είναι πυκνός στο χώρο Hilbert $L^2(0,1)$
- Ο Beurling το 1955 επέκτεινε το παραπάνω κριτήριο, δείχνοντας ότι η συνάρτηση ζήτα δεν έχει ρίζες με πραγματικό μέρος πάνω από $1/p$, αν και μόνο αν ο συγκεκριμένος χώρος συναρτήσεων είναι πυκνός στον $L^p(0,1)$
- Ο Salem (1953) έδειξε ότι η υπόθεση Riemann ισχύει αν και μόνο αν η εξίσωση $\int_0^{\infty} \frac{z^{-\sigma-1} \varphi(z) dz}{e^{\frac{x}{z}} + 1} = 0$ δεν έχει μη τετριμμένα φραγμένες λύσεις φ για $\frac{1}{2} < \sigma < 1$
- Ο Speiser (1934) απέδειξε ότι η υπόθεση Riemann ισχύει αν και μόνο αν η παράγωγος της συνάρτησης ζήτα δεν έχει ρίζες στη λωρίδα $0 < \text{Re}(s) < \frac{1}{2}$
- Ο Li το 1997 έδειξε το ακόλουθο κριτήριο: η υπόθεση Riemann ισχύει αν και μόνο αν $\lambda_n > 0$ για κάθε θετικό n , όπου $\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^n}{ds^n} \left[s^{n-1} \ln \xi(s) \right]_{s=1}$ και $\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$

Μία ακόμη ισοδύναμη μορφή, δόθηκε από τον J.E.Littlewood το 1912, και λέει ότι: η υπόθεση Riemann ισχύει αν και μόνο αν:

$$M(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \text{ καθώς } x \rightarrow \infty \quad \forall \varepsilon > 0,$$

όπου $M(x)$ είναι η συνάρτηση Mertens. Η σχέση της συνάρτησης Mertens με τη $\zeta(s)$, είναι: $M(x) = \sum_{n=1}^x \mu(n)$, όπου $\mu(n)$ η συνάρτηση

Mobius και

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Η σειρά συγκλίνει για $\text{Re}(s) > 1$. Δεδομένης της ισοδυναμίας που αποδείχθηκε στο βιβλίο του Titchmarsh, η σειρά αποδεικνύεται ότι συγκλίνει για κάθε s με $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Πιο συγκεκριμένα όμως, δεν μπορούν να υπάρξουν ρίζες της $\zeta(s)$ στο ημιεπίπεδο αυτό, αφού οι ρίζες της $\zeta(s)$ θα είναι πόλοι της $\frac{1}{\zeta(s)}$

Η υπόθεση Riemann δεν έχει αποδειχθεί, αλλά υπάρχουν δύο βασικά επιχειρήματα υπέρ της ισχύος της:

- Μέχρι τώρα οι 10 δισεκατομμύρια ρίζες που έχουν βρεθεί, έχουν $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$.
- Αν δεν ισχύει, τότε η ρίζα που θα έχει $\text{Re}(s) \neq \frac{1}{2}$, θα έδειχνε μία τρομερή ανωμαλία στην κατανομή των πρώτων αριθμών, και πιο γενικά θα ήταν μία παγκόσμια σταθερά της τάξης της ταχύτητας του φωτός, που σημαίνει ότι οι φυσικοί θα τη συναντούσαν πολύ συχνά, άρα θα είχε ήδη δοκιμαστεί ως ρίζα για τη συνάρτηση Riemann.

Στην εργασία αυτή ασχολούμαστε με μία ισοδύναμη μορφή της υπόθεσης Riemann, την οποία διατύπωσε ο Raymond Moos Redheffer (17 Απριλίου 1921- 13 Μαΐου 2005), οποία λέει ότι: η υπόθεση Riemann ισχύει αν και μόνο αν $\det(A_n) = M(n)$, όπου A_n είναι οι πίνακες Redheffer που εισήγαγε ο ίδιος.

Με βάση όσα προηγήθηκαν, είναι εύκολο να καταλάβει κανείς ότι αν αποδείξουμε ότι $\det(A_n) = O\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ έχουμε δείξει την ισοδυναμία με την υπόθεση Riemann. Ο Redheffer έδειξε ακόμα, ότι οι πίνακες αυτοί έχουν μία ιδιοτιμή μέτρου \sqrt{n} , μία μέτρου $-\sqrt{n}$ και όλες οι υπόλοιπες είναι πολύ μικρές, καθώς και διάφορες άλλες ιδιότητες των πινάκων αυτών. Οι

αποδείξεις όλων αυτών είναι σε μία δημοσίευση του 1977 με τίτλο “Eine explizit lösbare Optimierungsaufgabe”.

Η εργασία αυτή βασίζεται στη δουλειά των μαθηματικών Wayne W. Barrett, Tyler Jarvis και των συνεργατών τους, που βασιζόμενοι στη δουλειά του Redheffer απέδειξαν τόσο την πιο πάνω ισοδυναμία, όσο και πάρα πολλές ιδιότητες των πινάκων αυτών.

Η χρησιμότητα αυτής της ισοδυναμίας, έγκειται στο γεγονός ότι οι πίνακες είναι πιο εύχρηστοι από τις σειρές, δεδομένου ότι μέσω υπολογιστών παίρνουμε για αυτούς άμεσα πολλά αποτελέσματα, οπότε κάνουν και την υπόθεση Riemann πιο προσιτή και ίσως μας πάνε ένα βήμα πιο κοντά στην απόδειξή της.

Θα ασχοληθούμε με την απόδειξη της ισοδυναμίας των πινάκων Redheffer με την υπόθεση Riemann, καθώς και με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο των πινάκων Redheffer, τη φασματική ακτίνα και τις ιδιοτιμές τους

Κεφάλαιο 1

1.1 Οι πίνακες Redheffer και η ισοδυναμία με την υπόθεση Riemann

Ορισμός 1.1.1

Ορίζουμε το διαιρέτη $n \times n$ πίνακα $D_n = (d_{ij})$, ως: $d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i|j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

και τον $n \times n$ πίνακα $C_n = (c_{ij})$, ως: $C_n = [0, 1, 1, \dots, 1]^T [1, 0, 0, \dots, 0]$.

Ορισμός 1.1.2

Ο πίνακας Redheffer, που εισήχθη το 1977 από τον αμερικανό μαθηματικό Raymond Moos Redheffer, είναι ένας $n \times n$ πίνακας A_n , που ορίζεται ως: $A_n = D_n + C_n$, με $D_n = (d_{ij})$ και $C_n = (c_{ij})$, όπως ορίστηκαν ακριβώς παραπάνω.

Πχ: για $n=6$, έχουμε

$$D_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$A_6 = D_6 + C_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πρόταση 1.1.1

Για τον πίνακα D^T , ισχύει ότι: $(D^T)^{-1} = (a_{ij})$, όπου $a_{ij} = \begin{cases} \mu\left(\frac{i}{j}\right), & \text{αν } j|i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$.

Απόδειξη: έστω $A = D^T$, $B = (D^T)^{-1}$ και $B_{mn} = \begin{cases} \mu\left(\frac{m}{n}\right), & \text{αν } n|m \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$.

Θα δείξουμε ότι $A \cdot B = I$. Για το στοιχείο του $A \cdot B$, ξέρω ότι

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} = \sum_k A_{ik} \mu\left(\frac{k}{j}\right)$$

- αν $j > i$, αφού $\mu\left(\frac{l}{j}\right) = 0, \forall l \leq i$, το αποτέλεσμα μηδενίζεται
- αν $j = i$, το αποτέλεσμα είναι $1 = \mu(1)$
- αν $j < i$, θα δείξουμε ότι το αποτέλεσμα εξαφανίζεται:

ξέρουμε από την Πρόταση 0.2, ότι $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n=1 \\ 0, & \text{αν } n \geq 2 \end{cases}$

Έστω ότι B^j είναι η j -οστή στήλη του B . Προφανώς $A \cdot B^1 = e^1$, όπου

$$e^i = \left(0, 0, \dots, 0, \underset{i\text{-θέση}}{1}, 0, \dots, 0 \right)$$

(πχ, αν οι A, B είναι 4×4 πίνακες, τότε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \mu(1) & 0 & 0 & 0 \\ \mu(2) & \mu(1) & 0 & 0 \\ \mu(3) & 0 & \mu(1) & 0 \\ \mu(4) & \mu(2) & 0 & \mu(1) \end{bmatrix}$$

και το εν λόγω γινόμενο είναι

$$A \cdot B^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu(1) \\ \mu(2) \\ \mu(3) \\ \mu(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu(1) \\ \mu(1) + \mu(2) \\ \mu(1) + \mu(3) \\ \mu(1) + \mu(2) + \mu(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

δηλώνουμε εξαρχής, ότι αν $j \nmid i$, τότε $A_{i,j} = 0, \forall i$, άρα το άθροισμα μηδενίζεται, οπότε περισεύουν τα $j \mid i$, δηλαδή $i = mj$, οπότε το άθροισμα γίνεται:

$$A_{i,j}\mu(1) + A_{i,2j}\mu(2) + \dots + A_{i,mj}\mu(m)$$

τα $A_{i,kj}$ δεν εξαφανίζονται ακριβώς όταν $k \mid m$, οπότε η παραπάνω, σχέση μπορεί να γραφεί ως, $\sum_{d \mid m} \mu(d)$ (αφού από τον ορισμό του A,

$A_{i,mj} = 1$), που για $m \geq 2$ μηδενίζεται, άρα $B = A^{-1}$. ■

Πρόταση 1.1.2

Το αποτέλεσμα της Πρότασης 1.1.1, ισχύει και για τον D , δηλαδή για τον

$$D_n = (d_{ij}), \text{ ισχύει ότι } D_n^{-1} = (a_{ij}), \text{ με } a_{ij} = \begin{cases} \mu\left(\frac{j}{i}\right), \text{ αν } i \mid j \\ 0, \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι αν $D^T (D^T)^{-1} = I$, τότε $D^{-1}D = I$

Πράγματι,

$$D^T (D^T)^{-1} = I \stackrel{\text{πρόταση 0.4}}{\Leftrightarrow} D^T (D^{-1})^T = I \stackrel{\text{πρόταση 0.3}}{\Leftrightarrow} (D^{-1}D)^T = I^T \Leftrightarrow D^{-1}D = I \quad \blacksquare$$

Ο Redheffer, απέδειξε την παρακάτω πρόταση, που συνδέει τους πίνακες Redheffer με την υπόθεση Riemann

Πρόταση 1.1.3

Αν A_n ο $n \times n$ πίνακας Redheffer, όπως ορίστηκε παραπάνω, τότε ισχύει ότι:

$$\det A_n = M(n)$$

Απόδειξη:

- αρχικά, από πρόταση 1.2, ισχύει ότι $D_n^{-1} = (a_{ij})$, με $a_{ij} = \begin{cases} \mu\left(\frac{j}{i}\right), & \text{αν } i|j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

(1)

- ακόμα, ο D_n είναι άνω τριγωνικός, αφού για $i > j$ $a_{ij} = 0$. Επίσης $\det D_n^{-1} \stackrel{\text{πρόταση 0.6}}{=} (\det D_n)^{-1}$ (2).

Αφού ο D_n είναι άνω τριγωνικός, από Θεώρημα 0.2 $\det D_n = d_{11}d_{22}\dots d_{nn}$

Από (1) έχουμε ότι αν $i=j$, $i|j$ άρα $d_{ij} = d_{jj} = 1$, $\forall 1 \leq j \leq n$. Άρα

$$\det D_n = d_{11}d_{22}\dots d_{nn} = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1^n = 1 \quad \text{και}$$

$$\det D_n^{-1} \stackrel{(2)}{=} (\det D_n)^{-1} = 1^{-1} = 1 \quad (3)$$

- ακόμα $\det(D_n^{-1}A_n) \stackrel{A_n, D_n^{-1} \text{ } n \times n \text{ πίνακες}}{=} \stackrel{\text{πρόταση 0.5}}{\det(D_n^{-1})\det(A_n)} \stackrel{(3)}{=} \det A_n$ (4)

- επίσης $D_n^{-1}A_n \stackrel{A_n = D_n + C_n}{=} D_n^{-1}(D_n + C_n) = D_n^{-1}D_n + D_n^{-1}C_n = I_n + D_n^{-1}C_n$,
άρα $\det(D_n^{-1}A_n) = \det(I_n + D_n^{-1}C_n)$ (5)

- τώρα, για τον πίνακα $D_n^{-1}C_n$

$$D_n^{-1} = \begin{bmatrix} \mu(1) & \mu(2) & \dots & \mu(n) \\ 0 & \mu(1) & \dots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mu(1) \end{bmatrix}, \quad C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

όπου και οι δύο είναι $n \times n$ πίνακες

$$\text{άρα } (D_n^{-1}C_n)_{ij} \stackrel{\text{ορισμός 1.15}}{=} \sum_k D_{ik}^{-1}C_{kj}$$

- για $j \geq 2$, αφού ο C έχει μόνο 0, αναγκαστικά και το γινόμενο θα είναι 0 (6), άρα ο $D_n^{-1}C_n$ είναι κάτω τριγωνικός
- πιο συγκεκριμένα, ο $D_n^{-1}C_n$ έχει στοιχεία διάφορα του 0, μόνο στην πρώτη στήλη, και ακόμα πιο συγκεκριμένα $(D_n^{-1}C_n)_{11} = \sum_{k=2}^n \mu(k)$, αφού προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό

$$\begin{bmatrix} \mu(1) & \mu(2) & \dots & \mu(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

- από (6) $(D_n^{-1}C_n)_{ii} = 0, \forall 1 < i \leq n$

$$\text{➤ άρα: } D_n^{-1}C_n = \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^n \mu(k) & 0 & \dots & 0 \\ ? & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ? & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \text{ όπου τα ? είναι στοιχεία που δεν}$$

μας ενδιαφέρει να ξέρουμε, αφού δεν θα χρησιμοποιηθούν στην ορίζουσα που μας ενδιαφέρει εδώ

- τώρα

$$I_n + D_n^{-1}C_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^n \mu(k) & 0 & \dots & 0 \\ ? & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ? & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \sum_{k=2}^n \mu(k) & 0 & \dots & 0 \\ ? & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ? & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \mu(1) + \sum_{k=2}^n \mu(k) & 0 & \dots & 0 \\ ? & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ ? & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \mu(k) & 0 & \dots & 0 \\ ? & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ ? & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

άρα $I_n + D_n^{-1}C_n$ κάτω τριγωνικός

- και $\det(I_n + D_n^{-1}C_n) \stackrel{\text{θεώρημα 0.1}}{=} \prod_{i=1}^n (I_n + D_n^{-1}C_n)_{ii} = \sum_{k=1}^n \mu(k) \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = \sum_{k=1}^n \mu(k)$

(7)

- συνολικά λοιπόν έχουμε δείξει ότι:

$$\det A_n \stackrel{(4)}{=} \det D_n^{-1} A_n \stackrel{(5)}{=} \det(I_n + D_n^{-1}C_n) \stackrel{(7)}{=} \sum_{k=1}^n \mu(k) \stackrel{\text{ορισμός 0.9}}{=} M(n) \quad \blacksquare$$

Ακόμη, έχει αποδειχθεί, ότι ισοδύναμος με την υπόθεση Riemann, είναι ο ισχυρισμός ότι

$$M(n) = O\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (1.1.1)$$

Άρα, αποδείξαμε πρακτικά ότι ισοδύναμος με την υπόθεση Riemann, είναι ο ισχυρισμός ότι

$$|\det A_n| = O\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (1.1.2)$$

και έτσι συνδέονται οι πίνακες Redheffer με την υπόθεση αυτή.

1.2 Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A_n

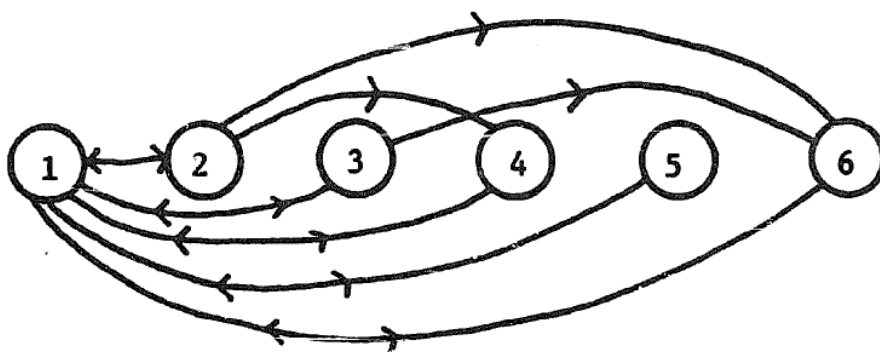
Έστω $B_n = A_n - I_n$, και G_n το κατευθυνόμενο γράφημα του B_n

Πχ: για $n=6$, έχουμε

$$B_6 = A_6 - I_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

G_6 :



$$\text{Έστω } q_n(x) = \det(xI_n + B_n). \quad (1.2.1)$$

Τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A_n , δηλαδή το $p_n(t) = \det(A_n - tI_n)$
(1.2.2)

δίνεται από τη σχέση $p_n(t) = q_n(1-t)$, έτσι ώστε αν r είναι ρίζα του q_n , τότε
η $\lambda = 1-r$ είναι ιδιοτιμή του A_n (1.2.3)

Υπολογίζουμε τώρα το q_n με όρους κύκλους του G_n .

Σημειώνουμε, ότι κάθε κύκλος $1 \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_{k-1} \rightarrow 1$ στο G_n , συνεισφέρει έναν όρο στην $\det(xI_n + B_n)$ ίσο με $(-1)^{k-1}$ επί την ορίζουσα του $(n-k) \times (n-k)$ κύριου υποπίνακα του $xI_n + B_n$, που σχηματίζεται διαγράφοντας τις γραμμές και στήλες $1, i_1, i_2, \dots, i_{k-1}$.

Ο υποπίνακας αυτός είναι άνω τριγωνικός.

Πράγματι, αν πάρουμε τον $(n-k) \times (n-k)$ υποπίνακα που σχηματίζεται διαγράφοντας τις γραμμές και στήλες $1, i_1, i_2, \dots, i_{k-1}$, σίγουρα θα διαγράψουμε την πρώτη στήλη, άρα ό,τι μένει είναι άνω τριγωνικό, αφού για $i > j$, εκτός της πρώτης στήλης, όλα τα στοιχεία είναι 0.

πχ: για $n=6$

$$xI_6 + B_6 = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

που φαίνεται ξεκάθαρα ότι αν φύγει η πρώτη στήλη, όποιες άλλες και να βγάλουμε μένει άνω τριγωνικός πίνακας, με διαγώνια στοιχεία ίσα με x . Αφού λοιπόν ο υποπίνακας αυτός είναι άνω τριγωνικός, η ορίζουσά του θα είναι x^{n-k} , σύμφωνα με το Θεώρημα 0.2.

