

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Taxas de Convergência para Métodos Iterativos Cíclicos em Problemas Mal Postos

Rubén Alex Martínez Muñoz
Orientador: Prof.^o Dr. Antônio Leitão

Florianópolis
Abril de 2015

Rubén Alex Martínez Muñoz

Taxas de Convergência para Métodos
Iterativos Cíclicos em Problemas Mal
Postos

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof.^o Dr. Antônio Leitão.

Florianópolis
Abril de 2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Martínez, Rubén. A.

Taxas de Convergência para Métodos Iterativos Cíclicos
em Problemas Mal Postos / Rubén. A. Martínez ; orientador,
Antônio Leitão - Florianópolis, SC, 2015.

77 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Inclui referências

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Problemas Mal Postos.
3. Métodos de Regularização. 4. Landweber-Kaczmarz. I.
Leitão, Antônio. II. Universidade Federal de Santa
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e
Aplicada. III. Título.

Taxas de Convergência para Métodos Iterativos Cíclicos em Problemas Mal Postos

por

Rubén Alex Martínez Muñoz¹

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de “Mestre”, Área de Concentração em Matemática Aplicada, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Coordenador do Curso

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcelo Sobottka - UFSC
(Presidente da Banca)

Prof. Dr. Raphael Falcão da Hora - UFSC

Prof. Dr. Wagner Barbosa Muniz - UFSC

Prof. Dr. Adriano De Cezaro - FURG

Florianópolis, Abril de 2015.

¹Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

"Ipse se nihil scire id unum sciat".
Σωκράτης.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, ao Departamento de Matemática da UFSC, que deu uma oportunidade para mim, e também à CAPES, por seu valioso suporte financeiro.

Agradeço também a cada um dos professores que tive nas diversas disciplinas, em particular a meu orientador acadêmico Igor Mozolevski e a meu orientador definitivo Antônio Leitão, finalmente quero agradecer a os professores que aceitaram ser membros da banca da minha defesa, para todos, mis respetos.

Menção aparte é para Elisa Amaral, obrigado por tudo.

Agradeço, não podia ser de outra maneira, a meus amigos e conhecidos que ganhei aqui nessa ilha maluca: Kamal, Roberto, Alessandro, Marcelo, Witro, Mario, Eduardo, Raúl, enfim...tuda a gente que conheci graças à UFSC, e em especial, agradecer à minha amiga Jú, ela é demais.

Agradeço, a minha linda família, a família é o principal suporte na vida.

Resumo

Na classe dos métodos de regularização iterativos, os métodos tipo Kaczmarz são uns dos métodos mais utilizados para resolver problemas na matemática aplicada. No entanto, na literatura a quantidade de resultados sobre convergência e as respectivas taxas de convergência não é abundante. Este trabalho trata da análise de convergência de algumas versões do método de Landweber-Kaczmarz, obtendo convergência e estabilidade do método modificado com um parâmetro de relaxamento, e taxas de convergência no método para operadores lineares em bloco nas versões simétrica e não simétrica. Finalmente, compara-se mediante experimentos numéricos o desempenho dos métodos estudados com o desempenho de métodos bem estabelecidos.

Palavras-Chave: Problemas inversos, problemas mal postos, métodos de regularização iterativos, Landweber-Kaczmarz, taxas de convergência.

Abstract

In the class of iterative regularization methods, Kaczmarz type methods are some of that are more often used to solve problems in applied mathematics. However, in the literature the amount of convergence results and their convergence rate is not abundant. This work deals with the analysis of convergence of some versions of the Landweber-Kaczmarz method, obtaining convergence and stability of the modified method with a relaxation parameter, and convergence rates for method for linear block operators in versions symmetrical and non-symmetrical. Finally, the performance of the methods is compared with the performance of well-established methods.

Keywords: Inverse problems, ill-posed problems, iterative regularization methods, Landweber-Kaczmarz, convergence rates.

Conteúdo

Introdução	1
1 Regularização de Problemas Mal Postos por Métodos Iterativos	3
1.1 Problemas Mal Postos	3
1.2 Regularização por Métodos Iterativos	6
1.2.1 Método de Landweber	6
1.2.2 Método de Landweber-Kaczmarz Clássico e o Método Loping-Landweber-Kaczmarz (LLK) em Espaços de Hilbert	7
1.2.3 Relação Histórica de Resultados	8
2 Convergência do Método Landweber-Kaczmarz	11
3 Taxas de Convergência	27
3.1 Problemas Inversos em Análise	27
3.2 Métodos Tipo Kaczmarz e Operadores em Bloco	29
3.2.1 Método Landweber-Kaczmarz não Simétrico com Pré-Condicionamento	29
3.2.2 Método Landweber-Kaczmarz Simétrico com Pré-Condicionamento	31
3.3 Taxas de Convergência para o Método Landweber-Kaczmarz não Simétrico	34
3.4 Taxas de Convergência para o Método Landweber-Kaczmarz Simétrico	49
4 Experiências Numéricas	51
4.1 Métodos Iterativos a Serem Comparados	51
4.2 Descrição do Problema Teste	52
4.2.1 Gerando Dados Exatos e com Ruído	53

4.3	Resultados	53
4.3.1	Dados Exatos	54
4.3.2	Dados com Ruído	55
4.4	Conclusões	58
	Conclusões Gerais	59
	Referências Bibliográficas	61

Introdução

Uma grande quantidade de problemas em engenharia e ciências aplicadas estão relacionados com a determinação de uma quantidade física x a partir de dados observados de uma outra quantidade física y . Essas quantidades estão conectadas mediante uma relação funcional dada de forma explícita ou implícita. Embora a relação funcional seja conhecida de forma explícita, nem sempre é possível obter de forma analítica a quantidade x em função de y . Para resolver esse problema, usam-se ferramentas numéricas, mas quando a relação funcional *inversa* que conecta y com x não tem “boas propriedades” as aproximações numéricas tornam-se instáveis. Aqui entram no jogo os métodos de regularização para tornar estáveis problemas de aproximação instáveis.

No Capítulo 1, definem-se os conceitos de problema inverso mal posto, método de regularização e as noções de convergência e taxas de convergência desses métodos. Depois, expõem-se os métodos nos quais está baseado o presente trabalho: os métodos de Landweber e de Landweber-Kaczmarz para dados exatos, y , e dados com ruído y^δ . Aqui a teoria não é tratada detalhadamente, já que o objetivo deste trabalho é estabelecer taxas de convergência para os métodos estudados. No entanto, uma abordagem rigorosa pode ser encontrada nas referências. Finalmente, apresenta-se um resumo dos resultados de convergência/taxas para os métodos tipo Kaczmarz obtidos nos últimos anos.

No Capítulo 2, apresenta-se em detalhe a análise de convergência para o método de Landweber-Kaczmarz para operadores *não lineares*, tanto para dados exatos como para dados com ruído.

No Capítulo 3, apresentam-se as versões não simétrica e simétrica do método de Landweber-Kaczmarz para *operadores em blocos* lineares e se estabelecem taxas de convergência para ambas variantes do método.

No Capítulo 4, compara-se o desempenho dos métodos estudados nos Capítulos 2 e 3 com métodos tipo Landweber e o método Steepest Descent.

Capítulo 1

Regularização de Problemas Mal Postos por Métodos Iterativos

Neste capítulo serão definidos conceitos tais como “Problemas inversos”, “Problemas Inversos Mal Postos” e o que se entende por um método de regularização para essa classe de problemas junto às noções de convergência e taxas de convergência para métodos de regularização. Definido isso, apresentam-se como estratégias de regularização para problemas inversos mal postos, os métodos de Landweber e Landweber-Kaczmarz no contexto de espaços de Hilbert gerais.

1.1 Problemas Mal Postos

Os problemas inversos pertencem a uma das áreas da matemática aplicada com maior crescimento nas últimas décadas, principalmente porque muitos problemas próprios da engenharia e ciências podem se enquadrar nessa classe de problemas.

Se entende por *Problema Inverso* aquele que consiste em determinar *causas em função de efeitos observados*. Sendo mais preciso, ao falar de um problema inverso implicitamente se está falando de um outro problema, que seria o problema direto. Ambos problemas são inversos mutuamente e portanto a solução de um envolve a solução do outro.

Formalmente, no contexto do presente trabalho, dado um operador $F : X \rightarrow Y$ entre espaços de Hilbert X e Y , a equação

$$F(x) = y \tag{1.1}$$

é uma representação geral do problema *direto-inverso*; o problema direto é: *dado $x \in X$ achar $y \in Y$* , e o problema inverso: *dado $y \in Y$ achar $x \in X$* . Geralmente, os problemas inversos que aparecem na prática correspondem a modelos matemáticos que não são *bem postos*, onde segundo Hadamard, um problema matemático definido mediante a equação (1.1) é bem posto se para todos os dados admissíveis existe uma única solução x , a qual depende *continuamente* dos dados. Se uma dessas condições é violada, o problema é chamado de **mal posto**, isto é, o critério de Hadamard diz que o problema inverso na equação (1.1) é bem posto se o operador F é uma bijeção com inversa F^{-1} contínua.

Geralmente, na prática, não se conhece com precisão os valores dos dados y para o problema inverso, porém, só se dispõe de dados aproximados y^δ , os quais não necessariamente pertencem à imagem do operador F , cujo erro ou *nível de ruído* é comumente gerado pelos instrumentos de medição os quais tem uma precisão obviamente limitada (não infinita). Os dados aproximados ficam a uma distância que não supera o valor $\delta > 0$, isto é

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta \tag{1.2}$$

onde δ é chamado o *nível de erro* ou *nível de ruído*.

Frequentemente na prática, o problema inverso na equação (1.1) é mal posto ou mal condicionado, por exemplo, quando o operador F é compacto e não degenerado, o que implica que a inversa não é contínua. Matematicamente, a questão da *existência de soluções* pode ser enfraquecida aumentando o espaço solução. Em relação à unicidade sua ausência indica que estão faltando informações no modelo. Pode-se adicionar propriedades, impor condições ao operador, ou ainda, escolher uma entre as várias soluções, a qual melhor corresponda ao modelo. Agora no caso de que exista solução para o problema inverso na equação (1.1) a violação do terceiro critério de Hadamard, isto é, a dependência contínua dos dados, é de vital importância, já que a ausência da propriedade de dependência contínua dos dados pode provocar sérias dificuldades numéricas. Para manter essas instabilidades sob controle, propõem-se os chamados *Métodos de Regularização*, os quais, permitem obter uma *aproximação estável e convergente* (conceitos a serem definidos mais para frente) para uma solução do problema em função do nível de ruído δ . Em termos gerais, o processo de regularização

é a aproximação de um problema mal posto por uma família de problemas bem postos. A maior dificuldade num problema inverso mal posto na forma da equação (1.1), é o cálculo de uma solução x^* quando dispõe-se de dados com ruído y^δ , já que como o operador inverso F^{-1} é descontínuo, pode gerar (e geralmente gera) soluções inadequadas para o problema. Portanto, é necessário procurar uma aproximação x_α^δ de x^* que seja possível de calcular de maneira estável, no sentido de que dependa continuamente dos dados observados y^δ , e que convirja à solução x^* quando o nível de ruído tende para zero, dada uma escolha adequada do parâmetro de regularização α .