Άρα κάθε k -κύκλος στο G_n , σύμφωνα με το ανάπτυγμα Laplace, συνεισφέρει έναν όρο $(-1)^{k-1} x^{n-k}$ στην ορίζουσα $\det(xI_n + B_n)$, και εκτός από τους διαγώνιους όρους, αυτοί είναι οι μόνοι μη μηδενικοί όροι.

Έστω τώρα $c(n,k)$ =ο αριθμός των διαφορετικών k -κύκλων στο G_n .

$$\text{Έχουμε ότι } q_n(x) = x^n + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} c(n,k) x^{n-k}. \quad (1.2.4)$$

Προφανώς

- $c(n,1) = 0$: στα G_n τίποτα δεν πάει στον εαυτό του, οπότε δεν έχουμε 1-κύκλους.

- $c(n,2) = n-1$: σε αυτούς τους πίνακες, η πρώτη γραμμή και η πρώτη στήλη (εκτός από το $(1,1)$ στοιχείο) έχουν 1. Οπότε ο κόμβος 1, συνδέεται με 2-κύκλους με όλους τους υπόλοιπους. Οπότε έτσι προκύπτουν οι $n-1$ κύκλοι.
- Ο κύκλος $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow \dots \rightarrow 2^{\lceil \log_2 n \rceil} \rightarrow 1$ είναι κύκλος μέγιστου μήκους, και άρα $c(n,k) = 0$ για $k > m = \lceil \log_2 n \rceil + 1$.

Οπότε η (4) γίνεται:

$$q_n(x) = x^n + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} c(n,k) x^{n-k}$$

$$q_n(x) = x^n + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} c(n,k) x^{-k} x^n$$

$$q_n(x) = x^n + x^n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} c(n,k) x^{-k}$$

$$q_n(x) = x^n + x^{n-m} x^m \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} c(n,k) x^{-k}$$

$$q_n(x) = x^{n-m} x^m + x^{n-m} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} c(n,k) x^{m-k}$$

$$q_n(x) = x^{n-m} \left(x^m + \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} c(n,k) x^{m-k} \right)$$

$$\text{άρα πλέον έχουμε } q_n(x) = x^{n-m} \left(x^m + \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} c(n,k) x^{m-k} \right) \quad (1.2.5)$$

Είναι πλέον προφανές από την πιο πάνω παραγοντοποίηση ότι το 0 είναι ρίζα του q_n πολλαπλότητας $n-m$. Άρα από την (1.2.5), συμπεραίνουμε άμεσα ότι το 1 θα είναι ιδιοτιμή του A_n αλγεβρικής πολλαπλότητας $n-m$. Βλέπουμε λοιπόν, ότι όλες, εκτός από $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ ιδιοτιμές του A_n , είναι 1. Αφού οι $n-m$ ιδιοτιμές είναι 1, οι υπόλοιπες m , θα προκύπτουν από τον άλλο παράγοντα της (1.2.5).

Κοιτώντας λοιπόν πάλι την (1.2.5), έστω

$$r_n(x) = x^m + \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} c(n,k) x^{m-k} \quad (1.2.6)$$

Οι υπόλοιπες ιδιοτιμές που ψάχνω, θα βγούν από τις ρίζες του r_n , και πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με την (1.2.3), θα είναι 1-ρίζες του r_n .

Από τις (1.2.1), (1.2.2), (1.2.4), έχουμε

$$p_n(0) = \det(A_n - 0I_n) = \det A_n$$

$$p_n(0) = q_n(1)$$

$$q_n(1) = 1 + \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} c(n, k)$$

Άρα $\det A_n = p_n(0) = q_n(1) = 1 + \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} c(n, k)$. Ακόμα,

$$\begin{aligned} \det A_n &= 1 + \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} c(n, k) = 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ περιττός}}}^m c(n, k) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ άρτιος}}}^m c(n, k) = \\ &= 1 + \#(\text{περιττοί κύκλοι του } G_n) - \#(\text{άρτιοι κύκλοι του } G_n) \end{aligned}$$

Έστω τώρα $\overline{G_n}$, το γράφημα που προκύπτει από το G_n , αν του προσθέσουμε ένα self-loop στον κόμβο 1.

Οπότε οι άρτιοι κύκλοι στο $\overline{G_n}$ και στο G_n θα είναι ίδιοι, ενώ οι περιττοί στο $\overline{G_n}$ θα είναι ένας παραπάνω από όσους έχει το G_n . Οπότε

$$\begin{aligned} \det A_n &= 1 + \#(\text{περιττοί κύκλοι του } G_n) - \#(\text{άρτιοι κύκλοι του } G_n) = \\ &= \#(\text{περιττοί κύκλοι του } \overline{G_n}) - \#(\text{άρτιοι κύκλοι του } \overline{G_n}) \end{aligned}$$

άρα, αποδείξαμε πρακτικά ότι ισοδύναμος με την υπόθεση Riemann (με τη βοήθεια της (1.1.2)), είναι ο ισχυρισμός ότι: (1.2.7)

$$\left| \#(\text{περιττοί κύκλοι του } \overline{G_n}) - \#(\text{άρτιοι κύκλοι του } \overline{G_n}) \right| = O\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \quad \forall \varepsilon > 0$$

1.3 Η φασματική ακτίνα του A_n

Θα ασχοληθούμε με την εύρεση ενός ακριβούς άνω και ενός ακριβούς κάτω φράγματος για το $\rho(A_n)$, τη φασματική ακτίνα δηλαδή του A_n , συναρτήσει του n .

Από τη θεωρία Perron-Frobenius για μη αρνητικούς πίνακες, ξέρουμε ότι $\rho(A_n)$ είναι ιδιοτιμή του A_n .

Και αφού η φασματική ακτίνα είναι η μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή, η $\rho(A_n)$ θα αντιστοιχεί σύμφωνα με τις (1.2.3), (1.2.5), (1.2.6) στην πιο αρνητική ιδιοτιμή του $r_n(x)$.

$$\text{Έστω } f_n(x) = (-1)^m r_n(-x) \quad (1.3.1)$$

Τότε, σύμφωνα με την (1.2.6), αυτή γίνεται:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (-1)^m r_n(-x) = (-1)^m \left((-x)^m + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} c(n,k) (-x)^{m-k} \right) = \\ &= (-1)^m (-x)^m + (-1)^m \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} c(n,k) (-x)^{m-k} = \\ &= x^m + \sum_{k=1}^n (-1)^m (-1)^{k-1} c(n,k) (-x)^{m-k} = \\ &= x^m + \sum_{k=1}^n (-1)^m (-1)^{k-1} c(n,k) (-1)^{m-k} x^{m-k} = \\ &= x^m + \sum_{k=1}^n (-1)^{m+k-1+m-k} c(n,k) x^{m-k} = x^m + \sum_{k=1}^n (-1)^{2m-1} c(n,k) x^{m-k} = \\ &= x^m + \sum_{k=1}^n (-1)^{2m} (-1)^{-1} c(n,k) x^{m-k} = x^m - \sum_{k=1}^n (-1)^{2m} c(n,k) x^{m-k} = \\ &= x^m - \sum_{k=1}^n c(n,k) x^{m-k} \end{aligned}$$

$$\text{άρα} \quad f_n(x) = x^m - \sum_{k=1}^n c(n,k) x^{m-k} \quad (1.3.2)$$

Σύμφωνα με το νόμο προσήμων του Descartes, επειδή στον τύπο του $f_n(x)$, που είναι πολυώνυμο μίας μεταβλητής με πραγματικούς

συντελεστές και γραμμένο κατά φθίνουσα σειρά δυνάμεων, έχουμε μόνο μία αλλαγή προσήμων, θα έχουμε ακριβώς μία θετική ρίζα, την οποία και ονομάζουμε x_n .

Τότε, από την (1.3.1), η $-x_n$, θα είναι ρίζα του $r_n(x)$, και σύμφωνα με το σχόλιο κάτω από την (1.2.6), το $1 - (-x_n) = 1 + x_n$, θα είναι ιδιοτιμή του A_n

Άρα, σύμφωνα με όσα είπαμε για τη φασματική ακτίνα μέχρι τώρα, $\rho(A_n) = 1 + x_n$. (1.3.3)

Αφού x_n ρίζα της $f_n(x)$, έχουμε από την (1.3.2), ότι

$$x_n^m - \sum_{k=1}^n c(n, k) x_n^{m-k} = 0, \text{ η οποία γίνεται}$$

$$\begin{aligned} x_n^m - \sum_{k=1}^n c(n, k) x_n^{m-k} = 0 &\stackrel{\text{διαιρώ με } x_n^{m-2}}{\Rightarrow} x_n^{m-m+2} = \sum_{k=1}^n c(n, k) x_n^{m-k-m+2} \Rightarrow \\ x_n^2 = \sum_{k=1}^n c(n, k) x_n^{2-k} &\Rightarrow x_n^2 = c(n, 1) x_n^{2-1} + c(n, 2) x_n^{2-2} + \sum_{k=3}^n c(n, k) x_n^{2-k} \stackrel{c(n,1)=0}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{c(n,2=n-1)}{\Rightarrow} \\ x_n^2 &= n - 1 + \sum_{k=3}^n c(n, k) x_n^{2-k}. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Θα δείξουμε τώρα, ότι $x_n \approx \sqrt{n}$, για κάθε n , αποτέλεσμα που θεωρείται εικασία του Helaman Ferguson.

Το πρώτο μισό, είναι άμεσο από τα προηγούμενα, αφού $\sum_{k=3}^n c(n, k) x_n^{2-k} \geq 0$

ως άθροισμα θετικών γινομένων, αφού το $c(n, k)$ είναι αριθμός κύκλων

και x_n θετική ρίζα και $x_n^2 = n - 1 + \sum_{k=3}^n c(n, k) x_n^{2-k} \geq n - 1$, δηλ

$$x_n^2 \geq n - 1 \Rightarrow x_n = \sqrt{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.3.5)$$

Το άνω φράγμα, έρχεται από τις επόμενες εκτιμήσεις για τα $c(n, k)$.

Θεώρημα 1.3.1

Έστω, $c(n, k)$, όπως ορίστηκε στην παράγραφο 1.2, για $k=3,4,\dots,m$. Τότε

$$c(n, k) < n \frac{(\ln n)^{k-2}}{(k-2)!}, \quad k = 3, 4, \dots, m \quad (1.3.6)$$

Σχόλιο: οι εκτιμήσεις αντιστοιχούν στους κύριους όρους στον ασυμπτωτικό τύπο για τα $\sum_{n \leq x} d_k(n)$, όπου $d_k(n)$ είναι ο αριθμός των τρόπων, με τους οποίους μπορεί να γραφεί το n ως γινόμενο παραγόντων

Οι καλύτερες εκτιμήσεις για αυτές τις ποσότητες, οφείλονται στον Kolesnik

Απόδειξη: η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο k

Για $k=3$, μετρώντας τους 3-κύκλους ξεκινώντας με την πλευρά $1 \rightarrow k$ έχουμε:

$$c(n, 3) = \sum_{1 < k < n} \left(\left[\frac{n}{k} \right] - 1 \right) < n \log n \left(= n \frac{(\ln n)^{3-2}}{(3-2)!} \right)$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για k , δηλαδή ότι $c(n, k) < n \frac{(\ln n)^{k-2}}{(k-2)!}$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $k+1$

$$\begin{aligned} c(n, k+1) &= \sum_{w=2^{k-1}}^n \{c(w, k) - c(w-1, k)\} \left(\left[\frac{n}{w} \right] - 1 \right)^{c(2^{k-1}, k)=0} \leq \sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} c(w, k) \left(\frac{n}{w} - \frac{n}{w+1} \right) = \\ &= \sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} c(w, k) \frac{nw + n - nw}{w(w+1)} = \sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} c(w, k) \frac{n}{w(w+1)} = n \sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} c(w, k) \frac{1}{w(w+1)} \stackrel{\text{επαγωγική}}{\leq} \\ &\leq n \sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} \frac{w(\ln w)^{k-2}}{w(w+1)(k-2)!} = n \sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} \frac{(\ln w)^{k-2}}{(w+1)(k-2)!} = \frac{n}{(k-2)!} \sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} \frac{(\ln w)^{k-2}}{w+1} \stackrel{\frac{1}{w+1} \leq \frac{1}{w}}{\leq} \\ &\leq \frac{n}{(k-2)!} \sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} \frac{(\ln w)^{k-2}}{w} \end{aligned}$$

για $k=3$, το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης γίνεται $n \sum_{w=4}^{n-1} \frac{\ln w}{w}$.

Αλλά για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln w}{w}$, έχουμε ότι $f'(x) = \frac{(\ln w)'w - w'\ln w}{w^2} = \frac{1 - \ln w}{w^2} = \frac{\ln e - \ln w}{w^2}$ $\overset{\substack{\ln x \nearrow \\ w > e \Leftrightarrow \\ \ln w > \ln e}}{<} 0$, δηλαδή είναι φθίνουσα στο διάστημα $(3, n-1)$. Άρα

$$c(n, 3+1) = c(n, 4) < n \int_3^{n-1} \frac{\ln w}{w} dw = n \left[\frac{\ln^2 w}{2} \right]_3^{n-1} = n \left(\frac{\ln^2(n-1)}{2} - \frac{\ln^2 3}{2} \right) < n \frac{\ln^2(n-1)}{2} \overset{\substack{\ln n \nearrow \\ n-1 < n \\ \ln(n-1) < \ln n}}{<} n \frac{\ln^2 n}{2}$$

Γενικά, για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{(\ln w)^{k-2}}{w}$, έχουμε ότι

$g'(x) = (\ln w)^{k-2} \frac{(k-2) \frac{1}{w} - 1}{w^2}$, το οποίο μηδενίζεται όταν $w = e^{k-2}$, όπου και έχουμε μέγιστο στο διάστημα $[2^{k-1}, n-1]$. Σε αυτή την περίπτωση

$$\sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} \frac{(\ln w)^{k-2}}{w} < \int_{2^{k-1}}^{n-1} \frac{(\ln w)^{k-2}}{w} dw + \frac{(k-2)^{k-2}}{e^{k-2}}. \text{ Όμως, για } k \geq 4,$$

$$\int_1^{2^{k-1}} \frac{(\ln w)^{k-2}}{w} dw = \left[\frac{(\ln w)^{k-1}}{k-1} \right]_1^{2^{k-1}} = \frac{(k-1)^{k-1} (\ln 2)^{k-1}}{k-1} = (k-1)^{k-2} > \frac{(k-1)^{k-2}}{e^{k-2}}$$

Άρα, συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισώσεις, παίρνουμε:

$$c(n, k+1) < \frac{n}{(k-2)!} \sum_{w=2^{k-1}}^{n-1} \frac{(\ln w)^{k-2}}{w} < \frac{n}{(k-2)!} \int_1^{n-1} \frac{(\ln w)^{k-2}}{w} dw =$$

$$= \frac{n}{(k-2)!} \left[\frac{(\ln w)^{k-1}}{k-1} \right]_1^{n-1} = \frac{n}{(k-2)!} \frac{(\ln(n-1))^{k-1}}{k-1} \overset{\substack{\ln n \nearrow \\ n-1 < n \\ \ln(n-1) < \ln n \\ (\ln(n-1))^{k-1} < (\ln n)^{k-1}}}{<} \frac{n}{(k-2)!} \frac{(\ln n)^{k-1}}{k-1} <$$

$$< n \frac{(\ln n)^{k-1}}{k-1}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Από τις (1.3.5) και (1.3.6) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^m c(n,k) x_n^{2-k} &< \sum_{k=3}^m n \frac{(\ln n)^{k-2}}{(k-2)! x_n^{k-2}} \stackrel{\substack{x_n \geq \sqrt{n-1} \\ \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{\sqrt{n-1}}}}{\leq \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)^{k-2}} \sum_{k=3}^m n \frac{(\ln n)^{k-2}}{(k-2)! (\sqrt{n-1})^{k-2}} \stackrel{\theta \acute{\epsilon} \tau \omega}{=} \sum_{j=k-2}^m \\ &= n \sum_{j=1}^{m-2} \frac{1}{j!} \left(\frac{\ln n}{\sqrt{n-1}}\right)^j < n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{\ln n}{\sqrt{n-1}}\right)^j \stackrel{\text{Taylor}}{=} e^{\frac{\ln n}{\sqrt{n-1}}} - 1 = n \left(\exp\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n-1}}\right) - 1 \right) = n \left(n^{\frac{1}{\sqrt{n-1}}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό στην (1.3.4), παίρνουμε

$$x_n^2 = n - 1 + \sum_{k=3}^n c(n,k) x_n^{2-k} < n - 1 + n \left(n^{\frac{1}{\sqrt{n-1}}} - 1 \right) = n - 1 + n^{1+\frac{1}{\sqrt{n-1}}} - n = n^{1+\frac{1}{\sqrt{n-1}}} - 1$$

και συνδυάζοντας με την (1.3.5), έχουμε ότι

$$n - 1 \leq x_n^2 < n^{1+\frac{1}{\sqrt{n-1}}} - 1 \Leftrightarrow \frac{n-1}{n} \leq \frac{x_n^2}{n} < \frac{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n-1}}}}{n} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n} \leq \frac{x_n^2}{n} < n^{\frac{1}{\sqrt{n-1}}} \quad \text{για } n=1,2,3,\dots \quad (1.3.7)$$

Από αυτή, προκύπτει από κριτήριο παρεμβολής, ότι: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 1$, και άρα, από την (1.3.3) έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(A_n)}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + x_n}{\sqrt{n}} = 1. \quad (1.3.8)$$

Η (1.3.7) δίνει πιο συγκεκριμένα το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 1.3.2

Έστω A_n όπως έχει οριστεί παραπάνω. Τότε

$$\sqrt{n} < 1 + \sqrt{n-1} \leq \rho(A_n) < \sqrt{n} + O(\ln n).$$

Επίσης, με μία πιο προσεκτική ανάλυση, μπορεί να αποδειχθεί ότι ασυμπτωτικά

$$\rho(A_n) = \sqrt{n} + \ln \sqrt{n} + O(1). \quad (1.3.9)$$

Βασιζόμενος κάποιος στις πρώτες τιμές του n , θα μπορούσε να εικάσει ότι $|\det A_n| < \rho(A_n)$.

Όμως, οι Odlyzko και te Riele, στην απόδειξή τους για τη μη εγκυρότητα της εικασίας Mertens, απέδειξαν, ότι $M(n) > 1.06\sqrt{n} \Rightarrow \det A_n > 1.06\sqrt{n}$ σχεδόν πάντα, υπονοώντας και ότι $\limsup \frac{\det A_n}{\sqrt{n}} \geq 1.06$.

Άρα αυτή η εικασία αντιβαίνει στην (1.3.8), και συνεπώς δεν μπορούμε να βασιστούμε στις πρώτες τιμές του n για κάποιο συμπέρασμα σχετικά με τη $\rho(A_n)$.

Επειδή τώρα $|\det A_n| > 1.06\sqrt{n} = O\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$, αν ισχύει η υπόθεση Riemann, θα πρέπει το γινόμενο των υπόλοιπων ιδιοτιμών του A_n να είναι $O(n^\varepsilon)$, ώστε να ισχύει η (1.1.2).

Κεφάλαιο 2

Αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ότι καθώς $n \rightarrow \infty$, $\rho(A_n) \rightarrow \sqrt{n}$. Εδώ θα ασχοληθούμε με μία εικασία για μία πραγματική αρνητική ιδιοτιμή, μέτρου $-\sqrt{n}$ του πίνακα A_n , καθώς και με τις υπόλοιπες ιδιοτιμές εκτός αυτής της αρνητικής και της φασματικής ακτίνας, μέτρου $O\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)$.

2.1 Το πολυώνυμο $g_n(x)$

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα χρησιμοποιήσουμε για ευκολία, το συμβολισμό $v_{nk} = c(n, k+1)$, όπου το $c(n, k+1)$ έχει οριστεί στην παράγραφο 1.2.

Έστω $f_n(x) = x^{s+1} - \sum_{k=1}^s v_{nk} x^{s-k}$. Αυτό προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε στην (1.3.2) τις σχέσεις

$$\left. \begin{array}{l} s = \log_2 n \\ m = \log_2 n + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow s = m + 1 \text{ και } v_{nk} = c(n, k+1).$$

Όπως έχουμε δει μέχρι τώρα, οι συντελεστές στο άθροισμα στο πολυώνυμο $f_n(x)$, θα είναι

$$\begin{aligned} v_{n1} &= n - 1 \\ v_{n2} &= \sum_{k=2}^s \left(\left[\frac{n}{k} \right] - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

και όπως αποδείξαμε στο θεώρημα 1.3.1, όλοι οι υπόλοιποι συντελεστές, είναι θετικοί, και άνω φραγμένοι από

$$v_{nk} < n \frac{(\ln n)^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (2.1.2)$$

Άρα, αν το r είναι ρίζα του $f_n(x)$, τότε το $r+1$ είναι ιδιοτιμή του A_n , και όλες οι ιδιοτιμές λ του A_n που δεν ικανοποιούν την $f_n(\lambda-1)=0$, είναι ταυτοτικά ίσες με 1.

Θεωρούμε τώρα το πολυώνυμο $g_n(x) = \frac{f_n(x)}{x-x_n}$.

Αφού διαιρώ πολυώνυμο $s+1$ βαθμού, με πολυώνυμο πρώτου βαθμού, με συντελεστή 1 στους μεγιστοβάθμιους όρους, θα προκύψει πολυώνυμο s βαθμού, με συντελεστή 1 στο μεγιστοβάθμιο όρο

$$g_n(x) = \frac{f_n(x)}{x-x_n} = x^s + a_{n1}x^{s-1} + a_{n2}x^{s-2} + \dots + a_{ns} \quad (2.1.3)$$

(εδώ και πάλι $s = \lceil \log_2 n \rceil$).

Δουλεύοντας με σχήμα Horner, βρίσκουμε τους πρώτους συντελεστές του πολυωνύμου $g_n(x)$:

1	0	$-v_{n1}$	$-v_{n2}$	\dots	x_n
	x_n	x_n^2	$x_n^3 - x_n v_{n1}$	\dots	
1	x_n	$x_n^2 - v_{n1}$	$x_n^3 - x_n v_{n1} - v_{n2}$	\dots	

και άρα από τη (2.1.3), παίρνουμε για τους συντελεστές του $g_n(x)$, ότι

$$\begin{aligned} a_{n1} &= x_n \\ a_{n2} &= x_n^2 - v_{n1} \\ a_{n3} &= x_n^3 - x_n v_{n1} - v_{n2} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Προσπαθώντας να βρούμε ένα γενικό εύχρηστο τύπο για τους συντελεστές του πολυωνύμου $g_n(x)$, ξανακάνουμε Horner

$$\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & -v_{n1} & -v_{n2} & -v_{n3} & -v_{n4} & \cdots & -v_{n2} & x_n \\
& x_n & x_n^2 & x_n a_{n2} & x_n a_{n3} & x_n a_{n4} & \cdots & x_n a_{ns-1} & \\
\hline
1 & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \cdots & a_{ns} &
\end{array}$$

και άρα

$$\begin{aligned}
a_{n1} &= x_n \\
a_{n2} &= x_n^2 - v_{n1} \\
a_{n3} &= x_n a_{n2} - v_{n2} \\
a_{n4} &= x_n a_{n3} - v_{n3} \\
a_{n5} &= x_n a_{n4} - v_{n4} \\
&\dots \\
a_{ns} &= x_n a_{ns-1} - v_{ns-1}
\end{aligned}$$

δηλαδή στη γενική περίπτωση $a_{nk} = x_n a_{nk-1} - v_{nk-1}$, το οποίο δίνει:

$$\begin{aligned}
a_{nk} &= x_n a_{nk-1} - v_{nk-1} \\
x_n a_{nk-1} &= a_{nk} + v_{nk-1} \\
a_{nk-1} &= \frac{1}{x_n} (a_{nk} + v_{nk-1})
\end{aligned}$$

στο οποίο αν θέσουμε $k = s - k + 1$, παίρνουμε:

$$a_{ns-k} = \frac{1}{x_n} (a_{ns-k+1} + v_{ns-k}) > 0, \quad 0 < k < 1 \quad (2.1.5)$$

ενώ αν θέσουμε $k - 1 = s$, παίρνουμε τον τελευταίο όρο:

$$\begin{aligned}
a_{ns} &= \frac{1}{x_n} (a_{ns+1} + v_{ns}) \\
a_{ns} &= \frac{a_{ns+1}}{x_n} + \frac{v_{ns}}{x_n}
\end{aligned}$$

το $g_n(x)$ όμως, εξηγήσαμε ότι είναι ακριβώς s βαθμού, οπότε $a_{ns+1} = 0$,
άρα

$$a_{ns} = \frac{v_{ns}}{x_n} > 0 \quad (2.1.6)$$

που είναι προφανώς θετικό, αφού v_{ns} είναι αριθμός κύκλων, και x_n η θετική ρίζα της παραγράφου 1.3. και αφού ο (2.1.5) προκύπτει αναδρομικά και από τον (2.1.6), και το αποτέλεσμα της (2.1.5) θα είναι θετικό.

Το επόμενο θεώρημα, δίνει ένα άνω ασυμπτωτικό φράγμα για τους συντελεστές a_{nk} .

Θεώρημα 2.1.1

Αν $a_n = \max_{1 \leq k \leq s} \{a_{nk}\}$, τότε $0 < a_n = O(x_n^w \ln n)$, όπου $w = 1 + \frac{2}{\ln 2} < 3.8854$.

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή.

Αρχικά, κατανοώντας τον ορισμό του v_{nk} , που είναι πρακτικά τα $c(n, k+1)$ που έχουμε ορίσει στο κεφάλαιο 1, προκύπτει ότι $v_{ns} \leq s+1 \leq \log_2 n + 1$.

Η ανίσωση αυτή προκύπτει φτιάχνοντας k -λίστες από συνεχόμενους διαιρέτες, $1, l_1, l_2, \dots, l_s$, μήκους $s+1$, δηλαδή $l_i \mid l_{i+1}$, $l_i < l_{i+1}$ και $l_s \leq n$.

Κάθε τέτοια λίστα, αντιστοιχεί σε έναν ξεχωριστό κύκλο μήκους $s+1$ του γραφήματος G του Κεφαλαίου 1.

ο αριθμός αυτών των κύκλων, είναι ο συντελεστής v_{ns}

η λίστα μήκους $k+1$ με τη μικρότερη τιμή l_s , είναι η $1, 2, 4, \dots, 2^s$

και επειδή $s = \log_2 n$, έχουμε τη ζητούμενη ανίσωση.

$$\text{Άρα } a_{ns} = \frac{v_{ns}}{x_n} \leq \frac{\log_2 n + 1}{x_n} = \frac{\log_2 n + 1}{\sqrt{n} + \ln \sqrt{n} + O(1)} = O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right) = O(x_n^w \ln n).$$

Ακόμα, από τη (2.1.4), έχουμε ότι $a_{nj} = O(x_n^w \ln n)$ για $1 \leq j \leq 3$.

Τώρα, για $0 \leq m < k \leq s-4$, έχουμε από υπόθεση $a_{ns-m} = O(x_n^w \ln n)$ και

$$a_{ns-k} = \frac{1}{x_n} (a_{ns-k+1} + v_{ns-k}) \text{ (από (2.1.5)) άρα}$$

$$a_{ns-k} = \frac{1}{x_n} (a_{ns-k+1} + v_{ns-k}) = \frac{a_{ns-k+1}}{x_n} + \frac{v_{ns-k}}{x_n} = \frac{O(x_n^w \ln n)}{x_n} + \frac{v_{ns-k}}{x_n} = O\left(\frac{x_n^w \ln n}{x_n}\right) + \frac{v_{ns-k}}{x_n}$$

Από τη (2.1.2) παίρνουμε

$$\frac{v_{ns-k}}{x_n} \stackrel{(2.1.2)}{\leq} n \frac{(\ln n)^{s-k+1}}{x_n (s-k+1)!} \stackrel{s=\lceil \log_2 n \rceil}{=} \frac{n}{x_n} \frac{(\ln n)^{\lceil \log_2 n \rceil - k + 1}}{([\log_2 n] - k + 1)!}.$$

Έστω τώρα $z+1 = \log_2 n - k - 1 \Leftrightarrow \log_2 n = z+k+2 \Leftrightarrow n = 2^{z+k+2}$ και $2 \leq z \leq \log_2 n + 3$.

Ακόμα, ο τύπος του Stirling μας δίνει $n! \geq n^n e^{1-n} \sqrt{\frac{n}{2}}$, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{v_{ns-k}}{x_n} &\leq \frac{n}{x_n} \frac{(\ln n)^{\lceil \log_2 n \rceil - k + 1}}{([\log_2 n] - k + 1)!} \stackrel{\substack{\log_2 n - k - 1 = z + 1 \\ [\log_2 n] - k - 1 = [z] + 1}}{=} \frac{n}{x_n} \frac{(\ln n)^{[z] + 1}}{([z] + 1)!} \stackrel{\text{Stirling και}}{\leq} \frac{n}{x_n} \frac{(\ln n)^{[z] + 1}}{[z + 1]!} \\ &\leq \frac{n}{x_n} \frac{(\ln n)^{[z] + 1}}{[z + 1]^{[z + 1]} e^{1 - [z + 1]} \sqrt{\frac{[z + 1]}{2}}} \leq \frac{n}{x_n} \frac{(\ln n)^{z + 1}}{z^z e^{-z} \sqrt{\frac{z}{2}}} \leq \frac{n \ln n}{x_n} \left(\frac{e \ln n}{z}\right)^z \stackrel{n = 2^{z+k+2} \Leftrightarrow \ln n = (z+2+k) \ln 2}{=} \\ &= \frac{n \ln n}{x_n} \left(\frac{e(z+2+k) \ln 2}{z}\right)^z = \frac{n \ln n}{x_n} (e \ln 2)^z \left(\frac{z+2+k}{z}\right)^z = \\ &= \frac{n \ln n}{x_n} (e \ln 2)^z \left(1 + \frac{2+k}{z}\right)^z \stackrel{\varphi(n) = (e \ln 2)^z}{=} \frac{n \ln n}{x_n} \varphi(n) \left(1 + \frac{2+k}{z}\right)^z \stackrel{(*)}{\leq} \frac{n \ln n}{x_n} \varphi(n) e^{k+2} \end{aligned}$$

όπου η τελευταία (*) ανίσωση, ισχύει, αφού

$$\left(1 + \frac{2+k}{z}\right)^z \leq e^{k+2} \Rightarrow z \ln \left(1 + \frac{2+k}{z}\right) \leq k+2 \Rightarrow z \ln \frac{2+k}{z} \leq k+2 \Rightarrow \ln \frac{2+k}{z} \leq \frac{k+2}{z}$$

όπου η τελευταία ισχύει από ιδιότητες λογαρίθμων, και όπως ορίστηκε και

$$\text{παραπάνω, } \varphi(n) = (e \ln 2)^z \stackrel{z = \log_2 n - k - 1}{=} (e \ln 2)^{\log_2 n - k - 1}.$$

Αλλά

$$\begin{aligned}
\ln \varphi(n) &= \ln(e \ln 2)^{\log_2 n - k - 1} = (\log_2 n - k - 1) \log(e \ln 2) = \\
&= (\log_2 n - k - 1)(\ln e + \ln \ln 2) = (\log_2 n - k - 1)(1 + \ln \ln 2) = \\
&= (1 + \ln \ln 2) \log_2 n - (k + 2)(1 + \ln \ln 2) = \\
&= (1 + \ln \ln 2) \frac{\ln n}{\ln 2} - (k + 2)(1 + \ln \ln 2) = \frac{1 + \ln \ln 2}{\ln 2} \ln n - (k + 2)(1 + \ln \ln 2)
\end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned}
\ln \varphi(n) &= \frac{1 + \ln \ln 2}{\ln 2} \ln n - (k + 2)(1 + \ln \ln 2) \Leftrightarrow \\
\ln \varphi(n) &= (\ln n)^{\frac{1 + \ln \ln 2}{\ln 2}} - (k + 2)(1 + \ln \ln 2) \Leftrightarrow \\
\ln \varphi(n) - (\ln n)^{\frac{1 + \ln \ln 2}{\ln 2}} &= -(k + 2)(1 + \ln \ln 2) \Leftrightarrow \\
\ln \frac{\varphi(n)}{n^{\frac{1 + \ln \ln 2}{\ln 2}}} &= -(k + 2)(1 + \ln \ln 2) \Leftrightarrow \frac{\varphi(n)}{n^{\frac{1 + \ln \ln 2}{\ln 2}}} = e^{-(k + 2)(1 + \ln \ln 2)} \Leftrightarrow \\
\varphi(n) &= \frac{n^{\frac{1 + \ln \ln 2}{\ln 2}}}{e^{(k + 2)(1 + \ln \ln 2)}}
\end{aligned}$$

που τελικά δίνει ότι

$$\begin{aligned}
\frac{v_{ns-k}}{x_n} &\leq \frac{n \ln n}{x_n} \varphi(n) e^{k+2} \leq \frac{n \ln n}{x_n} e^{k+2} \frac{n^{\frac{1 + \ln \ln 2}{\ln 2}}}{e^{(k+2)(1 + \ln \ln 2)}} = \\
&= \frac{n \ln n}{x_n} n^{\frac{1 + \ln \ln 2}{\ln 2}} e^{k+2 - (k+2)(1 + \ln \ln 2)} = \frac{n \ln n}{x_n} n^{\frac{1 + \ln \ln 2}{\ln 2}} e^{(k+2)(-\ln \ln 2)}
\end{aligned}$$

$$\text{Έστω τώρα } y(k) = e^{(k+2)(-\ln \ln 2)} \Leftrightarrow \ln y(k) = (k + 2)(-\ln \ln 2) \quad (1)$$

$$\text{έχουμε πάρει } 0 < k < s \Rightarrow 0 < k + 2 \quad (2)$$

$$\text{ακόμα } k \leq s - 4 \Leftrightarrow k + 2 \leq s - 2 \quad (3)$$

$$\text{και } v_{ns} \leq s + 1 \leq \log_2 n + 1 \Rightarrow s - 2 \leq \log_2 n - 2 < \log_2 n \quad (4)$$

και από τις (2),(3),(4) έχουμε ότι $0 < k + 2 \leq s - 2 < \log_2 n$

οπότε η (1) γίνεται

$$\begin{aligned}
\ln y(k) &= (k+2)(-\ln \ln 2) \Leftrightarrow \ln y(k) < (-\ln \ln 2) \log_2 n \Leftrightarrow \\
\ln y(k) &< \frac{\ln n}{\ln 2} (-\ln \ln 2) \Leftrightarrow \ln y(k) < -\frac{\ln \ln 2}{\ln 2} \ln n \Leftrightarrow \\
\ln y(k) &< (\ln n)^{-\frac{\ln \ln 2}{\ln 2}} \Leftrightarrow y(k) < n^{\frac{\ln \ln 2}{\ln 2}}
\end{aligned}$$

Από αυτά τα αποτελέσματα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{v_{ns-k}}{x_n} &\leq \frac{n \ln n}{x_n} n^{\frac{1+\ln \ln 2}{\ln 2}} e^{(k+2)(-\ln \ln 2)} = \frac{n \ln n}{x_n} n^{\frac{1+\ln \ln 2}{\ln 2}} y(k) < \\
&< \frac{n \ln n}{x_n} n^{\frac{1+\ln \ln 2}{\ln 2}} n^{-\frac{\ln \ln 2}{\ln 2}} = \frac{n \ln n}{x_n} n^{\frac{1}{\ln 2}} = O\left(x_n^{1+\frac{2}{\ln 2}}\right) \ln n
\end{aligned}$$

και άρα $a_{ns-k} = O\left(x_n^{1+\frac{2}{\ln 2}}\right) \ln n$. ■

2.2 Οι ρίζες του $g_n(x)$

Θα ασχοληθούμε τώρα με την εικασία που αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου, δείχνοντας ότι το $g_n(x)$ έχει μία αρνητική πραγματική ρίζα μέτρου $-\sqrt{n}$. Το επόμενο θεώρημα, εγγυάται ότι αυτό συμβαίνει πάντα, και ότι όλες οι υπόλοιπες ρίζες έχουν μέτρο $\leq \frac{x_n}{\ln n}$.

Θεώρημα 2.2.1

Για μεγάλα n , το $g_n(x)$ έχει μία πραγματική ρίζα y_n , τέτοια ώστε $-x_n < y_n \leq -x_n + O(\ln^5 n x_n^{w-3})$, όπου $w = 1 + \frac{2}{\ln n}$.

Ακόμα, όλες οι υπόλοιπες ρίζες του $g_n(x)$, περιέχονται στο δίσκο

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{x_n}{\ln n} \right\}.$$

Απόδειξη: Η απόδειξη βασίζεται στο disc theorem του Gershgorin.