Para ver em detalhe a teoria de regularização para problemas inversos sugere-se ao leitor consultar [8], onde são apresentadas alternativas de escolha do parâmetro de regularização α . É importante ressaltar que a escolha do parâmetro de regularização requer um balanço entre estabilidade e precisão para a solução aproximada regularizada x_α^δ . Para tal, uma estimativa de δ na relação (1.2) é fundamental.

Quando um método de aproximação é de fato um método de regularização, isto é, é estável:

$$x_\alpha^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} x_\alpha$$

e é convergente:

$$x_\alpha^\delta \xrightarrow{\alpha, \delta \rightarrow 0} x^*,$$

cabe a pergunta sobre a rapidez da convergência. Infelizmente, em geral a convergência de um método de regularização para resolver um problema mal posto pode ser arbitrariamente lenta, por isso as taxas de convergência podem ser obtidas somente em subconjuntos de X e determinadas por informações a-priori sobre a solução exata x^* ou sobre os dados y . Estas informações a-priori são formuladas em termos das chamadas *condições de fonte* ou *source conditions* (para maiores detalhes veja [8]). Finalmente, entende-se por taxa de convergência para um método de regularização a taxa para a qual acontece

$$\|x_\alpha^\delta - x^*\| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

1.2 Regularização por Métodos Iterativos

Na prática, o problema direto é muito melhor entendido que o problema inverso, por isso, para resolver os primeiros existe uma grande quantidade de bons algoritmos e software computacional, isto é, software para avaliar $F(x)$ dado um determinado $x \in X$. Então, é uma boa ideia tentar resolver o problema inverso mediante iterações sucessivas, usando essa bateria de softwares e algoritmos.

Os métodos iterativos tem uma propriedade de *auto-regularização*, no sentido que o término antecipado do processo iterativo tem um efeito regularizador, ou seja, o índice da iteração faz a função do parâmetro de regularização α e, o critério de parada faz a função do método de seleção do parâmetro. Para ver um estudo detalhado das propriedades de regularização que possuem os métodos iterativos veja [8, 16].

1.2.1 Método de Landweber

A condição de otimalidade de primeira ordem para o problema de mínimos quadrados não linear

$$\min_{x \in X} \frac{1}{2} \|F(x) - y\|^2,$$

é a equação normal

$$F'(x)^* F(x) = F'(x)^* y, \quad (1.3)$$

onde $F'(x)$ é a derivada de Fréchet de F em $x \in X$ e $F'(x)^*$ é o correspondente operador adjunto. Transformando a expressão (1.3) em uma iteração de ponto fixo obtém-se

$$x = x - F'(x)^*(F(x) - y), \quad (1.4)$$

logo denotando por x_n^δ as iterações no caso de dados com ruído y^δ (e por x_n no caso de dados exatos y) obtém-se a *iteração de Landweber*

$$x_{n+1}^\delta = x_n^\delta - F'(x_n^\delta)^*(F(x_n^\delta) - y^\delta). \quad (1.5)$$

Um estudo detalhado deste método para os casos em que o operador F é linear ou não linear pode ser encontrado em [8, 16].

1.2.2 Método de Landweber-Kaczmarz Clássico e o Método Loping-Landweber-Kaczmarz (LLK) em Espaços de Hilbert

O método de Landweber atua sobre problemas da forma da expressão (1.1), ou seja, para uma equação. No caso de ter um sistema de equações, uma alternativa seria agrupar elas num operador por blocos ou com estrutura vetorial (com valores num espaço produto). Essa alternativa implica que em cada iteração tem que avaliar todos os operadores envolvidos simultaneamente na aproximação atual, atividade que para um grande número de equações torna o processo pouco econômico computacionalmente. A seguir será definido o problema para o caso de um sistema de equações.

Considere o problema de determinar alguma quantidade física $x \in X$ a partir de $p \in \mathbb{N}$ dados $(y^i)_{i=0}^{p-1} \subset Y^p$ os quais estão funcionalmente relacionados por

$$F_i(x) = y^i, \quad i = 0, \dots, p-1 \quad (1.6)$$

onde $F_i : D_i \subseteq X \rightarrow Y$ são operadores entre espaços de Hilbert X e Y com respectivos produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$, e as normas associadas $\| \cdot \|_X$, $\| \cdot \|_Y$. Quando o contexto é claro serão usados $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\| \cdot \|$ por simplicidade. Como já observado, na prática, os dados não são conhecidos de maneira exata, ou seja, só são disponíveis aproximações y^{δ^i} dos dados exatos satisfazendo,

$$\|y^{\delta^i} - y^i\| < \delta^i, \quad i = 0, \dots, p-1. \quad (1.7)$$

Ao longo deste trabalho se assume que o sistema de equações (1.6) tem pelo menos uma solução $x^* \in \bigcap_{i=0}^{p-1} D_i$. O propósito do presente trabalho é estudar sistemas de equações do tipo (1.6) para os quais a solução x^* não depende continuamente dos dados y^i , ou seja, quando o problema inverso definido pelo sistema (1.6) é mal posto e portanto precisa ser regularizado.

Existem pelo menos dois conceitos básicos para resolver problemas mal postos da forma do sistema (1.6): Métodos de Regularização Iterativos e Métodos de Regularização de *Tikhonov*, mas ambos métodos são ineficientes para p grande ou se as avaliações de $F_i(x)$ e $F'_i(x)^*$ são custosas computacionalmente. Uma alternativa são os métodos de tipo *Kaczmarz* (veja [15]), que consideram de forma cíclica cada equação no sistema (1.6) de forma separada e, portanto, são muito mais rápidos e são frequentemente os métodos escolhidos na prática.

O método *Landweber-Kaczmarz* clássico é definido por

$$x_{n+1}^\delta = x_n^\delta - F'_{[n]}(x_n^\delta)^*(F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}}), \quad (1.8)$$

onde $[n] := n \bmod p \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Note que para $p = 1$ tem-se o método de Landweber.

Observação 1.1. *É imediato observar que a estratégia tipo Kaczmarz pode ser usada conjuntamente com qualquer outro método iterativo para resolver problemas mal postos, por exemplo, métodos tipo Newton, etc. Essencialmente, aplica-se uma iteração do método escolhido para cada uma das equações do sistema de forma cíclica.*

Para resolver o sistema (1.6) com a relação (1.7) será usado o método de Landweber-Kaczmarz incorporando um parâmetro de relaxamento *bang-bang* ao método de Landweber-Kaczmarz clássico (veja [20]), combinado com um novo princípio da discrepância, isto é,

$$x_{n+1}^\delta = x_n^\delta - \omega_n F'_{[n]}(x_n^\delta)^*(F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}}), \quad (1.9)$$

com

$$\omega_n := \omega_n(\delta, y^\delta) = \begin{cases} 1, & \|F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}}\| > \tau \delta^{[n]} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.10)$$

onde $\tau > 2$ é uma constante escolhida apropriadamente. A iteração acaba quando $\|F_i(x_n^\delta) - y^{\delta^i}\| \leq \tau \delta^i$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Essa variante do método de Landweber-Kaczmarz clássico será chamado de *loping Landweber-Kaczmarz* (LLK). Para dados exatos ($\delta^i = 0$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$) tem-se $\omega_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e assim neste caso particular o método LLK é o método de Landweber-Kaczmarz clássico. A seguir, e para contextualizar o trabalho feito nos próximos capítulos, apresenta-se um breve resumo sobre os resultados de convergência e taxas de convergência obtidos nos últimos anos.

1.2.3 Relação Histórica de Resultados Obtidos para Métodos Tipo Kaczmarz

A pesquisa dos métodos de Landweber-Kaczmarz para problemas mal postos começou cerca de doze anos atrás (veja [20]), onde a convergência (sem taxas) foi provada para dados exatos, e a prova de convergência para dados inexatos foi incompleta. A prova completa de convergência para dados inexatos (sem taxas) foi feita em [13].

A seguir, apresenta-se um breve resumo dos resultados de análise de convergência para métodos tipo Kaczmarz, para os casos linear e não linear:

- [2006] Iteratively-Regularized-Gauss-Newton-Kaczmarz [3]; convergência com taxas;
- [2007] Landweber-Kaczmarz [11, 13]; convergência sem taxas;
- [2008] Steepest-Descent-Kaczmarz [6]; convergência sem taxas;
- [2009] Expectation-Maximization-Kaczmarz [12]; convergência sem taxas;
- [2009] Block-Maximization-Kaczmarz [10]; convergência sem taxas para sistemas lineares;
- [2010] Levenberg-Marquardt-Kaczmarz [2]; convergência sem taxas;
- [2011] Iterated Tikhonov-Kaczmarz [5]; convergência sem taxas;
- [2011] Paralell-Regularized-Newton-Kaczmarz [1]; convergência sem taxas.

No próximo capítulo, apresenta-se a análise de convergência para o método LK.

Capítulo 2

Análise de Convergência do Método Landweber-Kaczmarz

Neste capítulo serão apresentados os resultados de convergência do método LK, isto é, convergência para dados exatos (Teorema 2.1) e no caso de dados com ruído (Teorema 2.2) o método LK mais o critério de parada (a ser definido), é um método de regularização.

Ao longo do presente trabalho serão assumidas hipóteses que são padrão na análise de convergência de métodos de regularização iterativos. No contexto do sistema de equações (1.6), supõe-se que os operadores F_i , $i = 0, 1, \dots, p - 1$ são Fréchet diferenciáveis e que $\exists \rho > 0$ tal que $\forall i = 0, 1, \dots, p - 1$, tem-se

$$\|F'_i(x)\| \leq 1, \quad x \in B_\rho(x_0) \subset D := \bigcap_{i=0}^{p-1} D_i \quad (2.1)$$

e,

$$\|F_i(x) - F_i(\tilde{x}) - F'_i(x)(x - \tilde{x})\|_Y \leq \begin{array}{l} \eta \|F_i(x) - F_i(\tilde{x})\|_Y \\ \forall x, \tilde{x} \in B_\rho(x_0) \subset D, \end{array} \quad (2.2)$$

com $0 < \eta < 1/2$ e $B_\rho(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \rho\}$. Além do anterior, o parâmetro τ de (1.10) satisfaz,

$$\tau > 2 \frac{1 + \eta}{1 - 2\eta} > 2. \quad (2.3)$$

Como foi apontado no capítulo anterior, para dados livres de ruído o método LLK é equivalente ao método de Landweber-Kaczmarz clássico, mas no caso de dados com ruído, os métodos de regularização iterativos precisam terminar as iterações antecipadamente, fato que se consegue com um critério de parada adequado. No seguinte lema, obtém-se uma estimativa relacionada com a monotonicidade do erro, $\|e_n\| := \|x_n^\delta - x^*\|$, resultado que motiva a definição do critério de parada para o método LLK.

Lema 2.1. *Seja x^* uma solução do sistema (1.6) na bola $B_{\rho/2}(x_0)$, com os operadores F_i Fréchet diferenciáveis em $B_\rho(x_0)$ satisfazendo (2.1) e (2.2). Seja $\{x_n^\delta\}_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência definida por (1.9), (1.10) e ainda suponha que para certo $n \in \mathbb{N}$, $x_n^\delta \in B_{\rho/2}(x^*) \subset B_\rho(x_0)$. Então*

$$\begin{aligned} & \|x_{n+1}^\delta - x^*\|^2 - \|x_n^\delta - x^*\|^2 \\ & \leq \omega_n \|F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}}\| \left(2(1 + \eta)\delta^{[n]} - (1 - 2\eta)\|F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}}\| \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $[n] := n \bmod p \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.

Prova: Para $\omega_n = 0$ a desigualdade segue de $x_{n+1}^\delta = x_n^\delta$, logo para $\omega_n \neq 0$ tem-se

$$\begin{aligned} & \|x_{n+1}^\delta - x^*\|^2 - \|x_n^\delta - x^*\|^2 = \\ & = \langle x^* - x_{n+1}^\delta, x^* - x_{n+1}^\delta \rangle - \langle x^* - x_n^\delta, x^* - x_n^\delta \rangle \\ & = 2(\langle x^*, x_n^\delta \rangle - \langle x^*, x_{n+1}^\delta \rangle) - \|x_n^\delta\|^2 + \langle x_{n+1}^\delta \pm x_n^\delta, x_{n+1}^\delta \pm x_n^\delta \rangle \\ & = 2\langle x^*, x_n^\delta - x_{n+1}^\delta \rangle + \|x_{n+1}^\delta - x_n^\delta\|^2 + 2\langle x_{n+1}^\delta - x_n^\delta, x_n^\delta \rangle \\ & = 2\langle x^* - x_n^\delta, x_n^\delta - x_{n+1}^\delta \rangle + \|x_{n+1}^\delta - x_n^\delta\|^2 \\ & \stackrel{(1.9)}{=} 2\omega_n \langle x^* - x_n^\delta, F'_{[n]}(x_n^\delta)^*(F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}}) \rangle + \|x_{n+1}^\delta - x_n^\delta\|^2 \\ & = 2\omega_n \langle F'_{[n]}(x_n^\delta)(x^* - x_n^\delta), F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}} \rangle + \|x_{n+1}^\delta - x_n^\delta\|^2 \\ & = 2\omega_n \langle F'_{[n]}(x_n^\delta)(x^* - x_n^\delta) \pm (F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}}), F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}} \rangle \\ & + \|x_{n+1}^\delta - x_n^\delta\|^2 \\ & = 2\omega_n \langle F_{[n]}(x_n^\delta) - F_{[n]}(x^*) - F'_{[n]}(x_n^\delta)(x_n^\delta - x^*) + y - y^{\delta^{[n]}} \\ & F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}} \rangle - 2\omega_n \|F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}}\|^2 + \|x_{n+1}^\delta - x_n^\delta\|^2 \end{aligned}$$

c.s. (*)

$$\stackrel{(2.2)}{\leq} 2\omega_n \left(\eta \|F_{[n]}(x_n^\delta) - F_{[n]}(x^*)\| + \|y - y^{\delta^{[n]}}\| \right) \|F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}}\|$$

$$\begin{aligned}
& -\omega_n \|F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}}\|^2 \\
& \leq 2\omega_n \left(\eta \left(\|F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}}\| + \delta^{[n]} \right) + \delta^{[n]} \right) \|F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}}\| \\
& -\omega_n \|F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}}\|^2 \\
& = \omega_n \|F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}}\| \left(2(\eta + 1)\delta^{[n]} - (1 - 2\eta)\|F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}}\| \right),
\end{aligned}$$

obtendo assim a estimativa desejada.

Em (*) foi usado (1.9) e (2.1) para obter,

$$\|x_{n+1}^\delta - x_n^\delta\|^2 = \omega_n^2 \|F'_{[n]}(x_n^\delta)^*(F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}})\|^2 \leq \omega_n \|F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}}\|^2.$$

■

A seguir, e motivado pelo Lema 2.1, define-se o índice de parada para o método LLK.

Definição 2.1. *Define-se $n_*^\delta := n_*^\delta(y^\delta)$, o índice de parada para o método LLK, como o menor inteiro múltiplo de $p \in \mathbb{N}$ tal que*

$$x_{n_*^\delta}^\delta = x_{n_*^\delta+1}^\delta = \cdots = x_{n_*^\delta+p}^\delta. \quad (2.5)$$

Agora, usando o Lema 2.1 e o conceito de índice de parada para o método LLK, tem-se o seguinte resultado de monotonicidade do erro $\|e_n\| := \|x_n^\delta - x^*\|$:

Lema 2.2. *Sejam x^* , F_i , $i = 0, \dots, p-1$ e x_n^δ como no Lema 2.1 e n_*^δ como definido em (2.5). Então,*

$$\|x_{n+1}^\delta - x^*\| \leq \|x_n^\delta - x^*\|, \quad n = 0, \dots, n_*^\delta, \quad (2.6)$$

e (2.5) implica $\omega_{n_*^\delta+i} = 0$, para todo $i \in \{0, \dots, p-1\}$, isto é

$$\|F_i(x_{n_*^\delta}^\delta) - y^{\delta^i}\| \leq \tau\delta^i, \quad i = 0, \dots, p-1. \quad (2.7)$$

Prova: Nas hipóteses do Lema 2.1, se $\omega_n = 0$, então (2.6) é satisfeito já que nesse caso $x_{n+1}^\delta = x_n^\delta$. Caso contrário, da definição de ω_n em (1.10) e de τ em (2.3) tem-se

$$\|F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}}\| > \tau\delta^{[n]} > \frac{2(1+\eta)}{1-2\eta}\delta^{[n]},$$

o que implica

$$2(1 + \eta)\delta^{[n]} - (1 - 2\eta)\|F_{[n]}(x_n^\delta) - y^{\delta^{[n]}}\| < 0,$$

e dessa forma o lado direito da desigualdade (2.4) é não positivo obtendo assim a desigualdade (2.6) para esse n . A prova da desigualdade (2.6) é completada por indução sobre n . Para $n = 0$, como $x_0^\delta \in B_{\rho/2}(x^*)$, então a desigualdade (2.6) implica $x_1^\delta \in B_{\rho/2}(x^*) \subset B_\rho(x_0)$. Agora, para $0 < n < n_*^\delta$ tal que $x_n^\delta \in B_{\rho/2}(x^*)$, tem-se novamente por (2.6) que $x_{n+1}^\delta \in B_{\rho/2}(x^*) \subset B_\rho(x_0)$, logo é válida para todo $n = 0, \dots, n_*^\delta$, o que completa a prova. Para provar (2.7), usa-se a desigualdade (2.4) com $n = n_*^\delta + i$, $i \in \{0, \dots, p-1\}$. Pela definição de n_*^δ , tem-se que $x_{n_*^\delta+i}^\delta = x_{n_*^\delta}^\delta$ e $[n_*^\delta + i] = i$, assim

$$0 \leq \omega_{n_*^\delta+i} \|F_i(x_{n_*^\delta}^\delta) - y^{\delta^i}\| \left(2(1 + \eta)\delta^i - (1 - 2\eta)\|F_i(x_{n_*^\delta}^\delta) - y^{\delta^i}\| \right),$$

para $i \in \{0, \dots, p-1\}$. Se $\omega_{n_*^\delta+i} \neq 0$ para algum $i \in \{0, \dots, p-1\}$, então necessariamente,

$$2(1 + \eta)\delta^i - (1 - 2\eta)\|F_i(x_{n_*^\delta}^\delta) - y^{\delta^i}\| \geq 0,$$

o que implica por (2.3) que $\|F_i(x_{n_*^\delta}^\delta) - y^{\delta^i}\| < \tau\delta^i$ o que contradiz a definição de $\omega_{n_*^\delta+i}$, logo $\omega_{n_*^\delta+i} = 0$, para todo $i \in \{0, \dots, p-1\}$ e assim obtêm-se (2.7). ■

Note que para $n > n_*^\delta$, tem-se $\omega_n \equiv 0$ e assim $x_n^\delta = x_{n_*^\delta}^\delta$, isto é, o método LLK torna-se estacionário após o índice n_*^δ .

Agora, usando o resultado anterior tem-se a seguinte proposição.

Proposição 2.1. *Nas hipóteses do Lema 2.1, obtêm-se as seguintes estimativas*

$$n_*^\delta (\tau \min_i (\delta^i))^2 \leq \sum_{n=0}^{n_*^\delta-1} \omega_n \|y^{\delta^{[n]}} - F_{[n]}(x_n^\delta)\|^2 \leq \frac{\tau \|x_0 - x^*\|^2}{(1 - 2\eta)\tau - 2(1 + \eta)}, \quad (2.8)$$

e para dados exatos, isto é, $y^{\delta^i} = y^i$, $\forall i = 0, \dots, p-1$, tem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|y^{[n]} - F_{[n]}(x_n)\|^2 < \infty. \quad (2.9)$$

Prova: Para $n = 0, \dots, n_*^\delta - 1$, como $\omega_n = 1$, por definição infere-se que $\delta^{[n]} < \tau^{-1} \|y^{\delta^{[n]}} - F_{[n]}(x_n^\delta)\|$. Chamando de $e_n = x_n - x^*$ e usando (2.4) tem-se,

$$\|e_{n+1}\|^2 - \|e_n\|^2 \leq \omega_n \|y^{\delta^{[n]}} - F_{[n]}(x_n^\delta)\|^2 (2\tau^{-1}(1 + \eta) + 2\eta - 1),$$

o que implica por (2.3),

$$(\tau \delta^{[n]})^2 \leq \omega_n \|y^{\delta^{[n]}} - F_{[n]}(x_n^\delta)\|^2 \leq \frac{\|e_n\|^2 - \|e_{n+1}\|^2}{1 - 2\eta - 2\tau^{-1}(1 + \eta)},$$

e assim,

$$(\tau \min_i(\delta^i))^2 \leq \omega_n \|y^{\delta^{[n]}} - F_{[n]}(x_n^\delta)\|^2 \leq \frac{\tau(\|e_n\|^2 - \|e_{n+1}\|^2)}{(1 - 2\eta)\tau - 2(1 + \eta)}.$$

Somando na última desigualdade em $n = 0, \dots, n_*^\delta - 1$, tem-se,

$$n_*^\delta (\tau \min_i(\delta^i))^2 \leq \sum_{n=0}^{n_*^\delta - 1} \omega_n \|y^{\delta^{[n]}} - F_{[n]}(x_n^\delta)\|^2 \leq \frac{\tau(\|e_0\|^2 - \|e_{n_*^\delta}\|^2)}{(1 - 2\eta)\tau - 2(1 + \eta)},$$

obtendo finalmente,

$$n_*^\delta (\tau \min_i(\delta^i))^2 \leq \sum_{n=0}^{n_*^\delta - 1} \omega_n \|y^{\delta^{[n]}} - F_{[n]}(x_n^\delta)\|^2 \leq \frac{\tau \|x_0 - x^*\|^2}{(1 - 2\eta)\tau - 2(1 + \eta)}.$$

Agora, para dados exatos $\delta^i = 0, \forall i = 0, \dots, p - 1$, de (2.4) se deduz,

$$\|x_{n+1} - x^*\|^2 - \|x_n - x^*\|^2 \leq (2\eta - 1) \|F_{[n]}(x_n) - y^{[n]}\|^2,$$

e somando obtém-se a estimativa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \|F_{[n]}(x_n) - y^{[n]}\|^2 &\leq \frac{\|x_0 - x^*\|^2 - \|x_{N+1} - x^*\|^2}{1 - 2\eta} \\ &\leq \frac{\|x_0 - x^*\|^2}{1 - 2\eta}, \forall N \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

de onde infere-se que a sequência de somas parciais é limitada, e assim finalmente pode-se tomar limite quando $N \rightarrow \infty$ para obter

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|F_{[n]}(x_n) - y^{[n]}\|^2 \leq \frac{\|x_0 - x^*\|^2}{1 - 2\eta} < \infty,$$

de onde obtém-se o resultado. ■

Da Proposição 2.1, especificamente por (2.8), infere-se que necessariamente $n_*^\delta < \infty$ e assim a iteração termina num número finito de passos.