Αρχικά θεωρούμε το συνοδό πίνακα $C_{g_n(x)}$ του $g_n(x)$, ο οποίος είναι ο $S \times S$ πίνακας

$$C_{g_n(x)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{ns} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{ns-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{ns-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{ns-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n1} \end{bmatrix}$$

τώρα παρεμβάλουμε τον $C_{g_n(x)}$ ανάμεσα στον $P = \text{diag}[p_1, p_2, \dots, p_s]$, όπου $p_i > 0$ αυθαίρετες θετικές παράμετροι και τον αντίστροφό του, για να

ασκοληθούμε με τον όμοιο πίνακα του $C_{g_n(x)}$, αφού έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με αυτόν

$$\begin{aligned}
 & P^{-1}C_{g_n(x)}P \stackrel{P=\text{diag}[p_1, p_2, \dots, p_s]}{=} \stackrel{P^{-1}=\text{diag}\left[\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \dots, \frac{1}{p_s}\right]}{=} \\
 & = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{p_3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p_4} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{p_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{ns} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{ns-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{ns-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{ns-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_s \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{ns} \frac{1}{p_1} \\ \frac{1}{p_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{ns-1} \frac{1}{p_2} \\ 0 & \frac{1}{p_3} & 0 & \dots & 0 & -a_{ns-2} \frac{1}{p_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{p_4} & \dots & 0 & -a_{ns-3} \frac{1}{p_4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{p_s} & -a_{n1} \frac{1}{p_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_s \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{ns} \frac{p_2}{p_1} \\ \frac{p_1}{p_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{ns-1} \frac{p_1}{p_2} \\ 0 & \frac{p_2}{p_3} & 0 & \dots & 0 & -a_{ns-2} \frac{p_2}{p_3} \\ 0 & 0 & \frac{p_3}{p_4} & \dots & 0 & -a_{ns-3} \frac{p_3}{p_4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_{s-1}}{p_s} & -a_{n1} \frac{p_s}{p_s} \end{bmatrix} \stackrel{(2.1.4)}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{ns} \frac{p_2}{p_1} \\ \frac{p_1}{p_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{ns-1} \frac{p_1}{p_2} \\ 0 & \frac{p_2}{p_3} & 0 & \dots & 0 & -a_{ns-2} \frac{p_2}{p_3} \\ 0 & 0 & \frac{p_3}{p_4} & \dots & 0 & -a_{ns-3} \frac{p_3}{p_4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_{s-1}}{p_s} & -x_n \end{bmatrix} \stackrel{-a_{n1} \frac{p_s}{p_s} = -a_{n1} = -x_n}{=}
 \end{aligned}$$

Ο δίσκος Gershgorin που έχει κέντρο το διαγώνιο στοιχείο της τελευταίας γραμμής, θα έχει σύμφωνα με το θεώρημα Gershgorin ακτίνα ίση με

$$R_s = \left| \frac{p_{s-1}}{p_s} \right| = \frac{p_{s-1}}{p_s}, \text{ αφού τα στοιχεία του } P \text{ είναι θετικά εξ' ορισμού.}$$

Οι υπόλοιποι δίσκοι Gershgorin του πίνακα, είναι αυτοί που έχουν κέντρο τα υπόλοιπα διαγώνια στοιχεία του πίνακα, οπότε έχουν όλοι κέντρο το 0. Μεταφέρω τον δίσκο της τελευταίας γραμμής ώστε να έχει κέντρο το 0 και αυτός, και για να πετύχω να είναι όλοι οι άλλοι δίσκοι ξένοι από αυτόν,

θέλω η ακτίνα των υπολοίπων να είναι κάτω από $x_n - \frac{p_{s-1}}{p_s}$.

Γενικά για τις υπόλοιπες γραμμές, οι δίσκοι Gershgorin έχουν ακτίνες:

$$R_1 = \left| a_{ns} \frac{p_s}{p_1} \right| = a_{ns} \frac{p_s}{p_1}$$

$$R_2 = \frac{p_1}{p_2} + a_{ns-1} \frac{p_s}{p_2}$$

$$R_3 = \frac{p_2}{p_3} + a_{ns-2} \frac{p_s}{p_3}$$

...

$$R_k = \frac{p_{k-1}}{p_k} + a_{ns-k+1} \frac{p_s}{p_k}$$

$$R_{k+1} = \frac{p_k}{p_{k+1}} + a_{ns-k} \frac{p_s}{p_{k+1}}$$

...

Άρα για να είναι ξένοι, πρέπει $R_{k+1} < x_n - \frac{p_{s-1}}{p_s}$.

Διαλέγω τώρα το σύνολο P που χρησιμοποιώ τόση ώρα, έτσι ώστε οι ακτίνες όλων των κύκλων με κέντρο το 0 να είναι ίσες

$$R_1 = R_{k+1}$$

πχ:

$$a_{ns} \frac{p_s}{p_1} = \frac{p_k}{p_{k+1}} + a_{ns-k} \frac{p_s}{p_{k+1}}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, s-2\}$$

Έστω τώρα $t = \frac{p_1}{a_{ns} p_s}$. (2.2.1)

Προκύπτει λοιπόν αμέσως ότι

$$a_{ns} \frac{p_s}{p_1} = \frac{p_k}{p_{k+1}} + a_{ns-k} \frac{p_s}{p_{k+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{t} = \frac{p_k}{p_{k+1}} + a_{ns-k} \frac{p_s}{p_{k+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{t} = \frac{1}{p_{k+1}} (p_k + a_{ns-k} p_s) \Leftrightarrow$$

$$p_{k+1} = t(p_k + a_{ns-k} p_s)$$

και αντικαθιστώντας αναδρομικά όλα τα p_i $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$, παίρνουμε

$$p_{k+1} = t(p_k + a_{ns-k} p_s) = t^k (p_1 + a_{ns-1} p_s) + t^{k-1} a_{ns-2} p_s + t^{k-2} a_{ns-3} p_s + \dots + t a_{ns-k} p_s$$

Έστω τώρα ότι θέτουμε $k+1 = s-1 \Leftrightarrow k = s-2$ στον προηγούμενο τύπο

$$p_{s-1} = t^{s-2} (p_1 + a_{ns-1} p_s) + t^{s-3} a_{ns-2} p_s + t^{s-4} a_{ns-3} p_s + \dots + t a_{ns-s+2} p_s \Leftrightarrow$$

$$p_{s-1} = t^{s-2} p_1 + t^{s-2} a_{ns-1} p_s + t^{s-3} a_{ns-2} p_s + t^{s-4} a_{ns-3} p_s + \dots + t a_{n2} p_s \Leftrightarrow$$

$$\frac{p_{s-1}}{p_s} = \frac{t^{s-2} p_1}{p_s} + \frac{t^{s-2} a_{ns-1} p_s}{p_s} + \frac{t^{s-3} a_{ns-2} p_s}{p_s} + \frac{t^{s-4} a_{ns-3} p_s}{p_s} + \dots + \frac{t a_{n2} p_s}{p_s} \Leftrightarrow$$

$$\frac{p_{s-1}}{p_s} = \frac{t^{s-2} p_1}{p_s} + t^{s-2} a_{ns-1} + t^{s-3} a_{ns-2} + t^{s-4} a_{ns-3} + \dots + t a_{n2} \stackrel{(2.2.1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{p_{s-1}}{p_s} = t^{s-2} t a_{ns} + t^{s-2} a_{ns-1} + t^{s-3} a_{ns-2} + t^{s-4} a_{ns-3} + \dots + t a_{n2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{p_{s-1}}{p_s} = t^{s-1} a_{ns} + t^{s-2} a_{ns-1} + t^{s-3} a_{ns-2} + t^{s-4} a_{ns-3} + \dots + t a_{n2} \quad (2.2.2)$$

Οι δίσκοι λοιπόν, θα είναι ξένοι, αν οι ακτίνες όπως είπαμε είναι κάτω από

$$x_n - \frac{p_{s-1}}{p_s}.$$

Για την πρώτη γραμμή θα έχουμε λοιπόν $R_1 = a_{ns} \frac{p_s}{p_1} \stackrel{(2.2.1)}{=} \frac{1}{t}$,

άρα θέλουμε

$$\frac{1}{t} < x_n - \frac{p_{s-1}}{p_s} \stackrel{(2.2.2)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{t} < x_n - t^{s-1} a_{ns} - t^{s-2} a_{ns-1} - t^{s-3} a_{ns-2} - t^{s-4} a_{ns-3} - \dots - t a_{n2} \stackrel{t>0}{\Leftrightarrow}$$

$$1 < t x_n - t^s a_{ns} - t^{s-1} a_{ns-1} - t^{s-2} a_{ns-2} - t^{s-3} a_{ns-3} - \dots - t^2 a_{n2} \Leftrightarrow$$

$$t^s a_{ns} + t^{s-1} a_{ns-1} + t^{s-2} a_{ns-2} + t^{s-3} a_{ns-3} + \dots + t^2 a_{n2} - t x_n + 1 < 0$$

Με άλλα λόγια, αν θεωρήσουμε

$$T_n(t) = t^s a_{ns} + t^{s-1} a_{ns-1} + t^{s-2} a_{ns-2} + t^{s-3} a_{ns-3} + \dots + t^2 a_{n2} - tx_n + 1$$

τότε οι δίσκοι είναι ξένοι, αν $T_n(t) < 0$ για κάποιο $t > 0$.

Μία επιλογή $t \in (0, 1]$ δίνει

$$\begin{aligned} T_n(t) &= t^s a_{ns} + t^{s-1} a_{ns-1} + t^{s-2} a_{ns-2} + t^{s-3} a_{ns-3} + \dots + t^2 a_{n2} - tx_n + 1 \leq \\ &\leq t^4 \sum_{k=4}^s a_{nk} + t^3 a_{n3} + t^2 a_{n2} - tx_n + 1 \leq \\ &\leq t^4 (\log_2 n - 3) \max_{4 \leq k \leq s} a_{nk} + t^3 a_{n3} + \dots + t^2 a_{n2} - tx_n + 1 \end{aligned}$$

Πιο συγκεκριμένα, για $t = \frac{\ln n}{x_n} \in (0, 1]$ έχουμε:

$$\begin{aligned} T_n(t) &\leq t^4 (\log_2 n - 3) \max_{4 \leq k \leq s} a_{nk} + t^3 a_{n3} + \dots + t^2 a_{n2} - tx_n + 1 \Leftrightarrow \\ T_n(t) &\leq \left(\frac{\ln n}{x_n} \right)^4 (\log_2 n - 3) \max_{4 \leq k \leq s} a_{nk} + \left(\frac{\ln n}{x_n} \right)^3 a_{n3} + \left(\frac{\ln n}{x_n} \right)^2 a_{n2} - \left(\frac{\ln n}{x_n} \right) x_n + 1 \Leftrightarrow \\ T_n(t) &\leq \frac{\ln^4 n}{x_n^4} (\log_2 n - 3) \max_{4 \leq k \leq s} a_{nk} + \frac{\ln^3 n}{x_n^3} a_{n3} + \frac{\ln^2 n}{x_n^2} a_{n2} - \frac{\ln n}{x_n} x_n + 1 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Σημειώνουμε επίσης από τη (2.1.4) ότι

$$\begin{aligned} a_{n2} &= x_n^2 - v_{n1} \stackrel{(2.1.1)}{\Leftrightarrow} a_{n2} = x_n^2 - (n-1) \stackrel{(1.3.9)}{\Leftrightarrow} a_{n2} = \left(\sqrt{n} + \ln \sqrt{n} + O(1) \right)^2 - (n-1) \Leftrightarrow \\ a_{n2} &= n + \ln^2 \sqrt{n} + O^2(1) + 2\sqrt{n} \ln \sqrt{n} + 2\sqrt{n}O(1) + 2O(1) \ln \sqrt{n} - n + 1 \Leftrightarrow \\ a_{n2} &= \ln^2 \sqrt{n} + O^2(1) + 2\sqrt{n} \ln \sqrt{n} + 2\sqrt{n}O(1) + 2O(1) \ln \sqrt{n} + 1 \Leftrightarrow \\ a_{n2} &= \ln^2 \sqrt{n} + O(1) + \sqrt{n} \ln n + 2\sqrt{n}O(1) + O(1) \ln n + 1 \Leftrightarrow \\ a_{n2} &= \ln^2 \sqrt{n} + \sqrt{n} \ln n + O(1) \ln n + O(1) + 2\sqrt{n}O(1) + 1 \Leftrightarrow \\ a_{n2} &= \frac{1}{4} \ln^2 n + \sqrt{n} \ln n + O(1) \ln n + O(\sqrt{n}) \Leftrightarrow \\ a_{n2} &= \sqrt{n} \ln n + O(\sqrt{n}) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

και από το Horner μετά τη (2.1.4) παίρνουμε ακόμα

$$a_{n3} = x_n a_{n2} - v_{n2}. \quad (2.2.5)$$

Για να φράξουμε τώρα το συντελεστή a_{n3} , κάνουμε χρήση του συμπεράσματος που βγήκε πρώτα από τον Andrew Pollington, ότι αν $D(n) = \sum_{k \leq n} d(k)$ και $d(k) = \sum_{j|k} 1$, τότε $v_{n2} = D(n) - 2n + 1$.

Αυτό φαίνεται από τη (2.1.1) που δίνει $v_{n2} = \sum_{k=2}^s \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1 \right)$ και από το γεγονός

ότι $D(n) = \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$. Οπότε

$$\begin{aligned} v_{n2} &= \sum_{k=2}^s \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1 \right) = \sum_{k=2}^s \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - (n-1) = \sum_{k=2}^s \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - n + 1 = \sum_{k=1}^s \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor - n + 1 = \\ &= \sum_{k=1}^s \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - n - n + 1 = D(n) - 2n + 1 \Leftrightarrow \\ &v_{n2} = D(n) - 2n + 1 \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα τώρα 0.1 ισχύει ότι $D(n) = n \ln n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$, όπου $\gamma \approx 0,5772$ η σταθερά Euler, άρα

$$\begin{aligned} v_{n2} &= D(n) - 2n + 1 \Rightarrow v_{n2} = D(n) - 2n + 1 \Rightarrow \\ v_{n2} &= n \ln n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n}) - 2n + 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$v_{n2} = n \ln n + O(\sqrt{n}) \quad (2.2.6)$$

Άρα η (2.2.5) γίνεται

$$\begin{aligned} a_{n3} &= x_n a_{n2} - v_{n2} \stackrel{(1.3.9)}{=} \left(\sqrt{n} + \ln \sqrt{n} + O(1) \right) \left(\sqrt{n} \ln n + O(\sqrt{n}) \right) - \left(n \ln n + O(\sqrt{n}) \right) = \\ &= n \ln n + \sqrt{n} O(\sqrt{n}) + \frac{1}{2} \sqrt{n} \ln^2 n + O(\sqrt{n}) \ln \sqrt{n} + \sqrt{n} \ln n + O(\sqrt{n}) - n \ln n - O(\sqrt{n}) \leq \\ &\leq O(n) \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

και η (2.2.3) γίνεται και αυτή

$$\begin{aligned}
T_n(t) &\leq \frac{\ln^4 n}{x_n^4} (\log_2 n - 3) \max_{4 \leq k \leq s} a_{nk} + \frac{\ln^3 n}{x_n^3} a_{n3} + \frac{\ln^2 n}{x_n^2} a_{n2} - \frac{\ln n}{x_n} x_n + 1 \stackrel{(2.2.7)}{\leq} \\
&\leq 1 - \ln n + \frac{\ln^4 n}{x_n^4} (\log_2 n - 3) \max_{4 \leq k \leq s} a_{nk} + \frac{\ln^3 n}{x_n^3} O(n) + \frac{\ln^2 n}{x_n^2} (\sqrt{n} \ln n + O(\sqrt{n})) \stackrel{\text{θεώρημα}}{\leq} \\
&\leq 1 - \ln n + \frac{\ln^4 n}{x_n^4} (\log_2 n - 3) O(x_n^{3.8854} \ln n) + \frac{\ln^3 n}{x_n^3} O(n) + \frac{\ln^2 n}{x_n^2} (\sqrt{n} \ln n + O(\sqrt{n}))
\end{aligned}
\tag{2.2.4}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
T_n(t) &\leq 1 - \ln n + \frac{\ln^4 n}{x_n^4} (\log_2 n - 3) O(x_n^{3.8854} \ln n) + \frac{\ln^3 n}{x_n^3} O(n) + \\
&+ \frac{\ln^2 n}{x_n^2} (\sqrt{n} \ln n + O(\sqrt{n})) \\
T_n(t) &\leq 1 - \ln n + \frac{\ln^3 n}{x_n^3} O(n) + \frac{\ln^4 n}{x_n^4} (\log_2 n - 3) O(x_n^{3.8854} \ln n) + \\
&+ \frac{\ln^2 n}{x_n^2} (\sqrt{n} \ln n + O(\sqrt{n})) \\
T_n(t) &\leq 1 - \ln n + O\left(\frac{n \ln^3 n}{x_n^3}\right) + O\left(\frac{x_n^{3.8854} \ln^6 n}{x_n^4}\right) \\
T_n(t) &\leq 1 - \ln n + O\left(\frac{n \ln^3 n}{x_n^3}\right) + O\left(\frac{\ln^6 n}{x_n^{0.1146}}\right)
\end{aligned}$$

που για $n \rightarrow \infty$ είναι < 0 .

Από αυτό, μπορούμε να συμπεράνουμε, ότι το g_n έχει μία αρνητική πραγματική ρίζα $y_n \in \left(-x_n, -x_n + \frac{p_{s-1}}{p_s}\right)$, και όλες οι υπόλοιπες ρίζες, είναι στο δίσκο $\left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{x_n}{\ln n}\right\}$, για n πολύ μεγάλο

Με $t \in (0, 1]$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{p_{s-1}}{p_s} &= t^{s-1} a_{ns} + t^{s-2} a_{ns-1} + t^{s-3} a_{ns-2} + t^{s-4} a_{ns-3} + \dots + t a_{n2} \\
\frac{p_{s-1}}{p_s} &= t a_{n2} + t^2 a_{n3} + t^3 a_{n4} + \dots + t^{s-4} a_{ns-3} + t^{s-3} a_{ns-2} + t^{s-2} a_{ns-1} + t^{s-1} a_{ns} \\
\frac{p_{s-1}}{p_s} &\leq t a_{n2} + t^2 a_{n3} + t^3 (\log_2 n - 3) \max_{4 \leq s < k} a_{nk}
\end{aligned}$$

και σε αυτή την περίπτωση, με $t = \frac{\ln n}{x_n}$ όπως και πριν, παίρνουμε:

$$\frac{p_{s-1}}{p_s} \leq t a_{n_2} + t^2 a_{n_3} + t^3 (\log_2 n - 3) \max_{4 \leq s < k} a_{n_k}$$

$$\frac{p_{s-1}}{p_s} \stackrel{(2.2.4)}{\leq} \stackrel{(2.2.7)}{\frac{\ln n}{x_n}} (\sqrt{n} \ln n + O(\sqrt{n})) + \frac{\ln^2 n}{x_n^2} O(n) + \frac{\ln^3 n}{x_n^3} (\log_2 n - 3) O(x_n^w \ln n)$$

$$\frac{p_{s-1}}{p_s} \leq O\left(\frac{\ln^5 n}{x_n^{3-w}}\right) = O(x_n^{w-3} \ln^5 n)$$

$$\text{όπου } w = 1 + \frac{2}{\ln 2} < 3.8854$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Κεφάλαιο 3

3.1 Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A_n

Ένας τρόπος να παράξουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A_n , διαφορετικός από αυτόν της παραγράφου 1.2, είναι χρησιμοποιώντας το κατευθυνόμενο γράφημα $D(M_n)$ του $M_n = \lambda I - A_n$, όπου το $D(M_n)$ έχει ως κορυφές το σύνολο $N = \{1, 2, \dots, n\}$, και πλευρά με κατεύθυνση από τον κόμβο i στον κόμβο j αν και μόνο αν $m_{ij} \neq 0$. Για ευκολία δε γράφουμε το δείκτη n , όπου αυτός είναι προφανής.