Na seguinte proposição, apresentam-se algumas propriedades das soluções de (1.6) numa bola $B_\rho(x_0)$. A prova feita no presente trabalho melhora a prova feita em [20] (Proposição 4.1), que é incompleta.

Proposição 2.2. *Sejam os operadores F_i , $i = 0, \dots, p-1$ satisfazendo (2.1) e (2.2). Se $x^* \in B_\rho(x_0)$ é uma solução do sistema (1.6), então*

1. *toda outra solução de (1.6), $\tilde{x}^* \in B_\rho(x_0)$ satisfaz,*

$$x^* - \tilde{x}^* \in \mathcal{N}(F'_i(x^*)), \forall i = 0, \dots, p-1,$$

onde $\mathcal{N}(A)$ é o núcleo do operador linear A ,

2. *existe uma x_0 -solução de norma mínima, $x^\dagger \in B_\rho(x_0)$, isto é, x^\dagger é uma solução de (1.6) e satisfaz*

$$\|x^\dagger - x_0\| = \inf_{x \in \mathcal{S}} \|x - x_0\|$$

onde $\mathcal{S} := \{x \in B_\rho(x_0) : x \text{ satisfaz (1.6)}\}$

3. *a x_0 -solução de norma mínima x^\dagger é única e satisfaz*

$$x^\dagger - x_0 \in \left(\bigcap_{i=0}^{p-1} \mathcal{N}(F'_i(x^\dagger)) \right)^\perp.$$

Prova:

1. De (2.2) tem-se que para todo $i \in \{0, \dots, p-1\}$ e $\forall x, \tilde{x} \in B_\rho(x_0)$

$$\|F_i(x) - F_i(\tilde{x})\| - \|F'_i(x)(x - \tilde{x})\| \leq \eta \|F_i(x) - F_i(\tilde{x})\|,$$

e lembrando que $\eta < 1/2$, infere-se,

$$\|F_i(x) - F_i(\tilde{x})\| \leq \frac{1}{1-\eta} \|F'_i(x)(x - \tilde{x})\|.$$

Similarmente tem-se,

$$\frac{1}{1+\eta} \|F'_i(x)(x - \tilde{x})\| \leq \|F_i(x) - F_i(\tilde{x})\|,$$

e assim,

$$\frac{1}{1+\eta} \|F'_i(x)(x-\tilde{x})\| \leq \|F_i(x) - F_i(\tilde{x})\| \leq \frac{1}{1-\eta} \|F'_i(x)(x-\tilde{x})\|, \quad (2.10)$$

logo para $x^*, \tilde{x}^* \in B_\rho(x_0)$ soluções, tem-se $\|F'_i(x^*)(x^* - \tilde{x}^*)\| = 0$, para todo $i \in \{0, \dots, p-1\}$, provando assim o item 1.

2. Defina

$$m := \inf_{x \in \mathcal{S}} \|x - x_0\|,$$

e escolha $\sigma > 0$ tal que $m \leq \|x^* - x_0\| < \sigma < \rho$. Defina agora

$$\mathcal{S}_\sigma := \{x \in \overline{B_\sigma(x_0)} : x \text{ satisfaz (1.6)}\} \subset \mathcal{S},$$

então usando a definição do ínfimo tem-se,

$$\inf_{x \in \mathcal{S}_\sigma} \|x - x_0\| = m.$$

Seja $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_\sigma$ tal que

$$\|x_k - x_0\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} m.$$

Como $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset B_\rho(x_0)$, então é uma sequência limitada e portanto possui uma subsequência fracamente convergente, que se denotará da mesma maneira, e cujo limite fraco será denotado por \tilde{x} . Como os operadores F_i são Fréchet diferenciáveis, então os operadores lineares $F'_i(x^*)$ são limitados e portanto

$$F'_i(x^*)(x_k - x^*) \rightharpoonup F'_i(x^*)(\tilde{x} - x^*), \quad \forall i = 0, \dots, p-1.$$

Da semicontinuidade inferior da norma na topologia fraca num espaço de Hilbert segue que,

$$\|\tilde{x} - x_0\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x_0\|, \quad (2.11)$$

$$\|F'_i(x^*)(\tilde{x} - x^*)\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|F'_i(x^*)(x_k - x^*)\|. \quad (2.12)$$

Como $x_k, x^* \in \mathcal{S}, \forall k \in \mathbb{N}$, pelo item 1 da presente proposição, tem-se

$$\|F'_i(x^*)(x_k - x^*)\| = 0, \quad \forall i = 0, \dots, p-1, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e assim por (2.12), $\|F'_i(x^*)(\tilde{x} - x^*)\| = 0, \forall i = 0, \dots, p-1$. Por (2.11), segue que $\tilde{x} \in B_\sigma(x_0) \subset B_\rho(x_0)$, logo por (2.10) \tilde{x} é solução do sistema (1.6), isto é, $\tilde{x} \in \mathcal{S}_\sigma$ e assim,

$$\|\tilde{x} - x_0\| \geq \inf_{x \in \mathcal{S}_\sigma} \|x - x_0\|.$$

Finalmente, como

$$\inf_{x \in \mathcal{S}_\sigma} \|x - x_0\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x_0\| = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x_0\| \stackrel{(2.11)}{\geq} \|\tilde{x} - x_0\|,$$

infere-se que \tilde{x} é uma x_0 -solução de norma mínima.

3. Defina o operador,

$$F := (F_0, \dots, F_{p-1}) : D = \bigcap_{i=0}^{p-1} D_i \subset X \rightarrow Y^p,$$

então, o problema (1.6) pode se formular como $F(x) = y$, onde $y = (y^0, \dots, y^{p-1})$. Neste caso,

$$\mathcal{N}(F'(x)) = \bigcap_{i=0}^{p-1} \mathcal{N}(F'_i(x)),$$

e como os operadores $F_i, i = 0, \dots, p-1$ satisfazem (2.2), tem-se,

$$\begin{aligned} & \|F(x) - F(\tilde{x}) - F'(x)(x - \tilde{x})\|_{Y^p}^2 \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \|F_i(x) - F_i(\tilde{x}) - F'_i(x)(x - \tilde{x})\|_Y^2 \\ &\leq \eta^2 \sum_{i=0}^{p-1} \|F_i(x) - F_i(\tilde{x})\|^2 = \eta^2 \|F(x) - F(\tilde{x})\|_{Y^p}^2, \end{aligned}$$

para todo $x, \tilde{x} \in B_\rho(x_0)$, ou seja, o operador F satisfaz as hipóteses da Proposição 2.1 de [16], e assim x^\dagger é a única x_0 -solução de norma mínima na bola $B_\rho(x_0)$ e satisfaz,

$$x^\dagger - x_0 \in (\mathcal{N}(F'(x)))^\perp = \left(\bigcap_{i=0}^{p-1} \mathcal{N}(F'_i(x)) \right)^\perp,$$

completando a prova. ■

Agora apresenta-se a prova do primeiro dos resultados principais do presente capítulo, isto é, a convergência local do método de Landeweber-Kaczmarz para dados exatos.

Teorema 2.1. *Assuma que os operadores F_i , $i = 0, \dots, p-1$, são Fréchet diferenciáveis na bola $B_\rho(x_0)$, satisfazendo (2.1), (2.2) e que (1.6) tem uma solução em $B_{\rho/2}(x_0)$. Então, para dados exatos $y^{\delta^i} = y^i$, $i = 0, \dots, p-1$, a sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gerada por (1.9) converge para uma solução de (1.6). Ainda mais, se x^\dagger denota a única x_0 -solução de norma mínima de (1.6) em $B_\rho(x_0)$ e,*

$$\mathcal{N}(F'_i(x^\dagger)) \subset \mathcal{N}(F'_i(x)), \forall i = 0, \dots, p-1, \forall x \in B_\rho(x_0), \quad (2.13)$$

então,

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^\dagger.$$

Prova: Seja \tilde{x}^* uma solução de (1.6) em $B_{\rho/2}(x_0)$. Defina

$$e_n := \tilde{x}^* - x_n.$$

Pelo Lema 2.2, a sequência $\{\|e_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona decrescente limitada inferiormente por 0, logo é convergente para algum $\varepsilon \geq 0$. A prova consiste em mostrar que $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, o que a sua vez implica que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente, assim feito isso, só resta provar que o limite de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma solução do problema (1.6).

Sejam $j, k \in \mathbb{N}_0$ tais que $k \leq j$. Para $k = k_0 \cdot p + k_1$ e $j = j_0 \cdot p + j_1$ com $k_1, j_1 \in \{0, \dots, p-1\}$, seja $k_0 \leq l_0 \leq j_0$ satisfazendo,

$$\sum_{s=0}^{p-1} \|y^s - F_s(x_{l_0 \cdot p + s})\| \leq \sum_{s=0}^{p-1} \|y^s - F_s(x_{m_0 \cdot p + s})\|, \text{ para } k_0 \leq m_0 \leq j_0. \quad (2.14)$$

Defina $l_1 := p-1$ e $l := l_0 \cdot p + l_1$. Então,

$$\|e_j - e_k\| \leq \|e_j - e_l\| + \|e_l - e_k\|,$$

e

$$\begin{aligned} \|e_j - e_l\|^2 &= \langle e_j - e_l, e_j - e_l \rangle \\ &= \|e_j\|^2 - 2\langle e_j, e_l \rangle + \|e_l\|^2 \\ &= \|e_j\|^2 - \|e_l\|^2 - 2\langle e_j, e_l \rangle + 2\langle e_l, e_l \rangle \\ &= \|e_j\|^2 - \|e_l\|^2 + 2\langle e_l - e_j, e_l \rangle. \end{aligned}$$

Analogamente obtêm-se,

$$\|e_l - e_k\|^2 = \|e_k\|^2 - \|e_l\|^2 + 2\langle e_l - e_k, e_l \rangle.$$

Para $k \rightarrow \infty$, $(\|e_j\|^2 - \|e_l\|^2)$ e $(\|e_k\|^2 - \|e_l\|^2)$ tendem a zero. Assim, para mostrar que $\|e_j - e_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, é suficiente provar que $\langle e_l - e_j, e_l \rangle$ e $\langle e_l - e_k, e_l \rangle$ tendem a zero quando $k \rightarrow \infty$. Pela definição do método de Landweber-Kaczmarz (1.8), a desigualdade triangular e a desigualdade de *Cauchy-Schwarz* tem-se,

$$\begin{aligned} |\langle e_l - e_k, e_l \rangle| &= \left| \left\langle \sum_{i=k}^{l-1} (x_i - x_{i+1}), \tilde{x}^* - x_l \right\rangle \right| \\ &= \left| \sum_{i=k}^{l-1} \left\langle F'_{[i]}(x_i)^* (F_{[i]}(x_i) - y^{[i]}), \tilde{x}^* - x_l \right\rangle \right| \\ &= \left| \sum_{i=k}^{l-1} \left\langle F_{[i]}(x_i) - y^{[i]}, F'_{[i]}(x_i) (\tilde{x}^* - x_l) \right\rangle \right| \\ &\leq \sum_{i=k}^{l-1} \|F_{[i]}(x_i) - y^{[i]}\| \|F'_{[i]}(x_i) (\tilde{x}^* - x_l)\|. \end{aligned}$$

Agora é preciso estimar $\|F'_{[i]}(x_i) (\tilde{x}^* - x_l)\|$. Usando (2.2) e a desigualdade triangular tem-se,

$$\begin{aligned} \|F'_{[i]}(x_i) (\tilde{x}^* - x_l)\| &= \|F'_{[i]}(x_i) (\tilde{x}^* - x_i + x_i - x_l)\| \\ &= \|F_{[i]}(\tilde{x}^*) - (F_{[i]}(\tilde{x}^*) - F_{[i]}(x_i) - F'_{[i]}(x_i) (\tilde{x}^* - x_i) \\ &\quad - F_{[i]}(x_l) - (F_{[i]}(x_i) - F_{[i]}(x_l) - F'_{[i]}(x_i) (x_i - x_l))\| \\ &\leq \|F_{[i]}(\tilde{x}^*) - F_{[i]}(x_l)\| + \eta \|F_{[i]}(\tilde{x}^*) - F_{[i]}(x_i)\| \\ &\quad + \eta \|F_{[i]}(x_i) - F_{[i]}(\tilde{x}^*) + F_{[i]}(\tilde{x}^*) - F_{[i]}(x_l)\| \\ &\leq (1 + \eta) \|y^{[i]} - F_{[i]}(x_l)\| + 2\eta \|y^{[i]} - F_{[i]}(x_i)\|. \end{aligned}$$

Combinando as duas últimas estimativas obtêm-se,

$$\begin{aligned} |\langle e_l - e_k, e_l \rangle| &\leq (1 + \eta) \sum_{i=k}^{l-1} \|y^{[i]} - F_{[i]}(x_i)\| \|y^{[i]} - F_{[i]}(x_l)\| \\ &\quad + 2\eta \sum_{i=k}^{l-1} \|y^{[i]} - F_{[i]}(x_i)\|^2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Isto mostra que $\langle e_l - e_k, e_l \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, se

$$\sum_{i=k}^{l-1} \|y^{[i]} - F_{[i]}(x_i)\| \|y^{[i]} - F_{[i]}(x_l)\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad (2.16)$$

já que por (2.9) tem-se,

$$\sum_{i=k}^{l-1} \|y^{[i]} - F_{[i]}(x_i)\|^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Para provar (2.16), é necessário primeiro achar uma estimativa para $\|y^{[i]} - F_{[i]}(x_l)\|$. Fazendo $i = i_0 \cdot p + i_1$ com $i_1 \in \{0, \dots, p-1\}$, tem-se,

$$\begin{aligned} \|y^{[i]} - F_{[i]}(x_l)\| &= \|y^{i_1} - F_{i_1}(x_{l_0 \cdot p + l_1})\| \\ &\leq \|y^{i_1} - F_{i_1}(x_{l_0 \cdot p + i_1})\| + \|F_{i_1}(x_{l_0 \cdot p + i_1}) - F_{i_1}(x_{l_0 \cdot p + l_1})\|, \end{aligned}$$

e por outro lado, usando (2.10), (2.1) e (1.8) obtém-se,

$$\begin{aligned} \|F_{i_1}(x_{l_0 \cdot p + i_1}) - F_{i_1}(x_{l_0 \cdot p + l_1})\| &= \left\| \sum_{s=i_1}^{l_1-1} (F_{i_1}(x_{l_0 \cdot p + s}) - F_{i_1}(x_{l_0 \cdot p + s+1})) \right\| \\ &\leq \sum_{s=i_1}^{l_1-1} \|F_{i_1}(x_{l_0 \cdot p + s}) - F_{i_1}(x_{l_0 \cdot p + s+1})\| \\ &\leq \frac{1}{1-\eta} \sum_{s=i_1}^{l_1-1} \|F'_{i_1}(x_{l_0 \cdot p + s})(x_{l_0 \cdot p + s} - x_{l_0 \cdot p + s+1})\| \\ &\leq \frac{1}{1-\eta} \sum_{s=i_1}^{l_1-1} \|x_{l_0 \cdot p + s} - x_{l_0 \cdot p + s+1}\| \\ &= \frac{1}{1-\eta} \sum_{s=i_1}^{l_1-1} \|F'_s(x_{l_0 \cdot p + s})^*(F_s(x_{l_0 \cdot p + s}) - y^s)\| \\ &\leq \frac{1}{1-\eta} \sum_{s=i_1}^{l_1-1} \|F_s(x_{l_0 \cdot p + s}) - y^s\| \\ &= \frac{1}{1-\eta} \sum_{s=i_1}^{p-2} \|F_s(x_{l_0 \cdot p + s}) - y^s\|, \end{aligned}$$

assim, como

$$\|y^{i_1} - F_{i_1}(x_{l_0 \cdot p + i_1})\| \leq \sum_{s=i_1}^{p-2} \|F_s(x_{l_0 \cdot p + s}) - y^s\|,$$

tem-se,

$$\|y^{[i]} - F_{[i]}(x_l)\| \leq \frac{2-\eta}{1-\eta} \sum_{s=i_1}^{p-2} \|F_s(x_{l_0 \cdot p+s}) - y^s\|.$$

Usando (2.14) e a desigualdade de *Cauchy-Schwarz*, tem-se,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=k}^{l-1} \|y^{[i]} - F_{[i]}(x_i)\| \|y^{[i]} - F_{[i]}(x_l)\| \\ & \leq \sum_{m_0=k_0}^{l_0} \sum_{i_1=0}^{p-1} \|y^{i_1} - F_{i_1}(x_{m_0 \cdot p+i_1})\| \|y^{i_1} - F_{i_1}(x_{l_0 \cdot p+l_1})\| \\ & \leq \frac{2-\eta}{1-\eta} \sum_{m_0=k_0}^{l_0} \left(\sum_{i_1=0}^{p-1} \|y^{i_1} - F_{i_1}(x_{m_0 \cdot p+i_1})\| \sum_{s=i_1}^{p-2} \|y^s - F_s(x_{l_0 \cdot p+s})\| \right) \\ & \leq \frac{2-\eta}{1-\eta} \sum_{m_0=k_0}^{l_0} \left(\sum_{i_1=0}^{p-1} \|y^{i_1} - F_{i_1}(x_{m_0 \cdot p+i_1})\| \right)^2 \\ & \leq \frac{2-\eta}{1-\eta} p \sum_{m_0=k_0}^{l_0} \sum_{i_1=0}^{p-1} \|y^{i_1} - F_{i_1}(x_{m_0 \cdot p+i_1})\|^2 \\ & \leq \frac{2-\eta}{1-\eta} p \sum_{i=k-k_1}^l \|y^{[i]} - F_{[i]}(x_i)\|^2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Como $(k - k_1) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, usando (2.9) prova-se (2.16) e assim por (2.15) tem-se que $\langle e_l - e_k, e_l \rangle \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Analogamente, e tendo cuidado em trocar os índices dos somatórios correspondentes no caso $k \leq j \leq l$ (que acontece quando $l_0 = j_0$), prova-se $\langle e_l - e_j, e_l \rangle \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ e assim $\|e_j - e_l\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ e $\|e_l - e_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, isto é, $\|e_j - e_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Com isto infere-se que $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy, o que implica que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente. Seja x^* o limite. Novamente por (2.9), obtém-se que $\|y^{[n]} - F_{[n]}(x_n)\| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$, o que necessariamente implica,

$$\|y^i - F_i(x^*)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y^i - F_i(x_{n \cdot p+i})\| = 0, \forall i = 0, \dots, p-1,$$

ou seja, x^* é uma solução de (1.6). Agora, pelo item 3 da Proposição

2.2, (1.6) tem uma única x_0 -solução de norma mínima x^\dagger que satisfaz,

$$x^\dagger - x_0 \in \left(\bigcap_{i=0}^{p-1} \mathcal{N}(F'_i(x^\dagger)) \right)^\perp. \quad (2.18)$$

Por (1.9) e (2.13) tem-se,

$$x_{n+1} - x_n = F'_{[n]}(x_n)^*(y^{[n]} - F_{[n]}(x_n)) \in \mathcal{R}(F'_{[n]}(x_n)^*)$$

onde $\mathcal{R}(A)$ é a imagem do operador A , o que implica,

$$x_{n+1} - x_n \in \mathcal{N}(F'_{[n]}(x_n))^\perp \subset \mathcal{N}(F'_{[n]}(x^\dagger))^\perp \subset \left(\bigcap_{i=0}^{p-1} \mathcal{N}(F'_i(x^\dagger)) \right)^\perp,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, logo por indução obtém-se,

$$x_n - x_0 \in \left(\bigcap_{i=0}^{p-1} \mathcal{N}(F'_i(x^\dagger)) \right)^\perp, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, como $\left(\bigcap_{i=0}^{p-1} \mathcal{N}(F'_i(x^\dagger)) \right)^\perp$ é fechado, tomando limite conclui-se,

$$x^* - x_0 \in \left(\bigcap_{i=0}^{p-1} \mathcal{N}(F'_i(x^\dagger)) \right)^\perp.$$

Finalmente,

$$x^\dagger - x^* = x^\dagger - x_0 + x_0 - x^* \in \left(\bigcap_{i=0}^{p-1} \mathcal{N}(F'_i(x^\dagger)) \right)^\perp,$$

e como $x^\dagger - x^* \in \bigcap_{i=0}^{p-1} \mathcal{N}(F'_i(x^\dagger))$, infere-se que $x^* = x^\dagger$, completando assim a prova. \blacksquare

A seguir, apresenta-se o último resultado do presente capítulo, isto é, o método LLK (1.9), (1.10) junto ao critério de parada (2.5) é um método de regularização. A prova feita no presente trabalho melhora a prova feita em [20] (Teorema 4.4), que é incompleta.