Στην περίπτωση μας, το γράφημα $D(M)$, θα έχει πλευρά με κατεύθυνση από τον κόμβο i στον κόμβο j , αν και μόνο αν $i | j$ ή $j=1$.

Συμβολίζουμε την πλευρά αυτή, με το διατεταγμένο ζεύγος (i, j) .

Ορίζουμε ως κύκλο μήκους k , ένα σύνολο κατευθυνόμενων πλευρών $\{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k)\}$, αν $j_r = i_{r+1}$ για $r=1, 2, \dots, k-1$, $j_k = i_1$, και i_1, i_2, \dots, i_k διαφορετικά ανά δύο.

Ακόμα, αν $c = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, i_1)\}$ είναι ένας κύκλος στο $D(M)$, τότε θέτουμε $P[c] = m_{i_1 i_2} m_{i_2 i_3} \dots m_{i_k i_1}$, και για $a \subseteq N$, $M[a]$ είναι ο κύριος υποπίνακας του M με γραμμές και στήλες στο a .

Έστω \mathcal{C}_1 το σύνολο των κύκλων στο $D(M)$ που έχουν την κορυφή 1, και για κάθε κύκλο c στο \mathcal{C}_1 , έστω $l(c)$ το μήκος του. Έστω c' το συμπλήρωμα στο N των κορυφών που ενώνονται στο c .

Από Θεώρημα 0.4

$$\det M = \sum_{c \in \mathcal{C}_1} (-1)^{l(c)+1} P[c] \det M[c'] \quad (3.1.1)$$

Παρατηρούμε, ότι αφού κάθε κύκλος c στο \mathcal{C}_1 περιέχει την κορυφή 1, ο κύριος υποπίνακας $M[c']$ είναι άνω τριγωνικός (αφού ο c περιέχει την κορυφή 1, ο συμπληρωματικός του δεν θα έχει την πρώτη γραμμή και στήλη, και άρα σύμφωνα και με τον ορισμό του A_n στο κεφάλαιο 1, θα περισέψει άνω τριγωνικός πίνακας). Από το θεώρημα 0.2, η ορίζουσα του πίνακα αυτού θα είναι όση με το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου του. Η διάσταση του συμπληρωματικού πίνακα, θα είναι $n-l(c)$, αφού έχουμε διαγράψει τις γραμμές και στήλες του κύκλου c . Από τον ορισμό της ορίζουσας του A_n , τα στοιχεία της διαγωνίου θα είναι $\lambda-1$, άρα η ορίζουσα, θα είναι $(\lambda-1)^{n-l(c)}$.

Ακόμα, αν ο c έχει μήκος 2 ή παραπάνω, τότε το $P[c]$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο από τη διαγώνιο, και είναι ακριβώς $P[c] = (-1)^{l(c)}$.

Στο \mathcal{C}_1 , ο μόνος κύκλος μήκους 1 είναι ο $c = \{(1,1)\}$, και σε αυτή την περίπτωση, έχουμε $P[c] = \lambda - 1$.

Άρα ο (3.1.1) γίνεται:

$$\begin{aligned}
 \det M_n &= \sum_{c \in \mathcal{C}_1} (-1)^{l(c)+1} P[c] \det M[c'] = \\
 &= (\lambda-1)^n + \sum_{\substack{l(c) \geq 2 \\ c \in \mathcal{C}_1}} (-1)^{l(c)+1} P[c] \det M[c'] \stackrel{P[c]=(-1)^{l(c)}, \text{ av } l(c) \geq 2}{=} \\
 &\stackrel{M[c']=(\lambda-1)^{n-l(c)}, \text{ av } l(c) \geq 2}{=} (\lambda-1)^n + \sum_{\substack{l(c) \geq 2 \\ c \in \mathcal{C}_1}} (-1)^{l(c)+1} (-1)^{l(c)} (\lambda-1)^{n-l(c)} = (\lambda-1)^n + \sum_{\substack{l(c) \geq 2 \\ c \in \mathcal{C}_1}} (-1)(-1)^{2l(c)} (\lambda-1)^{n-l(c)} = \\
 &= (\lambda-1)^n - \sum_{\substack{l(c) \geq 2 \\ c \in \mathcal{C}_1}} (\lambda-1)^{n-l(c)} \tag{3.1.2}
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι στην (3.1.2), κύκλοι ίδιου μήκους συνεισφέρουν το ίδιο στο άθροισμα, άρα, μπορούμε να κάνουμε μία ομαδοποίηση, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό των u_{nk} , ανάλογα με το μήκος $l(c)$ του κάθε κύκλου. Οπότε, κύκλους μήκους k , έχουμε u_{nk-1} , άρα

$$\sum_{\substack{l(c) \geq 2 \\ c \in \mathcal{C}_1}} (\lambda-1)^{n-l(c)} \stackrel{l(c)=k}{=} \sum_{k=2}^n (\lambda-1)^{n-k} u_{nk-1} \text{ και η (3.1.2) γίνεται}$$

$$\det M_n = (\lambda - 1)^n - \sum_{\substack{l(c) \geq 2 \\ c \in \mathcal{C}_1}} (\lambda - 1)^{n-l(c)}$$

$$\det M_n = (\lambda - 1)^n - \sum_{k=2}^n (\lambda - 1)^{n-k} v_{nk-1} \quad (3.1.3)$$

Ένας άλλος τρόπος να προσεγγίσουμε τα $v_{nk} (= c(n, k+1))$ είναι με τις k -λίστες. Αν λοιπόν μία k -λίστα στο N είναι μία λίστα $\{1, i_1, i_2, \dots, i_k\}$ με $i_1 | i_2 | \dots | i_k$ και $1 < i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, τότε v_{nk} είναι ο αριθμός των διαφορετικών k -λιστών στο N .

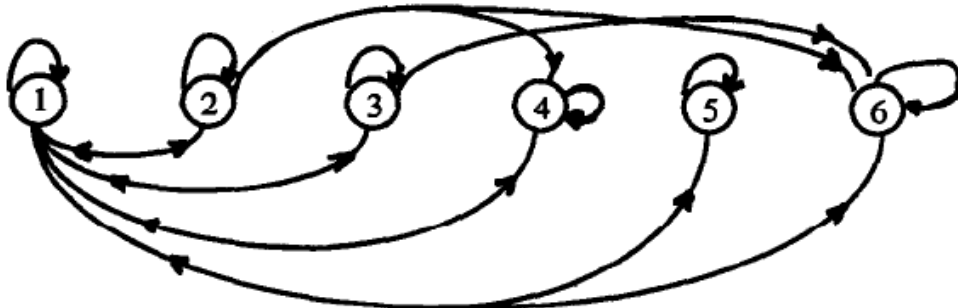
Πχ: εφαρμόζουμε την παραπάνω μέθοδο για τον $A_6 =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παίρνουμε λοιπόν

$$M_6 = \lambda I_6 - A_6 = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

και το γράφημα $D(M_6)$ θα είναι



Οι κύκλοι στο \mathcal{C}_1 σε αυτή την περίπτωση θα είναι:

μήκους 1: $\{(1,1)\}$

μήκους 2:

$\{(1,2), (2,1)\}, \{(1,3), (3,1)\}, \{(1,4), (4,1)\}, \{(1,5), (5,1)\}, \{(1,6), (6,1)\}$

μήκους 3: $\{(1,2), (2,4), (4,1)\}, \{(1,2), (2,6), (6,1)\}, \{(1,3), (3,6), (6,1)\}$

Άρα, έχουμε έναν κύκλο μήκους 1, 5 μήκους 2, 3 μήκους 3 και κανέναν μήκους πάνω από 3.

Η οριζούσα αυτού του πίνακα θα είναι σύμφωνα με την (3.1.3):

$$\begin{aligned} \det M_6 &= (\lambda - 1)^6 - \sum_{k=2}^n (\lambda - 1)^{6-k} v_{n5} = (\lambda - 1)^6 - 5(\lambda - 1)^{6-2} - 3(\lambda - 1)^{6-3} = \\ &= (\lambda - 1)^6 - 5(\lambda - 1)^4 - 3(\lambda - 1)^3 \end{aligned}$$

Όπως ξέρουμε, κανένας κύκλος στο $D(M_n)$ δεν μπορεί να έχει μήκος πάνω από $\lceil \log_2 n \rceil + 1$, δεν θα υπάρχουν και k -λίστες στο N , για $k > \lceil \log_2 n \rceil$

Αυτό μπορεί να γίνει και εύκολα αντιληπτό, από το γεγονός ότι η k -λίστα στο N με τη μικρότερη τιμή για τον τελευταίο της όρο θα πρέπει να είναι $\{1, 2, 4, 8, \dots, 2^k\}$, άρα αν $n < 2^k$ δεν μπορούν να υπάρχουν k -λίστες στο N .

Έστω $s = \lceil \log_2 n \rceil$. Θα έχουμε τότε για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A_n :

$$\begin{aligned} p_{A_n}(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A_n) = \det M_n = (\lambda - 1)^n - \sum_{k=2}^n (\lambda - 1)^{n-k} v_{nk-1} \stackrel{t=k-1}{=} \stackrel{k=t+1}{=} \\ &= (\lambda - 1)^n - \sum_{t=1}^s (\lambda - 1)^{n-t-1} v_{nt} \stackrel{t=k}{=} (\lambda - 1)^n - \sum_{k=1}^s (\lambda - 1)^{n-k-1} v_{nk} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Από την (3.1.4) προκύπτει άμεσα, ότι το $\lambda=1$ είναι ιδιοτιμή αλγεβρικής πολλαπλότητας $n-s-1$.

Το ενδιαφέρον μας στρέφεται τώρα στο πολυώνυμο

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{p_{A_n}(t+1)}{t^{n-s-1}} = \frac{(t+1-1)^n - \sum_{k=1}^s (t+1-1)^{n-k-1} v_{nk}}{t^{n-s-1}} = \frac{t^n - \sum_{k=1}^s t^{n-k-1} v_{nk}}{t^{n-s-1}} = \\ &= \frac{t^n}{t^{n-s-1}} - \frac{\sum_{k=1}^s t^{n-k-1} v_{nk}}{t^{n-s-1}} = t^{n-n+s+1} - \sum_{k=1}^s t^{n-k-1-n+s+1} v_{nk} = t^{s+1} - \sum_{k=1}^s t^{s-k} v_{nk} \end{aligned}$$

$$\text{Δηλαδή } f_n(t) = \frac{p_{A_n}(t+1)}{t^{n-s-1}} = t^{s+1} - \sum_{k=1}^s t^{s-k} v_{nk}. \quad (3.1.5)$$

Είναι χρήσιμο να συγκρίνουμε το $f_n(t)$, με το «κοντινό» του πολυώνυμο

$$r_n(t) = t^{s+1} - v_{n1} t^{s-1}. \quad (3.1.6)$$

Αφού στο \mathbb{N} όπως έχουμε εξηγήσει νωρίτερα υπάρχει ακριβώς μία 1-λίστα $\{1, k\}$ για κάθε $k \neq 1$, έχουμε (όπως έχουμε δει και στη (2.1.1))

$$v_{n1} = n - 1. \quad (3.1.7)$$

$$\text{Άρα} \quad r_n(t) = t^{s+1} - v_{n1} t^{s-1} = t^{s+1} - (n-1) t^{s-1} \quad (3.1.8)$$

Οι ρίζες της (3.1.8) είναι:

$$\begin{aligned} r_n(t) = 0 &\Leftrightarrow t^{s+1} - (n-1)t^{s-1} = 0 \Leftrightarrow t^{s-1}(t^2 - s + 1) = 0 \\ &t=0 \text{ ή } t = \pm\sqrt{s-1} \end{aligned}$$

με την $t=0$ αλγεβρικής πολλαπλότητας $s+1$, και τις $t = \pm\sqrt{s-1}$ αλγεβρικής πολλαπλότητας 1.

Σε επόμενες παραγράφους, θα δείξουμε ότι και το $f_n(t)$ έχει μία θετική και μία αρνητική ρίζα μέτρου περίπου \sqrt{n} , καθώς και ότι οι υπόλοιπες $s-1$ ρίζες του έχουν μικρότερο μέτρο.

3.2 Οι μεγάλες κατά μέτρο ρίζες του $f_n(t)$

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την απόδειξη του επόμενου θεωρήματος, το οποίο αποδείχθηκε από τον R.C.Vaughan.

Θεώρημα 3.2.1

Το πολυώνυμο $f_n(t)$ έχει δύο ρίζες t_n^+, t_n^- , που ικανοποιούν τη σχέση

$$t_n^\pm = \pm\sqrt{n} + \log \sqrt{n} + \gamma - \frac{3}{2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right) \quad (3.2.1)$$

καθώς $n \rightarrow \infty$. Εδώ $\gamma \approx 0,5772$, είναι η σταθερά του Euler.

Σχόλιο:

Πριν δώσουμε την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, θα το συγκρίνουμε με όσα έχουμε ήδη δει:

Όπως έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 1, το $f_n(t)$ έχει ακριβώς μία θετική ρίζα από το νόμο προσήμων του Descartes. Αυτή η ρίζα είναι η t_n^+ .

Αφού από την (3.1.5) $f_n(t) = \frac{p_{A_n}(t+1)}{t^{n-s-1}}$, έχουμε ότι $f_n(t_n^+) = 0 \Leftrightarrow p_{A_n}(t_n^+ + 1) = 0$, άρα $t_n^+ + 1$ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A_n , άρα $t_n^+ + 1$ θα είναι ιδιοτιμή του A_n , άρα $t_n^+ + 1 \in \sigma(A_n)$. Ακόμα $\rho(A_n)$ είναι ιδιοτιμή του A_n , άρα από το θεώρημα του Perron, θα πρέπει $\rho(A_n) = t_n^+ + 1$. Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.1

$$\rho(A_n) - 1 = \pm\sqrt{n} + \log \sqrt{n} + \gamma - \frac{3}{2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\rho(A_n) = \pm\sqrt{n} + \ln \sqrt{n} + \gamma - \frac{1}{2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right) \quad (3.2.2)$$

που είναι πολύ σημαντική βελτίωση από το αποτέλεσμα $\rho(A_n) = \sqrt{n} + \ln \sqrt{n} + O(1)$ που δώσαμε στο τέλος του πρώτου κεφαλαίου (1.3.9).

Ένα ακόμα παλιότερο όριο για το t_n^- δίνεται στο θεώρημα 2.2.1 (όπου y_n είναι t_n^-), το οποίο βελτιώνεται επίσης σημαντικά από το Θεώρημα 3.2.1.

Θα χρειαστούμε ακόμα το φράγμα που αποδείχθηκε στο Κεφάλαιο 2 (η σχέση (2.1.2)) για τους θετικούς αριθμούς v_{nk} : $v_{nk} < n \frac{(\ln n)^{k-1}}{(k-1)!}$. (3.2.3)

Εκτός από την (3.2.3) και έναν ασυμπτωτικό τύπο για το v_{n2} που θα δοθεί παρακάτω, η επόμενη απόδειξη είναι αυτοτελής.

Απόδειξη: Από τις (3.1.5),(3.1.7),(3.2.3), έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{f_n(t)}{t^{s-1}} - t^2 + n - 1 &\stackrel{(3.1.5)}{=} \frac{t^{s+1} - \sum_{k=1}^s t^{s-k} v_{nk}}{t^{s-1}} - t^2 + n - 1 = t^{s+1-s+1} - \sum_{k=1}^s t^{s-k-s+1} v_{nk} - t^2 + n - 1 = \\ &= t^2 - \sum_{k=1}^s t^{1-k} v_{nk} - t^2 + n - 1 = - \sum_{k=1}^s t^{1-k} v_{nk} + n - 1 \stackrel{(3.1.7)}{=} - \sum_{k=1}^s t^{1-k} v_{nk} + v_{n1} = \\ &= v_{n1} - \sum_{k=2}^s t^{1-k} v_{nk} + v_{n1} = - \sum_{k=2}^s t^{1-k} v_{nk} \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_n(t)}{t^{s-1}} - t^2 + n - 1 \right| &= \left| - \sum_{k=2}^s t^{1-k} v_{nk} \right| = \left| \sum_{k=2}^s t^{1-k} v_{nk} \right| \begin{array}{l} \text{τριγωνική} \\ \leq \\ \text{ανισότητα} \end{array} \sum_{k=2}^s |t|^{1-k} v_{nk} \stackrel{(3.2.3)}{<} \sum_{k=2}^s |t|^{1-k} n \frac{(\ln n)^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= \sum_{k=2}^s \frac{1}{|t|^{k-1}} n \frac{(\ln n)^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=2}^s \frac{n}{(k-1)!} \frac{(\ln n)^{k-1}}{|t|^{k-1}} = \sum_{k=2}^s \frac{n}{(k-1)!} \left(\frac{\ln n}{|t|} \right)^{k-1} = n \sum_{k=2}^s \frac{\left(\frac{\ln n}{|t|} \right)^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= e^x - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = n \left\{ \exp \left(\frac{\ln n}{|t|} \right) - 1 \right\} \end{aligned}$$

δηλαδή:
$$\left| \frac{f_n(t)}{t^{s-1}} - t^2 + n - 1 \right| < n \left\{ \exp \left(\frac{\ln n}{|t|} \right) - 1 \right\} \quad (3.2.4)$$

και παρόμοια

$$\left| \frac{f_n(t)}{t^{s-1}} - t^2 + n - 1 + \frac{v_{n2}}{t} \right| < n \left\{ \exp \left(\frac{\ln n}{|t|} \right) - 1 - \frac{\ln n}{|t|} \right\}. \quad (3.2.5)$$

Αρχικά αποδεικνύουμε την ύπαρξη των t_n^\pm . Θέτουμε $t = c\sqrt{n}$ στην (3.2.4) και έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_n(c\sqrt{n})}{(c\sqrt{n})^{s-1}} - (c\sqrt{n})^2 + n - 1 \right| &= \left| \frac{f_n(c\sqrt{n})}{(c\sqrt{n})^{s-1}} - c^2n + n - 1 \right| = \left| \frac{f_n(c\sqrt{n})}{(c\sqrt{n})^{s-1}} - (c^2 - 1)n - 1 \right| < \\ &< n \left\{ \exp\left(\frac{\ln n}{|c\sqrt{n}|}\right) - 1 \right\} = n \left\{ \exp\left(\frac{\ln n}{|c|\sqrt{n}}\right) - 1 \right\} \end{aligned}$$

και για n αρκετά μεγάλο, έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_n(c\sqrt{n})}{(c\sqrt{n})^{s-1}} - (c\sqrt{n})^2 + n - 1 \right| &< n \left\{ \exp\left(\frac{\ln n}{|c|\sqrt{n}}\right) - 1 \right\} < \\ &< n 2 \frac{\ln n}{|c|\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{n} \ln n}{|c|}. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Θέτοντας $c = \pm 2$ και $c = \pm \frac{1}{2}$, βλέπουμε ότι για μεγάλα n

$$\frac{f_n(\pm 2\sqrt{n})}{(\pm 2\sqrt{n})^{s-1}} > 0, \text{ ενώ } \frac{f_n\left(\pm \frac{1}{2}\sqrt{n}\right)}{\left(\pm \frac{1}{2}\sqrt{n}\right)^{s-1}} < 0$$

και επειδή η $f_n(t)$ είναι προφανώς συνεχής ως πολυωνυμική, εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano στα διαστήματα $\left[\frac{1}{2}\sqrt{n}, 2\sqrt{n}\right]$ και $\left[-2\sqrt{n}, -\frac{1}{2}\sqrt{n}\right]$, για τα οποία ξέρω ότι $f_n(\pm 2\sqrt{n})f_n\left(\pm \frac{1}{2}\sqrt{n}\right) < 0$, θα \exists τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left[\frac{1}{2}\sqrt{n}, 2\sqrt{n}\right]$ που θα είναι και θετική και τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left[-2\sqrt{n}, -\frac{1}{2}\sqrt{n}\right]$ που θα είναι αρνητική.

Αρα ονομάζοντας τη θετική t_n^+ και την αρνητική t_n^- , έχω ότι

$$t_n^+ \in \left[\frac{1}{2}\sqrt{n}, 2\sqrt{n}\right]$$

$$t_n^- \in \left[-2\sqrt{n}, -\frac{1}{2}\sqrt{n} \right]$$

και αποδειξαμε την ύπαρξη των ριζών.

Θέτοντας τώρα $t = t_n^\pm$ στην (3.2.4) και έχοντας κατά νου ότι $f_n(t_n^\pm) = 0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_n(t_n^\pm)}{(t_n^\pm)^{s-1}} - (t_n^\pm)^2 + n - 1 \right| < n \left\{ \exp\left(\frac{\ln n}{|t_n^\pm|}\right) - 1 \right\} &\Leftrightarrow \left| -(t_n^\pm)^2 + n - 1 \right| < n \left\{ \exp\left(\frac{\ln n}{|t_n^\pm|}\right) - 1 \right\} \Leftrightarrow \\ &\left| (t_n^\pm)^2 - (n-1) \right| < n \left\{ \exp\left(\frac{\ln n}{|t_n^\pm|}\right) - 1 \right\} \end{aligned}$$

και άρα για μεγάλα n

$$\left| (t_n^\pm)^2 - (n-1) \right| < n \left\{ \exp\left(\frac{\ln n}{|t_n^\pm|}\right) - 1 \right\} < 2n \frac{\ln n}{|t_n^\pm|} \begin{matrix} |t_n^\pm| > \frac{1}{2}\sqrt{n} \\ < \frac{2}{\sqrt{n}} \end{matrix} \frac{4n \ln n}{\sqrt{n}} = 4\sqrt{n} \ln n.$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \left| (t_n^+)^2 - n \right| < 4\sqrt{n} \ln n &\Leftrightarrow \left| (t_n^+ - \sqrt{n})(t_n^+ + \sqrt{n}) \right| < 4\sqrt{n} \ln n \Leftrightarrow \\ \left| t_n^+ - \sqrt{n} \right| \left| t_n^+ + \sqrt{n} \right| < 4\sqrt{n} \ln n &\Leftrightarrow \left| t_n^+ - \sqrt{n} \right| < \frac{4\sqrt{n} \ln n}{t_n^+ + \sqrt{n}} = O(\ln n) \end{aligned}$$

και όμοια

$$\begin{aligned} \left| (t_n^-)^2 - n \right| < 4\sqrt{n} \ln n &\Leftrightarrow \left| (t_n^- - \sqrt{n})(t_n^- + \sqrt{n}) \right| < 4\sqrt{n} \ln n \Leftrightarrow \\ \left| t_n^- + \sqrt{n} \right| \left| t_n^- - \sqrt{n} \right| < 4\sqrt{n} \ln n &\Leftrightarrow \left| t_n^- + \sqrt{n} \right| < \frac{4\sqrt{n} \ln n}{t_n^- - \sqrt{n}} = O(\ln n) \end{aligned}$$

άρα έχουμε

$$\left| t_n^\pm + \sqrt{n} \right| = O(\ln n) \Leftrightarrow t_n^\pm = \pm\sqrt{n} + O(\ln n). \quad (3.2.7)$$

Φτιάχνουμε τώρα λίγο αυτές τις προσεγγίσεις για τα t_n^\pm . Θέτουμε $t = t_n^\pm$ στην (3.2.5)

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_n(t_n^\pm)}{(t_n^\pm)^{s-1}} - (t_n^\pm)^2 + n - 1 + \frac{v_{n2}}{t_n^\pm} \right| &< n \left\{ \exp\left(\frac{\ln n}{|t_n^\pm|}\right) - 1 - \frac{\ln n}{|t_n^\pm|} \right\} \Leftrightarrow \\ \left| -(t_n^\pm)^2 + n - 1 + \frac{v_{n2}}{t_n^\pm} \right| &< n \left\{ \exp\left(\frac{\ln n}{|t_n^\pm|}\right) - 1 - \frac{\ln n}{|t_n^\pm|} \right\} \Leftrightarrow \\ \left| (t_n^\pm)^2 - (n-1) - \frac{v_{n2}}{t_n^\pm} \right| &< n \left\{ \exp\left(\frac{\ln n}{|t_n^\pm|}\right) - 1 - \frac{\ln n}{|t_n^\pm|} \right\} \end{aligned}$$

Αφού το δεξιό μέλος είναι μικρότερο από $\frac{n \ln^2 n}{|t_n^\pm|^2}$ για μεγάλα n , έχουμε

$$\begin{aligned} \left| (t_n^\pm)^2 - (n-1) - \frac{v_{n2}}{t_n^\pm} \right| &< n \left\{ \exp\left(\frac{\ln n}{|t_n^\pm|}\right) - 1 - \frac{\ln n}{|t_n^\pm|} \right\} \\ \left| (t_n^\pm)^2 - n - \frac{v_{n2}}{t_n^\pm} \right| &< \frac{n \ln^2 n}{|t_n^\pm|^2} \\ (t_n^\pm)^2 - n - \frac{v_{n2}}{t_n^\pm} &< \frac{n \ln^2 n}{|t_n^\pm|^2} \\ (t_n^\pm)^2 &< n + \frac{v_{n2}}{t_n^\pm} + \frac{n \ln^2 n}{|t_n^\pm|^2} \\ (t_n^\pm)^2 &= n + \frac{v_{n2}}{t_n^\pm} + O(\ln^2 n). \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Από την (3.2.7) προκύπτει ότι $\frac{1}{t_n^\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{\log n}{n}\right)$, που με τη βοήθεια της (3.2.3) έχουμε ότι $v_{n2} = O(n \ln n)$, άρα η παραπάνω γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_n^\pm} &= \pm \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \\ \frac{v_{n2}}{t_n^\pm} &= \pm \frac{v_{n2}}{\sqrt{n}} + v_{n2} O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \\ \frac{v_{n2}}{t_n^\pm} &= \pm \frac{v_{n2}}{\sqrt{n}} + O(\ln^2 n) \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας και την (3.2.8)

$$\begin{aligned} (t_n^\pm)^2 &= n + \frac{v_{n2}}{t_n^\pm} + O(\ln^2 n) \\ (t_n^\pm)^2 &= n \pm \frac{v_{n2}}{\sqrt{n}} + O(\ln^2 n) + O(\ln^2 n) \\ (t_n^\pm)^2 &= n \pm \frac{v_{n2}}{\sqrt{n}} + O(\ln^2 n) \\ (t_n^\pm)^2 &= n \left\{ 1 \pm \frac{v_{n2}}{n^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right) \right\} \end{aligned}$$

Από το ανάπτυγμα Taylor της $\sqrt{1+x}$, ξέρουμε ότι $\sqrt{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2)$,

οπότε με βάση αυτό και την (3.2.3) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} v_{n2} &< \frac{2 \ln^{2-1} n}{(2-1)!} \quad \text{και} \quad \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \\ v_{n2} &< 2 \ln n \quad \text{και} \quad \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες:

$$\begin{aligned} &\left. \begin{aligned} v_{n2} &< 2 \ln n \\ \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} &< \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned} \right\} \times \\ &\frac{v_{n2}}{n^{\frac{3}{2}}} < \frac{2 \ln n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} (t_n^\pm)^2 &= n \left\{ 1 \pm \frac{v_{n2}}{n^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right) \right\} \Leftrightarrow t_n^\pm = \pm \sqrt{n \left\{ 1 \pm \frac{v_{n2}}{n^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right) \right\}} \Leftrightarrow \\ t_n^\pm &= \pm \sqrt{n} \left\{ 1 \pm \frac{1}{2} \frac{v_{n2}}{n^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right) \right\} \Leftrightarrow t_n^\pm = \pm \sqrt{n} + \frac{v_{n2} \sqrt{n}}{2n^{\frac{3}{2}}} + \sqrt{n} O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$t_n^\pm = \pm\sqrt{n} + \frac{v_{n2}}{2n} + O\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right). \quad (3.2.9)$$

Τώρα, εξ' ορισμού

$$\begin{aligned} v_{n2} &= \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i|j \\ 1 < i < j}} 1 = \sum_{j=2}^n [d(j) - 2] = \sum_{j=1}^n [d(j) - 2] - [d(1) - 2] = \sum_{j=1}^n [d(j) - 2] - (1 - 2) = \\ &= \sum_{j=1}^n d(j) - 2n + 1 \text{ όπου } d(j) \text{ είναι ο αριθμός των διαιρετών του } j. \end{aligned}$$

Τότε, από το Θεώρημα 0.1 έχουμε γενικά ότι $\sum_{n \leq x} d(n) = x \ln x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$, $\forall x \geq 1$, όπου $\gamma \approx 0,5772$ είναι η σταθερά Euler, άρα εδώ

$$v_{n2} = \sum_{j=2}^n d(j) - 2n + 1 = n \ln n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n}) - 2n + 1$$

$$v_{n2} = n \ln n + (2\gamma - 3)n + O(\sqrt{n})$$

και με αντικατάσταση στην (3.2.9) παίρνουμε

$$\begin{aligned} t_n^\pm &= \pm\sqrt{n} + \frac{v_{n2}}{2n} + O\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right) \\ t_n^\pm &= \pm\sqrt{n} + \frac{n \ln n + (2\gamma - 3)n + O(\sqrt{n})}{2n} + O\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right) \\ t_n^\pm &= \pm\sqrt{n} + \frac{1}{2} \ln n + \frac{2\gamma - 3}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right) \\ t_n^\pm &= \pm\sqrt{n} + \frac{1}{2} \ln n + \frac{2\gamma - 3}{2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.3 Φράγμα για τις υπόλοιπες ρίζες του $f_n(t)$

Όλες οι υπόλοιπες ρίζες του $\gamma \approx 0,5772$, είναι σχετικά μικρές, όπως φαίνεται και στο επόμενο Θεώρημα, που είναι μία σημαντική βελτίωση στο φράγμα που έδωσε ο Jarvis και είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 3.3.1

Έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Για αρκετά μεγάλο n , το $f_n(t)$ έχει $s-1$ ρίζες μέσα στον κύκλο $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \log_{2-\varepsilon} n\}$.

Απόδειξη: έχουμε για το $r_n(t)$ από την (3.1.6) ότι $r_n(t) = t^{s+1} - v_{n1}t^{s-1}$. Ακόμα έχουμε και το επόμενο φράγμα για το $r_n(t)$ πάνω στον κύκλο $|t| = \log_{2-\varepsilon} n$

$$\begin{aligned}
 r_n(t) &= t^{s+1} - v_{n1}t^{s-1} = t^{s-1}(t^2 - v_{n1}) \Rightarrow \\
 |r_n(t)| &= |t^{s-1}(t^2 - v_{n1})| = |t^{s-1}| |t^2 - v_{n1}| = |t|^{s-1} |v_{n1} - t^2| \stackrel{|t| = \log_{2-\varepsilon} n}{=} |\log_{2-\varepsilon} n|^{s-1} |v_{n1} - (\log_{2-\varepsilon} n)^2| \geq \\
 &\stackrel{|x| \geq x}{\geq}_{\log_{2-\varepsilon} n > 0} (\log_{2-\varepsilon} n)^{s-1} (v_{n1} - (\log_{2-\varepsilon} n)^2)^{v_{n1} = n-1} = \\
 &(\log_{2-\varepsilon} n)^{s-1} (n-1 - (\log_{2-\varepsilon} n)^2)
 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Από το φράγμα της (3.2.3) και την τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 |f_n(t) - r_n(t)| &\stackrel{(3.1.5)}{=} \left| t^{s+1} - \sum_{k=1}^s t^{s-k} v_{nk} - t^{s+1} + v_{n1}t^{s-1} \right| = \left| \sum_{k=1}^s t^{s-k} v_{nk} - v_{n1}t^{s-1} \right| = \left| \sum_{k=2}^s t^{s-k} v_{nk} \right| = \\
 &= \left| \sum_{k=2}^s t^{s-1} t^{1-k} v_{nk} \right| = \left| t^{s-1} \sum_{k=2}^s t^{1-k} v_{nk} \right| = \left| t^{s-1} \sum_{k=2}^s \frac{v_{nk}}{t^{k-1}} \right| = |t|^{s-1} \left| \sum_{k=2}^s \frac{v_{nk}}{t^{k-1}} \right| \stackrel{|t| = \log_{2-\varepsilon} n}{=} \\
 &= |\log_{2-\varepsilon} n|^{s-1} \left| \sum_{k=2}^s \frac{v_{nk}}{(\log_{2-\varepsilon} n)^{k-1}} \right| \stackrel{\log_{2-\varepsilon} n}{=} (\log_{2-\varepsilon} n)^{s-1} \left| \sum_{k=2}^s \frac{v_{nk}}{(\log_{2-\varepsilon} n)^{k-1}} \right| \stackrel{v_{nk} > 0}{=} \stackrel{\log_{2-\varepsilon} n > 0}{=}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\log_{2-\varepsilon} n)^{s-1} \sum_{k=2}^s \frac{v_{nk}}{(\log_{2-\varepsilon} n)^{k-1}} \stackrel{(3.2.3)}{\leq} (\log_{2-\varepsilon} n)^{s-1} \sum_{k=2}^s \frac{n(\ln n)^{k-1}}{(k-1)!(\log_{2-\varepsilon} n)^{k-1}} = \\
& = n(\log_{2-\varepsilon} n)^{s-1} \sum_{k=2}^s \frac{(\ln n)^{k-1}}{(k-1)!(\log_{2-\varepsilon} n)^{k-1}} = n(\log_{2-\varepsilon} n)^{s-1} \sum_{k=2}^s \frac{1}{(k-1)!} \frac{(\ln n)^{k-1}}{(\log_{2-\varepsilon} n)^{k-1}} = \\
& = n(\log_{2-\varepsilon} n)^{s-1} \sum_{k=2}^s \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{\ln n}{\log_{2-\varepsilon} n} \right)^{k-1} \stackrel{\log_{2-\varepsilon} n = \frac{\ln n}{\ln(2-\varepsilon)}}{=} n(\log_{2-\varepsilon} n)^{s-1} \sum_{k=2}^s \frac{1}{(k-1)!} (\ln(2-\varepsilon))^{k-1} = \\
& e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
& = n(\log_{2-\varepsilon} n)^{s-1} (e^{\ln(2-\varepsilon)} - 1) = n(\log_{2-\varepsilon} n)^{s-1} (2-\varepsilon - 1) = n(\log_{2-\varepsilon} n)^{s-1} (1-\varepsilon) \stackrel{n \rightarrow \infty}{<} \\
& < n(\log_{2-\varepsilon} n)^{s-1} (n-1 - (\log_{2-\varepsilon} n)^2) \stackrel{(3.3.1)}{\leq} |r_n(t)|
\end{aligned}$$

οπότε έχουμε ότι $|f_n(t) - r_n(t)| \leq |r_n(t)|$.

Από το θεώρημα του Rouché, τα $f_n(t)$ και $r_n(t) + r_n(t) = 2r_n(t)$ έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στον κύκλο $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \log_{2-\varepsilon} n\}$, δηλαδή τα $f_n(t)$ και $r_n(t)$ έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στον κύκλο $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \log_{2-\varepsilon} n\}$ ■

Με βάση τα παραπάνω και πολυάριθμα παραδείγματα, οι Barrett και Jarvis διατύπωσαν τις ακόλουθες εικασίες:

Εικασία 3.3.1

Όλες οι ρίζες του $f_n(t)$ εκτός από 2, βρίσκονται στον κύκλο $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| \leq 1\}$

Εικασία 3.3.2

Όλες οι ρίζες του $f_n(t)$ εκτός από την t_n^+ , έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

Προφανώς η εικασία 3.3.1, υπονοεί την εικασία 3.3.2. Και οι δύο έχουν επιβεβαιωθεί με αριθμητικές δοκιμές για κάθε $f_n(t)$, και για επιλεγμένες τιμές ως το 1.000.000.