Teorema 2.2. *Sob as hipóteses do Teorema 2.1, para dados satisfazendo (1.7) e com n_δ^* definido como em (2.5), a iteração do método LLK, $x_{n_\delta^*}^\delta$, converge para uma solução de (1.6) em $B_{\rho/2}(x_0)$ quando $\delta \rightarrow 0$. Se adicionalmente vale (2.13), então*

$$x_{n_\delta^*}^\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} x^\dagger.$$

Prova: Seja $x^* \in B_{\rho/2}(x_0)$ o limite da sequência do método de Landweber-Kaczmarz para dados exatos (Teorema 2.1) e seja $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^p$ uma sequência tal que $\delta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \in \mathbb{R}^p$. Defina $y^{\delta_k} := (y^{\delta_k})_{i=0}^{p-1}$, $k \in \mathbb{N}$, $\{y^{\delta_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ a sequência correspondente de vetores de dados com ruído, e seja $n_k := n_*^{\delta_k}(y^{\delta_k})$ o correspondente índice de parada dado por (2.5) aplicado ao par (δ_k, y^{δ_k}) .

Primeiro suponha que $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tem um ponto de acumulação (com relação à topologia da ordem em \mathbb{N}) finito $n \in \mathbb{N}$, então sem perda de generalidade pode-se assumir que para k grande $n_k = n$. Assim, para k grande, por (2.7) tem-se,

$$\|y^{\delta_k^i} - F_i(x_n^{\delta_k})\| \leq \tau \delta_k^i, \forall i = 0, \dots, p-1. \quad (2.19)$$

Pela continuidade de $F_i, F_i'(x), i = 0, \dots, p-1$, na bola $B_\rho(x_0)$, para n fixo, $x_n^{\delta_k}$ depende continuamente de y^{δ_k} , e assim por (2.19),

$$x_n^{\delta_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_n \text{ e } \|y^{\delta_k^i} - F_i(x_n^{\delta_k})\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \forall i = 0, \dots, p-1,$$

ou seja,

$$F_i(x_n^{\delta_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F_i(x_n) = y^i, \forall i = 0, \dots, p-1,$$

isto é, a n -ésima iteração de Landweber-Kaczmarz, x_n , para dados exatos é uma solução de (1.6) e assim a iteração acaba com $x^* = x_n$ e $x_{n_k}^{\delta_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^*$, para a sequência $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergindo para $0 \in \mathbb{R}^p$ arbitrária.

Só falta considerar então o caso $n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, que é o caso observado geralmente na prática. Seja $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, então pelo Lema 2.2 tem-se que para $n_k > n$,

$$\|x_{n_k}^{\delta_k} - x^*\| \leq \|x_n^{\delta_k} - x^*\| \leq \|x_n^{\delta_k} - x_n\| + \|x_n - x^*\|.$$

Dado $\epsilon > 0$, pelo Teorema 2.1, existe $n_1 := n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\|x_n - x^*\| < \epsilon/2, \forall n \geq n_1.$$

Por outro lado, como já foi apontado, $x_{n_1}^{\delta_k}$ depende continuamente de y^{δ_k} , logo $x_{n_1}^{\delta_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_{n_1}$, o que implica que existe $k_1 := k_1(n_1) \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\|x_{n_1}^{\delta_k} - x_{n_1}\| < \epsilon/2, \forall k > k_1,$$

portanto,

$$\|x_{n_k}^{\delta_k} - x^*\| < \epsilon, \forall k > k_1(n_1(\epsilon)) : n_k > n_1(\epsilon),$$

isto é,

$$x_{n_k}^{\delta_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^*.$$

Finalmente, se (2.13) vale, então como na prova do Teorema 2.1 tem-se,

$$x_{n_k}^{\delta_k} - x_0 \in \left(\bigcap_{i=0}^{p-1} \mathcal{N}(F'_i(x^\dagger)) \right)^\perp, \forall k \in \mathbb{N},$$

portanto, fazendo $k \rightarrow \infty$ e usando o mesmo argumento que no Teorema 2.1 obtém-se $x^\dagger = x^*$, concluindo assim a prova. ■

Capítulo 3

Taxas de Convergência

Neste capítulo serão apresentadas duas versões do método de Landweber-Kaczmarz para *operadores em blocos*, a saber, a versão não simétrica (**LK**) e simétrica (**sLK**). Para essas versões, obtém-se taxas de convergência e também condições suficientes para garantir essas taxas.

3.1 Problemas Inversos em Análise

Os problemas inversos a serem considerados são aqueles onde o problema direto está dado por operadores com estrutura de bloco.

Sejam

$$A_i : X \rightarrow Y_i, i = 0, \dots, p-1,$$

p operadores *lineares* onde $X, Y_i, i = 0, \dots, p-1$, são espaços de Hilbert reais. Quando for necessário se denotará por $X_{\mathbb{C}}$ a versão *complexificada* do espaço X , isto é, $X_{\mathbb{C}} = \{x_1 + ix_2 : x_1, x_2 \in X\}$. O objetivo aqui é resolver o sistema de p equações,

$$A_i x = y_i, i = 0, \dots, p-1, \tag{3.1}$$

onde os dados y_i , no caso de ser dados com ruído serão denotados por y_i^δ , e assume-se que o sistema é mal posto ou mal condicionado. Na sequência, as variáveis em negrito denotarão aquelas com estrutura de bloco, isto é, elementos de espaços produto. Para resumir o sistema como uma equação, definem-se o operador $\hat{\mathbf{A}}$ e o vetor de dados $\hat{\mathbf{y}}$ por

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_{p-1} \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Assim, $\widehat{\mathbf{A}} : X \rightarrow \mathbf{Y}$, onde \mathbf{Y} é o espaço de Hilbert $\mathbf{Y} = (Y_0, \dots, Y_{p-1})$ e portanto agora a equação a resolver é

$$\widehat{\mathbf{A}}x = \widehat{\mathbf{y}}. \quad (3.2)$$

Para controlar um possível mal condicionamento, incorporam-se p operadores de pré-condicionamento $M_i : Y_i \rightarrow Y_i$, $i = 0, \dots, p-1$, auto-adjuntos definidos positivos, para assim obter a versão pré-condicionada do sistema (3.1),

$$M_i^{\frac{1}{2}} A_i x = M_i^{\frac{1}{2}} y_i, \quad i = 0, \dots, p-1, \quad (3.3)$$

sistema que é obviamente equivalente ao sistema (3.1) já que M_i é definido positivo para $i = 0, \dots, p-1$. Além do anterior, reunem-se os operadores de pré-condicionamento numa matriz diagonal por blocos \mathbf{M} ,

$$\mathbf{M} = \text{diag}(M_i), \quad i = 0, \dots, p-1.$$

Como será conveniente trabalhar com operadores e dados pré-condicionados, definem-se

$$\mathbf{A} := \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} M_0^{\frac{1}{2}} A_0 \\ \vdots \\ M_{p-1}^{\frac{1}{2}} A_{p-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} := \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} M_0^{\frac{1}{2}} y_0 \\ \vdots \\ M_{p-1}^{\frac{1}{2}} y_{p-1} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

e os dados com ruído serão representados por $\widehat{\mathbf{y}}^\delta$ e $\mathbf{y}^\delta = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{y}}^\delta$. Além do anterior, como é usual, assume-se uma cota sobre o nível de ruído,

$$\|y_i^\delta - y_i\| \leq \delta_i, \quad i = 0, \dots, p-1$$

onde δ_i é a quantidade de ruído na i -ésima equação. Com isto, define-se o nível de ruído global por δ ,

$$\|\widehat{\mathbf{y}}^\delta - \widehat{\mathbf{y}}\|^2 = \sum_{i=0}^{p-1} \|y_i^\delta - y_i\|^2 \leq \sum_{i=0}^{p-1} \delta_i^2 =: \delta^2,$$

e o nível de ruído global na versão pré-condicionada por

$$\|\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}\|^2 = \sum_{i=0}^{p-1} \|M_i^{\frac{1}{2}}(y_i^\delta - y_i)\|^2 \leq \|\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\|^2 \delta^2 =: \delta_M^2. \quad (3.5)$$

3.2 Métodos Tipo Kaczmarz e Operadores em Bloco

Nesta seção serão definidas as versões simétrica e não simétrica da iteração de Landweber-Kaczmarz aplicada ao sistema pré-condicionado (3.3) e se expressarão como iterações de Landweber pré-condicionadas para operadores em blocos. Daqui em diante será requerida a seguinte cota para a norma dos operadores pré-condicionados

$$\|A_i^* M_i A_i\| < 2, \forall i = 0, \dots, p-1. \quad (3.6)$$

Para operadores de pré-condicionamento limitados como os usados aqui, esta condição é sempre satisfeita introduzindo um tamanho de passo $\tau > 0$, isto é, usando pré-condicionadores τM_i em vez de M_i .

3.2.1 Método Landweber-Kaczmarz não Simétrico com Pré-Condicionamento

Define-se o método de Landweber-Kaczmarz (**LK**) clássico não simétrico com pré-condicionamento, como a sequência de soluções aproximadas $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gerada por

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= \bar{x}_k - A_{[k]}^* M_{[k]} (A_{[k]} \bar{x}_k - y_{[k]}^\delta), \quad [k] = k \pmod{p} \\ x_n &:= \bar{x}_{np}, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $\bar{x}_0 = x_0$ é o elemento inicial e a aproximação deve ser interpretada como $x_n = x_n^\delta$ no caso de usar dados com ruído.

Observação 3.1. *Para os métodos tipo Landweber-Kaczmarz, como (3.7), a condição (3.6) aparece como uma condição natural visando garantir que os operadores $I - A_i^* M_i A_i$ sejam não expansivos. Note que não se impõe uma cota específica para a norma dos operadores M_i em si, senão só cotas para a norma dos operadores M_i em combinação com os operadores A_i . De fato, é de esperar que grande parte da presente análise, (por exemplo, no caso de dados exatos) ainda seja válida para operadores auto-adjuntos ilimitados M_i que satisfaçam (3.6). No entanto, no caso de dados com ruído, em geral, o uso de operadores M_i ilimitados gera sérios problemas (note que M_i atua sobre y_i^δ , que pode não estar bem definido). Nessa situação pode-se considerar $M_i(y_i^\delta - y_i)$ (se está definido) como nível de ruído individual e exigir que essa quantidade seja limitada. Para evitar essas dificuldades, ao longo do presente trabalho assume-se que os operadores M_i são limitados.*

Seja o operador triangular inferior $\mathbf{L} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$ definido como a parte do operador $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ baixo a diagonal, isto é,

$$\mathbf{L} := \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ M_1^{\frac{1}{2}} A_1 A_0^* M_0^{\frac{1}{2}} & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & 0 & 0 \\ M_{p-1}^{\frac{1}{2}} A_{p-1} A_0^* M_0^{\frac{1}{2}} & \cdots & M_{p-1}^{\frac{1}{2}} A_{p-1} A_{p-2}^* M_{p-2}^{\frac{1}{2}} & & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

então, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 3.1. *Seja x_n a iteração gerada pelo método de Landweber-Kaczmarz (3.7). Então, a iteração (3.7) pode expressar-se como um método de Landweber por blocos pré-condicionados (não simétrico) da forma*

$$x_{n+1} = x_n - \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B (\mathbf{A} x_n - \mathbf{y}^\delta) \quad (3.9)$$

onde

$$\mathbf{M}_B = (\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1}, \quad (3.10)$$

\mathbf{L} como em (3.8) e \mathbf{I} é o operador identidade em \mathbf{Y} .