Αφού το άθροισμα των ριζών του $f_n(t)$ είναι 0, τότε από το θεώρημα 3.2.1, το άθροισμα των $n-1$ μικρών κατά μέτρο ριζών του, είναι

$$\begin{aligned} \sum \text{ριζών} = 0 &\Leftrightarrow t_n^+ + t_n^- + \sum (n-1) \text{ριζών} = 0 \Leftrightarrow \sum (n-1) \text{ριζών} = -t_n^+ - t_n^- \stackrel{(3.2.1)}{\Leftrightarrow} \\ \sum (n-1) \text{ριζών} &= \cancel{\sqrt{n}} - \log \sqrt{n} - \gamma + \frac{3}{2} - O\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right) + \cancel{\sqrt{n}} - \ln \sqrt{n} - \gamma + \frac{3}{2} - O\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right) \Leftrightarrow \\ \sum (n-1) \text{ριζών} &= -2\gamma + 3 - 2\ln \sqrt{n} - 2O\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right) \Leftrightarrow \\ \sum (n-1) \text{ριζών} &= 3 - 2\gamma - \ln n^2 - O\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right) \Leftrightarrow \\ \sum (n-1) \text{ριζών} &= 3 - 2\gamma - \ln n - O\left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right) \Leftrightarrow \\ \sum (n-1) \text{ριζών} &= 3 - 2\gamma - \ln n - O(1) \end{aligned}$$

διαιρώντας με $s-1 = [\log_2 n] - 1$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum (n-1) \text{ριζών} = 3 - 2\gamma - \ln n - O(1) &\Leftrightarrow \frac{\sum (n-1) \text{ριζών}}{s-1} = \frac{3 - 2\gamma - \ln n - O(1)}{s-1} \Leftrightarrow \\ E((n-1) \text{ριζών}) &= \frac{3 - 2\gamma - \ln n - O(1)}{[\log_2 n] - 1} \Leftrightarrow E((n-1) \text{ριζών}) = \frac{3 - 2\gamma - \ln n - O(1)}{\log_2 n - 1} \Leftrightarrow \\ E((n-1) \text{ριζών}) &= \frac{3 - 2\gamma - O(1)}{\log_2 n - 1} - \frac{\ln n}{\log_2 n - 1} \stackrel{\log_2 n = \frac{\ln n}{\ln 2}}{\Leftrightarrow} \\ E((n-1) \text{ριζών}) &= \frac{3 - 2\gamma - O(1)}{\log_2 n - 1} - \frac{\ln n}{\frac{\ln n}{\ln 2} - 1} \Leftrightarrow \\ E((n-1) \text{ριζών}) &= \frac{3 - 2\gamma - O(1)}{\log_2 n - 1} - \frac{\ln 2 \ln n}{\ln n - \ln 2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 - \ln 2 = -\ln 2 \end{aligned}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η μέση τιμή αυτών των $s-1$ ριζών, πλησιάζει το $-\ln 2 \approx -0,693$, καθώς $n \rightarrow \infty$.

Οπότε τουλάχιστον η μέση τιμή των μικρών κατά μέτρο ριζών του $f_n(t)$, βρίσκεται στον κύκλο $|z+1| \leq 1$ για μεγάλα n .

Γενικά υπάρχει η άποψη ότι αν και η πρώτη εικασία μπορεί να μην ισχύει, αλλά για τη δεύτερη οι ερευνητές είναι αρκετά αισιόδοξοι

Συμπεράσματα

Συγκεντρωτικά, έχουμε δείξει για τον πίνακα Redheffer A_n όπως αυτός ορίστηκε στο πρώτο κεφάλαιο, ότι

- $|\det A_n| = O\left(n^{\frac{1}{2+\varepsilon}}\right)$
- έχει $n-s-1$ ιδιοτιμές ίσες με 1
- έχει φασματική ακτίνα, δηλαδή τη μεγαλύτερη θετική ιδιοτιμή του, $\rho(A_n) \approx \sqrt{n}$
- έχει μία αρνητική ιδιοτιμή $t_n^- + 1 \approx -\sqrt{n}$
- οι υπόλοιπες $s-1$ ιδιοτιμές, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{s-1}$, είναι το πολύ $O(\log_{2-\varepsilon} n)$
- άμεσα βλέπουμε ακόμα ότι $|\det A_n| = O\left(-\sqrt{n}\sqrt{n}\prod_{k=1}^{s-1}\lambda_k\right) = O\left(n\prod_{k=1}^{s-1}\lambda_k\right) =$

Να σημειωθεί εδώ, ότι η εικασία 3.3.1 της προηγούμενης παραγράφου είναι ισοδύναμη με την πρόταση ότι οι $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{s-1}$ βρίσκονται όλες μέσα στον κύκλο $|z|=1$.

Το βασικό που μπορούμε να πούμε εδώ, είναι ότι ίσως καταλαβαίνοντας καλύτερα τις ιδιότητες των πινάκων A_n , και τη δομή τους γενικότερα, να είναι πιο εύκολο μέσα από τους πίνακες αυτούς να μελετήσουμε την υπόθεση Riemann αλλά και γενικότερα να ασχοληθούμε με τη θεωρία αριθμών. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να δώσουμε μία απόδειξη για το θεώρημα πρώτων αριθμών, μέσω της ισχύος της εικασίας 3.3.1. Έχουν γίνει πολλές δημοσιεύσεις που αφορούν άλλες ιδιότητες των πινάκων αυτών, όπως πχ τη δομή Jordan τους, εναλλακτικές και πολύ πιο υπολογιστικές αποδείξεις για την ισοδυναμία της ορίζουσας του πίνακα Redheffer με την υπόθεση Riemann κλπ.

Το συμπέρασμα που μπορεί κάποιος να βγάλει, είναι, ότι μέσω της ισοδυναμίας αυτής της υπόθεσης Riemann με την ορίζουσα των πινάκων A_n , ένα πρόβλημα του πεδίου της ανάλυσης, μετασχηματίζεται σε ένα τελείως υπολογιστικό πρόβλημα, το οποίο παραμένει βέβαια άλυτο.

Παράρτημα

Θεωρία αριθμών

Ορισμός 0.1

Ονομάζουμε διαιρέτη ή παράγοντα ενός αριθμού n , έναν αριθμό d που διαιρεί ακριβώς τον n , και συμβολίζουμε $d | n$.

Ορισμός 0.2

Ένας αριθμός λέγεται πρώτος όταν διαιρείται μόνο με το 1 και τον εαυτό του.

Ορισμός 0.3

Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο αριθμών m, n , είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που διαιρεί ακριβώς και τους δύο αριθμούς, και συμβολίζεται (m, n) .

Ορισμός 0.4

Ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, ονομάζεται η διαδικασία με την οποία γράφουμε μοναδικά έναν αριθμό σε γινόμενο, όπου ο κάθε παράγοντας είναι πρώτος αριθμός.

πχ: $12 = 2^2 \cdot 3$

Ορισμός 0.5

Ένας αριθμός, λέγεται ελεύθερος τετραγώνου, αν δεν διαιρείται από κανένα τέλειο τετράγωνο.

πχ: ο 18 δεν είναι ελεύθερος τετραγώνου, αφού $18 : 9 = 2$, και $9 = 3^2$, ενώ ο 10 είναι ελεύθερος τετραγώνου

Ορισμός 0.6

Μία συνάρτηση f λέγεται αριθμητική, αν ορίζεται $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$.

Ορισμός 0.7

Λέμε ότι μία αριθμητική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι πολλαπλασιαστική, αν $f(mn) = f(m)f(n)$, με $m, n \in \mathbb{N}$ και $(m, n) = 1$.

Ορισμός 0.8

Η συνάρτηση Möbius, που εισήχθη το 1832 από το Γερμανό μαθηματικό August Ferdinand Möbius, ορίζεται ως:

$\mu : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \{-1, 0, 1\}$, με

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } n \text{ είναι θετικός ακέραιος ελεύθερος τετραγώνου,} \\ & \text{με ζυγό αριθμό πρώτων παραγόντων} \\ -1, & \text{αν ο } n \text{ είναι θετικός ακέραιος ελεύθερος τετραγώνου,} \\ & \text{με περιττό αριθμό πρώτων παραγόντων} \\ 0, & \text{αν ο } n \text{ στην ανάλυσή του σε γινόμενο πρώτων} \\ & \text{παραγόντων, έχει τετράγωνο} \end{cases}$$

πχ:

$$\begin{array}{cccc} \mu(1) = 1 & \mu(6) = 1 & \mu(11) = -1 & \mu(16) = 0 \\ \mu(2) = -1 & \mu(7) = -1 & \mu(12) = 0 & \mu(17) = -1 \\ \mu(3) = -1 & \mu(8) = 0 & \mu(13) = -1 & \mu(18) = 0 \\ \mu(4) = 0 & \mu(9) = 0 & \mu(14) = 1 & \mu(19) = -1 \\ \mu(5) = -1 & \mu(10) = 1 & \mu(15) = 1 & \mu(20) = 0 \end{array}$$

Πρόταση 0.1

Η συνάρτηση Möbius, είναι πολλαπλασιαστική.

Απόδειξη: έστω $a, b \in \mathbb{N}$ και $(a, b) = 1$

- αν a η b δεν είναι ελεύθεροι τετραγώνου, τότε ο ab δεν θα είναι ούτε αυτός ελεύθερος τετραγώνου, οπότε $\mu(ab) = 0 = \mu(a)\mu(b)$
- αν τώρα και οι 2 είναι ελεύθεροι τετραγώνου, αφού $(a,b) = 1$, τότε ο ab θα είναι αναγκαστικά ελεύθερος τετραγώνου
Ακόμα, το άθροισμα των πρώτων παραγόντων του ab , θα είναι το ίδιο με το άθροισμα των πρώτων παραγόντων των a και b
 - αν a, b έχουν ζυγό αριθμό πρώτων παραγόντων, τότε το ab θα έχει και αυτό ζυγό αριθμό πρώτων παραγόντων, άρα $\mu(ab) = 1 = 1 \cdot 1 = \mu(a)\mu(b)$
 - αν a, b έχουν περιττό αριθμό πρώτων παραγόντων, τότε το ab θα έχει ζυγό αριθμό πρώτων παραγόντων, άρα $\mu(ab) = 1 = (-1) \cdot (-1) = \mu(a)\mu(b)$
 - αν το ένα από τα a, b έχει ζυγό αριθμό πρώτων παραγόντων και το άλλο περιττό αριθμό πρώτων παραγόντων, τότε το ab θα έχει περιττό αριθμό πρώτων παραγόντων, άρα $\mu(ab) = -1 = (-1) \cdot 1 = \mu(a)\mu(b)$ ■

Πρόταση 0.2

Για τη συνάρτηση Μόβιους, ισχύει ότι $\sum_{m|n} \mu(m) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n=1 \\ 0, & \text{αν } n>1 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}.$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}: f(n) = \sum_{m|n} \mu(m), \forall n \in \mathbb{N}$

Η f είναι πολλαπλασιαστική, από την Πρόταση 0.1.

Για $n=1$: $f(1) = \sum_{m|1} \mu(m) = \mu(1) = 1$, οπότε αποδείχθηκε.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $f(p^k) = 0$, για κάθε p πρώτο και $\forall k \in \mathbb{N}$.

Όντως,

$$f(p^k) = \sum_{m|p^k} \mu(m) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \dots + \mu(p^k) =$$

$$1 + (-1) + \underbrace{0 + \dots + 0}_{\substack{\text{αφού από } p^2 \text{ και μετά} \\ \text{οι δυνάμεις του } p \text{ δεν} \\ \text{είναι ελεύθερες τετραγώνου}}} = 0$$

Αναλύοντας σε γινόμενο πρώτων παραγόντων κάθε $n > 1$ φυσικό, προκύπτει ένα γινόμενο της μορφής $n = \prod_{\substack{p \text{ πρώτος} \\ p|n \\ \text{για κάποια } k \in \mathbb{N}}} p^k$, και δεδομένου ότι η

συνάρτηση Möbius είναι πολλαπλασιαστική, έχουμε ότι

$$f(n) = f\left(\prod_{\substack{p \text{ πρώτος} \\ p|n \\ \text{για κάποια } k \in \mathbb{N}}} p^k\right) = \prod_{\substack{p \text{ πρώτος} \\ p|n \\ \text{για κάποια } k \in \mathbb{N}}} f(p^k) = 0.$$

Άρα
$$\sum_{m|n} \mu(m) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n=1 \\ 0, & \text{αν } n>1 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad \blacksquare$$

Ορισμός 0.9

Η συνάρτηση Mertens, που ονομάστηκε έτσι προς τιμήν του γερμανού μαθηματικού Franz Mertens, ορίζεται ως:

$$M : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}, \text{ με}$$

$$M(n) = \sum_{k=1}^n \mu(k)$$

πχ:

$$\begin{array}{cccc} M(1) = 1 & M(6) = -1 & M(11) = -2 & M(16) = -1 \\ M(2) = 0 & M(7) = -2 & M(12) = -2 & M(17) = -2 \\ M(3) = -1 & M(8) = -2 & M(13) = -3 & M(18) = -2 \\ M(4) = -1 & M(9) = -2 & M(14) = -2 & M(19) = -3 \\ M(5) = -2 & M(10) = -1 & M(15) = -1 & M(20) = -3 \end{array}$$

Θεώρημα 0.1

Για κάθε $x \geq 1$ ισχύει ότι $\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$, όπου

$\sum_{n \leq x} d(n)$ είναι το άθροισμα των διαιρετών του n , για κάθε $n \leq x$, και γ η

σταθερά Euler.

Πίνακες

Ορισμός 0.10

Ονομάζουμε πίνακα $m \times n$ A , με στοιχεία από το \mathbb{R} ή το \mathbb{C} , μία ορθογώνια διάταξη mn αριθμών a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) σε m γραμμές και n στήλες, ώστε ο αριθμός a_{ij} , να βρίσκεται συγχρόνως στην i -γραμμή και στη j -στήλη

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Τον πίνακα A , τον συμβολίζουμε με $A = (a_{ij})$.

Οι αριθμοί a_{ij} , θα λέγονται στοιχεία του πίνακα.

Ορισμός 0.11

Αν A ένας $m \times n$ πίνακας, ορίζουμε τον ανάστροφό του ως: κατασκευάζουμε έναν νέο πίνακα B , του οποίου οι γραμμές, θα είναι οι στήλες του A με την ίδια σειρά. Προφανώς οι στήλες του B θα είναι γραμμές του A με την ίδια σειρά, και ο B θα είναι ένας $m \times n$ πίνακας.

Τον ανάστροφο του A τον συμβολίζουμε A^T .

Δηλαδή, αν $A^T = (b_{ij})$ και $A = (a_{ij})$, τότε

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$$

Ορισμός 0.12

Ένας πίνακας A , θα λέγεται τετραγωνικός, αν έχει ίσο αριθμό γραμμών και στηλών, δηλαδή ένας $m \times n$ πίνακας, είναι τετραγωνικός αν $m=n$.

Ορισμός 0.13

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$, θα λέγεται κάτω τριγωνικός, αν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι 0, δηλαδή αν $a_{ik} = 0$ για $i < k$.

Αντίστοιχα, ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$, θα λέγεται άνω τριγωνικός, αν όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι 0, δηλαδή αν $a_{ik} = 0$ για $i > k$.

Ορισμός 0.14

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$, θα λέγεται διαγώνιος, αν τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία του, είναι αυτά της κύριας διαγώνιου, δηλαδή αν $a_{ij} = 0$, για $i \neq j$.

Ορισμός 0.15

Μοναδιαίος πίνακας, ονομάζεται ο διαγώνιος πίνακας, με τα στοιχεία της διαγώνιου του ίσα με τη μονάδα, δηλαδή $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$.

Ορισμός 0.16

Αν A ένας $m \times n$ πίνακας και B ένας $n \times p$ πίνακας, ορίζουμε το γινόμενο τους AB , να είναι ένας $m \times p$ πίνακας $AB = (c_{ij})$, που το κάθε στοιχείο του θα δίνεται από τη σχέση $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$.

Δηλαδή πολλαπλασιάζουμε ένα προς ένα τα στοιχεία της i -γραμμής του A , με τα αντίστοιχα στοιχεία της j -στήλης του B , και προσθέτουμε τα γινόμενα. Το αποτέλεσμα είναι το στοιχείο c_{ij} του πίνακα AB , που βρίσκεται στην i -γραμμή και τη j -στήλη του.

Ορισμός 0.17

Ένας $n \times n$ πίνακας B , θα λέγεται αντίστροφος του $n \times n$ πίνακα A , αν και μόνο αν $AB = BA = I$.

Τον αντίστροφο τον συμβολίζουμε $B = A^{-1}$.

Αν υπάρχει ο B , τότε ο A λέγεται αντιστρέψιμος.

Πρόταση 0.3

Αν A, B δύο $n \times n$ πίνακες, τότε ισχύει ότι $(AB)^T = B^T A^T$.

Απόδειξη: έστω ότι $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $A^T = (c_{ij})$, $B^T = (d_{ij})$, οπότε $c_{ij} = a_{ji}$ και $d_{ij} = b_{ji}$

έχουμε

$$AB = (a_{ij} b_{jk})$$

$$(AB)^T = (a_{kj} b_{ji})$$

$$B^T A^T = (d_{ij} c_{jk}) = (b_{ji} a_{kj}) = (a_{kj} b_{ji})$$

και άρα προκύπτει το ζητούμενο. ■

Πρόταση 0.4

Αν A ένας τετραγωνικός αντιστρέψιμος πίνακας, τότε ισχύει ότι

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

Απόδειξη: αρκεί να δείξουμε ότι $A^T (A^{-1})^T = I$.

Πράγματι

$$A^T (A^{-1})^T \stackrel{\text{πρόταση 0.3}}{=} (A^{-1} A)^T = I^T = I. \quad \blacksquare$$

Ορισμός 0.18

Ορίζουσα, ονομάζεται μία απεικόνιση $D: \Pi_n \rightarrow B$ (Π_n : το σύνολο των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων), η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- $D(A_1, \dots, cA_i, \dots, A_n) = cD(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$, για κάθε $c \in B$
- $D(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j + cA_i, \dots, A_j, \dots, A_n) = D(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n)$, για κάθε $c \in B$ και για κάθε $i \neq j$
- $D(I) = 1$, όπου I ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας

(τα A_1, A_2, \dots, A_n , είναι τα διανύσματα στήλες του πίνακα A)

Ο αριθμός $D(A) \in B$ (ή αλλιώς $\det(A)$), που αντιστοιχεί στον πίνακα A , λέγεται ορίζουσα του πίνακα A .

Ορισμός 0.19

Έστω ένα σύνολο S . Κάθε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του συνόλου S στον εαυτό του, λέγεται μετάθεση.

πχ: αν $S = \{1, 2, \dots, 5\}$, μία μετάθεση είναι η $p = (3, 1, 5, 4, 2)$ ή

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Ορισμός 0.20

Σε μία μετάθεση ενός συνόλου φυσικών αριθμών, έχουμε παράβαση, όταν ένας μεγαλύτερος φυσικός αριθμός προηγείται από ένα μικρότερό του.

πχ: αν $S = \{1, 2, \dots, 6\}$, μία μετάθεση είναι η $p = (3, 6, 2, 4, 1, 5)$ έχουμε 8 παραβάσεις.

Ορισμός 0.21

Έστω μία συνάρτηση $f : A \rightarrow B$. Η f ονομάζεται ταυτοτική, αν για κάθε $x \in A$, $f(x) = x$.

Ορισμός 0.22

Ταυτοτική, ονομάζεται η μετάθεση που αντιστοιχεί στην ταυτοτική απεικόνιση.

Παρατήρηση 0.1 (εναλλακτικός ορισμός ορίζουσας)

Αποδεικνύεται ότι για κάθε τετραγωνικό πίνακα $A \in \Pi_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, υπάρχει μοναδική ορίζουσα, και η μοναδική αυτή απεικόνιση έχει τη μορφή $D(A) = \sum (-1)^k a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n}$, όπου η άθροιση γίνεται σε όλες τις δυνατές μεταθέσεις J των $\{1, 2, \dots, n\}$, και k είναι ο αριθμός των παραβάσεων στην κάθε μετάθεση.