Prova: A prova será realizada fazendo indução sobre o número de blocos p . Para $p = 1$ o resultado é trivialmente certo. Seja então $p > 1$ e $0 < l < p$, dois números naturais, e seja $x_{n+1}^{(l)}$ o vetor gerado pela iteração (3.7) a partir de x_n usando apenas os primeiros l blocos, e suponha que a fórmula (3.9) é válida para os primeiros l blocos, ou seja,

$$x_{n+1}^{(l)} = x_n - [\mathbf{A}^*]_l [\mathbf{M}_B]_l ([\mathbf{A}]_l x_n - [\mathbf{y}^\delta]_l),$$

onde $[\mathbf{T}]_l$ representa os l primeiros blocos do operador \mathbf{T} ou é a parte principal da ordem $l \times l$, dependendo da estrutura de \mathbf{T} . Logo, $x_{n+1}^{(l)}$ pode escrever-se por (3.7) como

$$x_{n+1}^{(l+1)} = x_{n+1}^{(l)} - A_l^* M_l (A_l x_{n+1}^{(l)} - y_l^\delta),$$

e assim combinando estas duas últimas expressões obtém-se

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(l+1)} &= x_n - [\mathbf{A}^*]_l [\mathbf{M}_B]_l ([\mathbf{A}]_l x_n - [\mathbf{y}^\delta]_l) - A_l^* M_l (A_l x_{n+1}^{(l)} - y_l^\delta) \\ &= x_n - [\mathbf{A}^*]_l [\mathbf{M}_B]_l ([\mathbf{A}]_l x_n - [\mathbf{y}^\delta]_l) + \\ &\quad - A_l^* M_l (A_l x_n - A_l [\mathbf{A}^*]_l [\mathbf{M}_B]_l ([\mathbf{A}]_l x_n - [\mathbf{y}^\delta]_l) - y_l^\delta) \\ &= x_n - ([\mathbf{A}^*]_l A_l^* M_l^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \begin{pmatrix} [\mathbf{M}_B]_l ([\mathbf{A}]_l x_n - [\mathbf{y}^\delta]_l) \\ M_l^{\frac{1}{2}} A_l x_n - M_l^{\frac{1}{2}} y_l^\delta - M_l^{\frac{1}{2}} A_l [\mathbf{A}^*]_l [\mathbf{M}_B]_l ([\mathbf{A}]_l x_n - [\mathbf{y}^\delta]_l) \end{pmatrix} \\
&= x_n - ([\mathbf{A}^*]_l \quad A_l^* M_l^{\frac{1}{2}}) \\
& \cdot \begin{pmatrix} [\mathbf{M}_B]_l & 0 \\ -M_l^{\frac{1}{2}} A_l [\mathbf{A}^*]_l [\mathbf{M}_B]_l & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\mathbf{A}]_l x_n - [\mathbf{y}^\delta]_l \\ M_l^{\frac{1}{2}} A_l x_n - M_l^{\frac{1}{2}} y_l^\delta \end{pmatrix} \\
&\stackrel{(*)}{=} x_n - [\mathbf{A}^*]_{l+1} \begin{pmatrix} [\mathbf{M}_B]_l^{-1} & 0 \\ M_l^{\frac{1}{2}} A_l [\mathbf{A}^*]_l & I \end{pmatrix}^{-1} \cdot [\mathbf{A}x_n - \mathbf{y}^\delta]_{l+1} \\
&= x_n - [\mathbf{A}^*]_{l+1} \begin{pmatrix} [\mathbf{I} + \mathbf{L}]_l^{-1} & 0 \\ M_l^{\frac{1}{2}} A_l [\mathbf{A}^*]_l & I \end{pmatrix}^{-1} \cdot [\mathbf{A}x_n - \mathbf{y}^\delta]_{l+1} \\
&= x_n - [\mathbf{A}^*]_{l+1} [\mathbf{I} + \mathbf{L}]_{l+1}^{-1} [\mathbf{A}x_n - \mathbf{y}^\delta]_{l+1} \\
&= x_n - [\mathbf{A}^*]_{l+1} [\mathbf{M}_B]_{l+1} [\mathbf{A}x_n - \mathbf{y}^\delta]_{l+1} \\
&= x_n - [\mathbf{A}^*]_{l+1} [\mathbf{M}_B]_{l+1} ([\mathbf{A}]_{l+1} x_n - [\mathbf{y}^\delta]_{l+1}),
\end{aligned}$$

que por indução dá o resultado desejado. Em (*) se usou a seguinte identidade: Se C e F são operadores inversíveis, então

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ E & F \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ -F^{-1}EC^{-1} & F^{-1} \end{pmatrix}.$$

■

3.2.2 Método Landweber-Kaczmarz Simétrico com Pré-Condicionamento

Pelo visto na subsecção anterior, a iteração (3.7) é equivalente a (3.9), onde o operador de pré-condicionamento \mathbf{M}_B é não simétrico, por essa razão é que o método (3.7) é chamado método de Landweber-Kaczmarz não simétrico. Agora, se em (3.7) se faz um p -ciclo usual seguido de outro p -ciclo onde a ordem das equações é invertida completando assim um $2p$ -ciclo, então tem-se o método de Landweber-Kaczmarz simétrico com pré-condicionamento (**sLK**), como a sequên-

cia de soluções aproximadas $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gerada por,

$$\bar{x}_{k+1} = \begin{cases} \bar{x}_k - A_{[k]}^* M_{[k]} (A_{[k]} \bar{x}_k - y_{[k]}^\delta), & \text{se } 0 \leq n \bmod 2p \leq p-1 \\ \bar{x}_k - A_{p-1-[k]}^* M_{p-1-[k]} (A_{p-1-[k]} \bar{x}_k - y_{p-1-[k]}^\delta), & \text{se } p \leq n \bmod 2p \leq 2p-1 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$x_n := \bar{x}_{n/2p}, n = 0, 1, \dots \quad [n] = n \bmod p,$$

onde $\bar{x}_0 = x_0$ é o elemento inicial e a aproximação deve ser interpretada como $x_n = x_n^\delta$ no caso de usar dados com ruído.

Agora, para simplificar a notação, usando (3.9) obtém-se $x_{n+1} = (I - G)x_n + C_B$, onde $G = \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B \mathbf{A}$ e $C_B = \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B \mathbf{y}^\delta$. Aplicando a iteração (3.7) durante um p -ciclo, tem-se que a equivalência entre as iterações (3.7) e (3.9) pode escrever-se como

$$I - G = (I - G_{p-1})(I - G_{p-2}) \cdots (I - G_0), \quad (3.12)$$

onde $G_i = A_i^* M_i A_i, i = 0, \dots, p-1$. Agora, como no método **sLK** se faz um p -ciclo seguido de outro p -ciclo em ordem inversa, e como os operadores $I - G_i$ são auto-adjuntos, então, usando o mesmo raciocínio que em (3.12) obtém-se que um $2p$ -ciclo do método **sLK** pode escrever-se como

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (I - G)^*((I - G)x_n + C_B) + \tilde{C}_B \\ &= (I - G)^*(I - G)x_n + (I - G)^*C_B + \tilde{C}_B, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde $\tilde{C}_B = \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B^* \mathbf{y}^\delta$. Assim, para o método **sLK** tem-se o seguinte resultado, que é similar ao Teorema 3.1.

Teorema 3.2. *Seja x_n a iteração gerada pelo método de Landweber-Kaczmarz simétrico (3.11). Então, a iteração (3.11) pode expressar-se como um método de Landweber por blocos pré-condicionados (simétrico) da forma*

$$x_{n+1} = x_n - \mathbf{A}^* \mathbf{M}_{SB} (\mathbf{A} x_n - \mathbf{y}^\delta), \quad (3.14)$$

onde

$$\mathbf{M}_{SB} = \mathbf{M}_B^* (2\mathbf{I} - \text{diag}(M_i^{\frac{1}{2}} A_i A_i^* M_i^{\frac{1}{2}})) \mathbf{M}_B, \quad (3.15)$$

e $\mathbf{L}, \mathbf{I}, \mathbf{M}_B$ são como no Teorema 3.1.

Prova: Por (3.12) e (3.13) tem-se,

$$\begin{aligned}
(I - G)^*(I - G) &= (I - \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B^* \mathbf{A})(I - \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B \mathbf{A}) \\
&= I - \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B \mathbf{A} - \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B^* \mathbf{A} + \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B^* \mathbf{A} \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B \mathbf{A} \\
&= I - \mathbf{A}^* (\mathbf{M}_B + \mathbf{M}_B^* - \mathbf{M}_B^* \mathbf{A} \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B) \mathbf{A} \\
&= I - \mathbf{A}^* [\mathbf{M}_B^* (\mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B) + \\
&\quad (\mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{M}_B^* \mathbf{A} \mathbf{A}^*) \mathbf{M}_B] \mathbf{A} \\
&= I - \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B^* [\mathbf{M}_B^{-1} - \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{A}^* + \\
&\quad (\mathbf{M}_B^*)^{-1} - \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{A}^*] \mathbf{M}_B \mathbf{A} \\
&\stackrel{(3.10)}{=} I - \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B^* [2\mathbf{I} + \mathbf{L} + \mathbf{L}^* - \mathbf{A} \mathbf{A}^*] \mathbf{M}_B \mathbf{A} \\
&= I - \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B^* [2\mathbf{I} - \mathbf{D}] \mathbf{M}_B \mathbf{A},
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{D} = \text{diag}(M_i^{\frac{1}{2}} A_i A_i^* M_i^{\frac{1}{2}})$ é o operador em blocos que contém só a diagonal do operador $\mathbf{A} \mathbf{A}^*$. Logo, chamando $\mathbf{M}_{SB} := \mathbf{M}_B^* [2\mathbf{I} - \mathbf{D}] \mathbf{M}_B$ em (3.13), tem-se

$$x_{n+1} = (I - \mathbf{A}^* \mathbf{M}_{SB} \mathbf{A}) x_n + (I - G^*) C_B + \tilde{C}_B.$$

Agora, para o termo $(I - G^*) C_B + \tilde{C}_B$, tem-se,

$$\begin{aligned}
(I - G^*) C_B + \tilde{C}_B &= ((I - \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B^* \mathbf{A}) \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B + \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B^*) \mathbf{y}^\delta \\
&= \mathbf{A}^* (\mathbf{M}_B - \mathbf{M}_B^* \mathbf{A} \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B + \mathbf{M}_B^*) \mathbf{y}^\delta \\
&= \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B^* ((\mathbf{M}_B^*)^{-1} - \mathbf{A} \mathbf{A}^* + \mathbf{M}_B^{-1}) \mathbf{M}_B \mathbf{y}^\delta \\
&\stackrel{(3.10)}{=} \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B^* (\mathbf{I} + \mathbf{L}^* - \mathbf{A} \mathbf{A}^* + \mathbf{I} + \mathbf{L}) \mathbf{M}_B \mathbf{y}^\delta \\
&= \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B^* (2\mathbf{I} - \mathbf{D}) \mathbf{M}_B \mathbf{y}^\delta \\
&= \mathbf{A}^* \mathbf{M}_{SB} \mathbf{y}^\delta,
\end{aligned}$$

e assim obtém-se a expressão (3.14) completando a prova. ■

3.3 Taxas de Convergência para o Método Landweber-Kaczmarz não Simétrico

Na presente secção se apresenta a análise de convergência e se estabelecem as taxas de convergência para o método **LK** (3.7). A principal dificuldade em comparação ao método **sLK**, é que o operador $\mathbf{A}^*\mathbf{M}_B\mathbf{A}$ não é auto-adjunto, salvo em casos triviais. Assim, a análise clássica baseada em operadores auto-adjuntos não pode ser aplicada.