Πρόταση 0.5

Αν A, B δύο $n \times n$ πίνακες, τότε: $D(AB) = D(A)D(B)$.

Απόδειξη: είναι άμεση συνέπεια του εναλλακτικού ορισμού της ορίζουσας. ■

Πρόταση 0.6

Έστω ένας $n \times n$ τετραγωνικός αντιστρέψιμος πίνακας A . Τότε

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}.$$

Απόδειξη: Αφού ο A είναι $n \times n$, τότε το ίδιο θα είναι και ο αντίστροφός του:

$$\begin{aligned}
AA^{-1} &= I \Rightarrow \\
\det(AA^{-1}) &= \det I \stackrel{\text{πρόταση 0.5}}{\Rightarrow} \\
\det(A)\det(A^{-1}) &= 1 \Rightarrow \\
\det A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \Rightarrow \\
\det A^{-1} &= (\det A)^{-1}
\end{aligned}$$

και αποδείχθηκε το ζητούμενο. ■

Θεώρημα 0.2

Αν $A = (a_{ij})$ ένας $n \times n$ άνω ή κάτω τριγωνικός πίνακας, τότε $D(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$, δηλαδή η ορίζουσά του, ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του.

Απόδειξη: Από τον εναλλακτικό ορισμό της ορίζουσας, έχουμε ότι ο ένας όρος του αθροίσματος του δεύτερου μέλους, θα είναι ο $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$, που αντιστοιχεί στην ταυτοτική μετάθεση.

Για οποιαδήποτε άλλη μετάθεση, υπάρχουν δείκτες $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$, τέτοιοι ώστε $j_k < k$ και $j_l > l$.

Επειδή όμως ο A είναι τριγωνικός, θα έχουμε είτε $a_{i_k k} = 0$, είτε $a_{j_l l} = 0$ άρα, κάθε άλλος προσθετέος διαφορετικός από τον $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ θα είναι 0, επομένως $D(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$. ■

Ορισμός 0.23

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Ονομάζουμε υποπίνακα του A , τον πίνακα που προκύπτει από τον A , αν διαγράψουμε έναν αριθμό στηλών ή έναν αριθμό γραμμών, ή έναν αριθμό γραμμών και στηλών.

Ορισμός 0.24

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Η εξίσωση $Ax = \lambda x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A , και είναι ισοδύναμη με το σύστημα $(I\lambda - A)x = 0$.

Ορισμός 0.25

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A , είναι το πολυώνυμο που προκύπτει αναζητώντας τις μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $(I\lambda - A)x = 0$, όπου θα πρέπει $|I\lambda - A| = 0$, και τελικά το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι το

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + k_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + k_1\lambda + k_0.$$

Ορισμός 0.26

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, $m \leq n$ ονομάζονται ιδιοτιμές του πίνακα A .

Ορισμός 0.27

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Για κάθε ιδιοτιμή του A , αν την αντικαταστήσουμε στο σύστημα $Ax = \lambda x$, παίρνουμε ένα διάνυσμα, το οποίο καλείται ιδιοδιάνυσμα.

Ορισμός 0.28

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Το σύνολο των ιδιοτιμών του A ονομάζεται φάσμα του A και συμβολίζεται $\sigma(A)$, δηλαδή

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : p_A(\lambda) = 0\}.$$

Ορισμός 0.29

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Το μέγιστο μέτρο που μπορεί να πάρει μία ιδιοτιμή του A , ονομάζεται φασματική ακτίνα του A , και συμβολίζεται $\rho(A)$. Δηλαδή $\rho(A) = \max \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Ορισμός 0.30

Έστω A, B δύο $n \times n$ πίνακες. Οι A, B λέγονται όμοιοι, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P , τέτοιος ώστε $B = P^{-1}AP$.

Πρόταση 0.7

Έστω A, B δύο $B = P^{-1}AP$ πίνακες. Οι A, B έχουν την ίδια ορίζουσα.

Απόδειξη: Αφού A, B όμοιοι, θα υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P , τέτοιος ώστε $B = P^{-1}AP$. Οπότε

$$\begin{aligned} \det B &= \det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \det A \det P = \det P^{-1} \det P \det A = \\ &= \det(P^{-1}P) \det A = \det I \det A = \det A \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Πρόταση 0.8

Έστω A, B δύο $B = P^{-1}AP$ πίνακες. Οι A, B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και άρα και τις ίδιες ιδιοτιμές.

Απόδειξη: Αφού A, B όμοιοι, θα υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P , τέτοιος ώστε $B = P^{-1}AP$, οπότε

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - B) &= \det(\lambda I - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}\lambda IP - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda I - A)P) = \\ &= \det P^{-1} \det(\lambda I - A) \det P = \det P^{-1} \det P \det(\lambda I - A) = \det P^{-1}P \det(\lambda I - A) = \\ &= \det I \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A) \end{aligned}$$

και αφού οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, θα είναι και αυτές ίδιες. \blacksquare

Ορισμός 0.31

Έστω A ένας μιγαδικός $n \times n$ πίνακας με στοιχεία a_{ij} . Για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ορίζουμε $R_i = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$, δηλαδή R_i είναι το άθροισμα των απόλυτων τιμών των μη διαγώνιων στοιχείων της γραμμής i , για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Έστω $D(a_{ii}, R_i)$, ο κλειστός δίσκος με κέντρο a_{ii} και ακτίνα R_i .

Αυτοί οι δίσκοι ονομάζονται δίσκοι Gershgorin.

Θεώρημα 0.3 (Gershgorin)

Αν $A = (a_{ij})$ ένας $n \times n$ μιγαδικός πίνακας. Κάθε ιδιοτιμή του A , βρίσκεται σε τουλάχιστον έναν από τους δίσκους Gershgorin.

Απόδειξη: Έστω λ ιδιοτιμή του A , και $x = x_j$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, και έστω $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, τέτοιο ώστε $|x_i| = \max |x_j|$. Αφού το x είναι ιδιοδιάνυσμα:

$$\begin{aligned} Ax = \lambda x &\Leftrightarrow \sum a_{ij} x_j = \lambda x_i \Leftrightarrow \sum_{i \neq j} a_{ij} x_j + a_{ii} x_i = \lambda x_i \Leftrightarrow \\ \sum_{i \neq j} a_{ij} x_j &= \lambda x_i - a_{ii} x_i \Leftrightarrow \sum_{i \neq j} a_{ij} x_j = x_i (\lambda - a_{ii}) \end{aligned}$$

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \frac{\sum_{i \neq j} a_{ij} x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{i \neq j} \left| \frac{a_{ij} x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{i \neq j} |a_{ij}| = R_i$$

και η απόδειξη τελείωσε. ■

Πρόταση 0.9

Αν στο θεώρημα Gershgorin, η ένωση k δίσκων είναι ξένη από την ένωση των υπόλοιπων $n-k$ δίσκων, τότε η πρώτη ένωση περιέχει ακριβώς k και η δεύτερη ακριβώς $n-k$ ιδιοτιμές.

Ορισμός 0.32

Έστω $A = (a_{ij})$ ένας θετικός $n \times n$ πίνακας με στοιχεία $a_{ij} > 0$, $1 \leq i, j \leq n$. Τότε υπάρχει ένας αριθμός r , που ονομάζεται Perron ρίζα, τέτοιος ώστε το r να είναι ιδιοτιμή του A και για κάθε άλλη ιδιοτιμή λ του A , να ισχύει, $|\lambda| < r$.

Δηλαδή $r = \rho(A)$.

Θεώρημα 0.4

Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $n \times n$ πίνακας με $D(A)$ το κατευθυνόμενο γράφημά του. Έστω i μία κορυφή του γραφήματος, και θεωρήστε το σύνολο όλων των κύκλων του $D(A)$ που περιέχουν το i , να είναι $\{c_1, c_2, \dots, c_q\}$, και το μήκος του c_k να είναι l_k . Τότε:

$$\det(A) = \sum (-1)^{l_k+1} P[c_k] \det A[c_k'].$$

Γραφήματα

Ορισμός 0.33

Ένα γράφημα G , είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων $f : A \rightarrow C$ και E , όπου το E είναι ένα υποσύνολο του συνόλου των μη διατεταγμένων ζευγών του V . Κάθε στοιχείο του V λέγεται κορυφή του γραφήματος, ενώ κάθε στοιχείο του E πλευρά.

Ορισμός 0.34

Αν στον προηγούμενο ορισμό τα ζεύγη είναι διατεταγμένα, παίρνουμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα.

Ορισμός 0.35

Σε ένα γράφημα G , μία πεπερασμένη ακολουθία στην οποία εναλλάσσονται κορυφές του G και πλευρές του G , η οποία αρχίζει και τελειώνει σε κορυφή και όπου η κάθε πλευρά που περιέχεται στην ακολουθία έρχεται από την κορυφή που προηγείται και προσπίπτει στην κορυφή που έπεται, λέγεται δρόμος.

Ορισμός 0.36

Έστω ένα γράφημα G . αν σε ένα δρόμο του γραφήματος αυτού, κάθε πλευρά εμφανίζεται μόνο μία φορά, τότε ο δρόμος λέγεται δρομίσκος.

Ορισμός 0.37

Έστω ένα γράφημα G . αν σε ένα δρόμο κάθε κορυφή και κάθε πλευρά εμφανίζονται ακριβώς μία φορά, τότε ο δρόμος λέγεται μονοπάτι.

Ορισμός 0.38

Έστω ένα γράφημα G . Ένας δρόμος ή δρομίσκος που έχει ως άκρα την ίδια κορυφή, λέγεται κλειστός.

Ορισμός 0.39

Έστω ένα γράφημα G . Ένας κλειστό μονοπάτι, λέγεται κύκλος.

Ορισμός 0.40

Έστω ένα γράφημα G . Το πλήθος των πλευρών ενός δρόμου, ενός μονοπατιού και ενός κύκλου, λέγεται αντίστοιχα μήκος του δρόμου, του μονοπατιού, του κύκλου.

Σχόλιο:

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός γραφήματος, είναι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα του γραφήματος

Μιγαδικές Συναρτήσεις

Πρόταση 0.10 (νόμος προσήμων του Descartes)

Αν έχουμε ένα πολυώνυμο με μία μεταβλητή και συντελεστές πραγματικούς αριθμούς, γραμμένο κατά φθίνουσα σειρά δυνάμεων, τότε ο αριθμός των θετικών ριζών του θα είναι είτε ίσος με τον αριθμό των αλλαγών προσήμων μεταξύ των διαδοχικών μη μηδενικών συντελεστών του, είτε μικρότερος αυτού του αριθμού κατά κάποιον ζυγό αριθμό. Σημειώνουμε ότι οι πολλαπλές ρίζες μετρούνται ξεχωριστά.

Ορισμός 0.41

Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in A$. Θα λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο z_0 , αν υπάρχει το $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ και είναι μιγαδικός.

Ορισμός 0.42

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ μία συνάρτηση. Θα λέμε ότι η f είναι ολόμορφη/αναλυτική στο A , αν και μόνο αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του A .

Ορισμός 0.43

Έστω f μία μιγαδική συνάρτηση, ολόμορφη στο πεδίο D . Θα λέμε ότι το $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f , αν υπάρχει $r > 0$, τέτοιο ώστε η f να είναι ολόμορφη στο σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$.

Αν $z_0 \in \mathbb{C}$ μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f , τότε η f θα έχει

ανάπτυγμα Laurent: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $0 < |z - z_0| < r$.

Ορισμός 0.44

Εστω f μία μιγαδική συνάρτηση, $z_0 \in \mathbb{C}$ μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της και $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $0 < |z - z_0| < r$ το ανάπτυγμα Laurent. Αν το κύριο μέρος του αναπτύγματος Laurent (δηλαδή το άθροισμα από το $-\infty$ μέχρι το -1) περιέχει πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών όρων, τότε το z_0 ονομάζεται πόλος. Αν ακόμα ισχύει $a_{-k} \neq 0$ και $a_{-n} = 0$ για κάθε $n > k$, τότε το z_0 ονομάζεται πόλος τάξης k . Ειδικότερα αν $k=1$, τότε το z_0 ονομάζεται απλός πόλος.

Ορισμός 0.45

Εστω f μία μιγαδική συνάρτηση και $z_0 \in \mathbb{C}$ μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της και

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r \quad \text{το}$$

ανάπτυγμα Laurent. Ο συντελεστής $\frac{1}{z - z_0} a_{-1}$ του a_{-1} , ονομάζεται

ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο z_0 .

Ορισμός 0.46

Εστω f μία μιγαδική συνάρτηση, αν η f είναι ολόμορφη σε ένα πεδίο D , εκτός ίσως από μερικά μεμονωμένα ανώμαλα σημεία που είναι πόλοι της f , τότε η f ονομάζεται μερόμορφη στο D .

Θεώρημα 0.5 (Rouche)

Εστω f, g ένας δύο μιγαδικές συναρτήσεις, αναλυτικές πάνω και μέσα σε μία απλή κλειστή καμπύλη C , και έστω $|f(z)| > |g(z)|$, $\forall z \in C$. Τότε οι $f(z)$ και $f(z) + g(z)$ θα έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών μέσα στην καμπύλη C .

Χρήσιμες σχέσεις

Τύπος Stirling

Είναι μία ανίσωση που μας δίνει μία προσέγγιση για το $n!$

$$\sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \leq n! \leq e n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

Σταθερά Euler

Είναι μία σταθερά που εμφανίζεται στην ανάλυση και τη θεωρία αριθμών:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$
$$\gamma \approx 0.57723\dots$$

Ανάπτυγμα Taylor

Αναπαριστά μία συνάρτηση σαν άπειρο άθροισμα. Εμάς μας ενδιαφέρουν 2 συναρτήσεις:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} x^n = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2)$$

Πρόταση 0.11 (ιδιότητες λογαρίθμου)

Για τη συνάρτηση $\log_b x$, ισχύουν τα

$$\text{Αν } b=e: \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

$$\text{Για αλλαγή βάσης: } \log_b x = \frac{\log_d x}{\log_d b}$$

Συνάρτηση Γάμμα

Είναι η συνάρτηση που ορίζεται στο $\{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$, από τον τύπο

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt .$$

Για τη συνάρτηση Γάμμα, ισχύει ότι $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ και

$\Gamma(n+1) = n!$, που είναι και ο λόγος που θεωρείται επέκταση του παραγοντικού.

Βιβλιογραφία

1. W.W.Barrett, R.W.Forcade, A.D.Pollington, on the spectral radius of a $(0,1)$ matrix related to Merten's function, *Linear algebra and its applications* 107:151-159, 1988
2. Tyler J. Jarvis, a dominant negative eigenvalue of a matrix of a Redheffer, *Linear algebra and its applications* 142:141-152, 1990
3. W.W.Barrett, Tyler J. Jarvis, spectral properties of a matrix of a Redheffer, *Linear algebra and its applications* 162-164:673-683, 1992
4. J. Brian Conrey, *The Riemann Hypothesis*, 2003
5. Π.Ι.Ψαρράκος, *Θέματα ανάλυσης πινάκων*, 2012
6. Δ.Χ.Κραββαρίτης, *Εφαρμοσμένη μιγαδική ανάλυση*, 2006
7. Α.Παπαϊωάννου, *Θεωρία γραφημάτων*, 2006
8. Α.Παπαϊωάννου, *Διακριτά μαθηματικά*, 2003
9. Σ.Καρανάσιος, Ν.Καδιανάκης, *Γραμμική άλγεβρα, αναλυτική γεωμετρία και εφαρμογές*, 2003
10. I.B.Μαρουλάς, *Γραμμική άλγεβρα*, 2000
11. E.C.Titchmarch *the theory of the Riemann zeta function*, Oxford U.P., Oxford, 1951
12. Peter J. Hammond, *lecture notes from Warwick university, matrix algebra part C: pivoting and matrix decomposition*, 2012
13. Z.Stankova Frenkel, *Möbius inversion formula, multiplicative functions*, Berkeley math circle, 1998-1999
14. Yoichiro Mori, *lectures from university of Minnesota, Chapter 5, the determinant*
15. Parker Williams, *math 216A, lecture notes, week 3, Posets and Möbius inversion*
16. Paul Klingsberg, *lecture notes from Saint Joseph's University, the principle of inclusion-exclusion and the Möbius inversion*
17. Joel E. Cohen, *Möbius inversion of random acyclic directed graphs, studies in applied mathematics* 84:1-6, 1991
18. A.J.Hildebrand, *math 531 lecture notes, introduction to analytic number theory*, 2005
19. Nancy Eaton, *lecture notes from university of Rhode Island, the proof that the transpose of a product is the product of the transposes on reverse order*, 2002
20. W.W.L.Chen, *lecture notes from Imperial College, distribution of prime numbers*, 1981-1990

21. J.Owen Sizemore, lecture notes from university of Wisconsin Madison, Number theoretic functions, 2012
22. Chris Smyth, lecture notes from university of Edinburgh, arithmetic functions
23. Wendy Myrvold, lecture notes from university of Victoria, counting perfect matchings of a graph
24. J.W.Helton, I.Klep, R.Gomez, determinant expansions of signed matrices and of certain Jacobians, 2000 mathematics Subject classification 15A48 80A30, 2009
25. John W, Milnor, lecture notes from Stony Brook University, matrix estimates and the Perron Frobenius theorem
26. J.S.Maybee, D.D.Olesky, P. van den Driessche, G.Wiener, matrices, digraphs and determinants, 1987
27. Stewart A. Levin, Descartes Rule of signs, how hard can it be?, 2002
28. Niall Madden, lecture notes from NUI Galway, norms condition numbers and eigenvalues: Gershgorin's theorems, 2013
29. Howard E. Haber, lecture notes from university of California Santa Cruz, the characteristic polynomial, 2011
30. Tom M. Apostol, introduction to analytic number theory, Springer-Verlag, 1976
31. E.Rukmangadachari, E.Keshava Reddy, Engineering mathematics, Pearson editions India, 2010
32. E.R.Love, the mathematical Gazette, the mathematical association vol 64, no427, pp55-57, 1980
33. Δημήτριος Νούτσος, σημειώσεις από το τμήμα μαθηματικών των Ιωαννίνων, Perron Frobenius theory and some extensions, 2008
34. E.Bombieri, problems of the millennium, the Riemann Hypothesis, Clay Mathematics Institute
35. Hershel M. Farkas, a matrix related to the theorem of Fermat and the Goldbach Conjecture, from Fourier analysis and number theory to random transforms and geometry, developments in mathematics 28, DOI 10.1007/978-1-4614-4075-8_9
36. O.Bordelles, B.Cloitre, a matrix inequality for Möbius functions, 2000 mathematics subject classification 15A15,11A25, 15A18, 11C20, 2009
37. Herbert S. Wilf, the Redheffer matrix of a partially ordered set, 2201 mathematics subject classifications: 05A15, 05E99, 2004
38. I.Lankham, B.Nachtergaele, A.Schilling, lecture notes from university of California, Permutations and the determinant, 2007