Como já foi apontado, a equivalência entre as iterações (3.7) e (3.9) está dada por (3.12) e, além do anterior, define-se a extensão natural do operador G para $X_{\mathbb{C}}$ como $G(u) = G(x + iy) := G(x) + iG(y)$, $\forall u = x + iy \in X_{\mathbb{C}}$. Assim, tem-se o seguinte resultado.

Lema 3.1. *Se (3.6) é válida, então G é um operador acretivo, isto é, satisfaz*

$$\operatorname{Re}\langle Gx, x \rangle_{X_{\mathbb{C}}} \geq 0, \forall x \in X_{\mathbb{C}}.$$

Prova: Por definição, $\forall i = 0, \dots, p-1$, o operador $G_i = A_i^*M_iA_i$ é simétrico, semidefinido positivo com norma limitada por 2, o que implica que $\|I - G_i\| \leq 1$, logo por (3.12) tem-se $\|I - G\| \leq 1$. Assim

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle Gx, x \rangle_{X_{\mathbb{C}}} &= \langle x, x \rangle_{X_{\mathbb{C}}} - \operatorname{Re}\langle (I - G)x, x \rangle_{X_{\mathbb{C}}} \\ &\stackrel{c.s.}{\geq} \|x\|_{X_{\mathbb{C}}}^2 - \|I - G\| \|x\|_{X_{\mathbb{C}}}^2 \geq 0, \end{aligned}$$

onde *c.s* significa que foi usada a desigualdade de *Cauchy-Schwarz*. ■

Observação 3.2. *Segue do Lema 3.1 que o espectro de G está contido no semi espaço positivo, $\sigma(G) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0\}$ e que a conhecida estimativa*

$$\|(G + tI)^{-1}\| \leq C \frac{1}{t}, \forall t > 0,$$

é válida (veja o Teorema 3.2 do capítulo 3 de [18]), isto é, G é um operador fracamente setorial (veja [22, 23]). Para esses operadores as potências fracionais G^α para $\alpha > 0$ estão bem definidas mediante uma integral de tipo Dunford-Schwartz.

No seguinte lema obtém-se uma estimativa para o erro propagado.

Lema 3.2. *Se (3.6) é válida, e x_n^δ é o vetor gerado pelo método (3.9) com dados perturbados e x_n é gerado por (3.9) com dados exatos, então existe uma constante $C = C(\|\mathbf{A}\|, \|\mathbf{M}_B\|)$ tal que*

$$\|x_n^\delta - x_n\| \leq Cn\delta_M. \quad (3.16)$$

Se adicionalmente tem-se

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|(I - \mathbf{M}_B \mathbf{A} \mathbf{A}^*)^n\| \leq C_1, \quad (3.17)$$

com C_1 constante, então

$$\|x_n^\delta - x_n\| \leq C \sqrt{n} \delta_M, \quad (3.18)$$

onde $C = C(C_1, \|\mathbf{M}_B\|, \|\mathbf{M}_B^{-1}\|)$ não depende de n .

Prova: Aplicando iteradamente (3.9) obtém-se

$$x_n^\delta = (I - \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B \mathbf{A})^n x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} (I - \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B \mathbf{A})^j \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B \mathbf{y}^\delta$$

o que implica

$$x_n^\delta - x_n = \sum_{j=0}^{n-1} (I - \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B \mathbf{A})^j \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B (\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}),$$

logo como $I - G$ é não expansivo,

$$\|x_n^\delta - x_n\| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \|I - G\|^j \|\mathbf{A}^* \mathbf{M}_B\| \|\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}\| \leq C n \delta_M,$$

onde $C = \|\mathbf{A}^* \mathbf{M}_B\|$. Agora, para provar (3.18), denotando

$$g_L(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (1-x)^j,$$

tem-se,

$$\begin{aligned} & \|x_n^\delta - x_n\|^2 \\ &= \langle g_L(\mathbf{A}^* \mathbf{M}_B \mathbf{A}) \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B (\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}), g_L(\mathbf{A}^* \mathbf{M}_B \mathbf{A}) \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B (\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{A} \mathbf{A}^* g_L(\mathbf{M}_B \mathbf{A} \mathbf{A}^*) \mathbf{M}_B (\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}), g_L(\mathbf{M}_B \mathbf{A} \mathbf{A}^*) \mathbf{M}_B (\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{M}_B^{-1} (\mathbf{M}_B \mathbf{A} \mathbf{A}^* g_L(\mathbf{M}_B \mathbf{A} \mathbf{A}^*)) \mathbf{M}_B (\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}), g_L(\mathbf{M}_B \mathbf{A} \mathbf{A}^*) \mathbf{M}_B (\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}) \rangle \\ &\stackrel{(*)}{=} \langle \mathbf{M}_B^{-1} (I - (I - \mathbf{M}_B \mathbf{A} \mathbf{A}^*)^n) \mathbf{M}_B (\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}), g_L(\mathbf{M}_B \mathbf{A} \mathbf{A}^*) \mathbf{M}_B (\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}) \rangle \\ &\leq \stackrel{c.s}{\| \mathbf{M}_B^{-1} \| \| I - (I - \mathbf{M}_B \mathbf{A} \mathbf{A}^*)^n \| \| g_L(\mathbf{M}_B \mathbf{A} \mathbf{A}^*) \| \| \mathbf{M}_B (\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}) \|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(3.17)}{\leq} \|\mathbf{M}_B^{-1}\| (1 + C_1) \left(\sum_{j=0}^{n-1} \|(\mathbf{I} - \mathbf{M}_B \mathbf{A} \mathbf{A}^*)^j\| \right) \|\mathbf{M}_B\|^2 \|\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}\|^2 \\
& \leq \|\mathbf{M}_B^{-1}\| \|\mathbf{M}_B\|^2 (1 + C_1) C_1 n \delta_M^2 = C^2 n \delta_M^2,
\end{aligned}$$

com $C := \|\mathbf{M}_B\| \sqrt{\|\mathbf{M}_B^{-1}\| (1 + C_1) C_1}$, de onde obtém-se (3.18) completando assim a prova. Em (*) foi usada a identidade

$$x \sum_{j=0}^{n-1} (1-x)^j = 1 - (1-x)^n.$$

■

Agora, para estimar o erro de aproximação $\|x_n - x^\dagger\|$, é necessário o seguinte lema que estabelece que $I - G$ é uma contração para os elementos que não pertencem ao núcleo de G .

Lema 3.3. *Sejam $\eta > 0$ e $x \in X_{\mathbb{C}}$ com $\|x\|_{X_{\mathbb{C}}} = 1$. Suponha que (3.6) é válida. Se*

$$\operatorname{Re}\langle Gx, x \rangle_{X_{\mathbb{C}}} \geq \eta,$$

então existe $0 < \gamma < 1$ dependendo de η, p e $\left(\|A_i^* M_i^{\frac{1}{2}}\|\right)_{i=0}^{p-1}$ tal que

$$\|(I - G)x\|_{X_{\mathbb{C}}}^2 \leq 1 - \gamma. \quad (3.19)$$

Prova: Seja $\{E_{\lambda,i}\}_\lambda$ a família espectral associada com o operador $A_i^* M_i A_i$, $i = 0, \dots, p-1$, definidos em $X_{\mathbb{C}}$. Nesta prova, a norma em $X_{\mathbb{C}}$ e a norma de operadores serão denotadas por $\|\cdot\|$. Além do anterior, para cada $\xi > 0$, considere os projetores ortogonais

$$P_{\xi,i} = \int_{\lambda \leq \xi} dE_{\lambda,i} \quad Q_{\xi,i} = I - P_{\xi,i} = \int_{\lambda > \xi} dE_{\lambda,i}.$$

Note que $\|P_{\xi,i}\| = \|Q_{\xi,i}\| = 1$ e $\|P_{\xi,i}x\|^2 + \|Q_{\xi,i}x\|^2 = \|x\|^2$, $\forall x \in X_{\mathbb{C}}$. Seja $0 < \xi < 1$ tal que $(1-\xi)^2 \geq (1 - \|A_i^* M_i A_i\|)^2$, $\forall i = 0, \dots, p-1$. Por (3.6), tem-se que $\max_i \|A_i^* M_i^{\frac{1}{2}}\| < \sqrt{2}$ e portanto ξ pode ser escolhido de um intervalo $(0, \xi_0)$.

Agora, defina $\theta := 1 - (1 - \xi)^2 = 2\xi - \xi^2 > \xi > 0$. Usando cálculo

espectral, para o ξ escolhido tem-se

$$\begin{aligned}
\|(I - A_i^* M_i A_i)x\|^2 &= \int_{\lambda \leq \xi} (1 - \lambda)^2 d\|E_{\lambda,ix}\|^2 + \int_{\lambda > \xi} (1 - \lambda)^2 d\|E_{\lambda,ix}\|^2 \\
&\leq \|P_{\xi,ix}\|^2 + \max\{(1 - \xi)^2, (1 - \|A_i^* M_i A_i\|)^2\} \|Q_{\xi,ix}\|^2 \\
&= \|P_{\xi,ix}\|^2 + (1 - \xi)^2 (\|x\|^2 - \|P_{\xi,ix}\|^2) \\
&= (1 - (1 - \xi)^2) \|P_{\xi,ix}\|^2 + (1 - \xi)^2 \|x\|^2 \\
&= \theta \|P_{\xi,ix}\|^2 + (1 - \theta) \|x\|^2,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

e

$$\begin{aligned}
\|A_i^* M_i A_i\|^2 &= \int_{\lambda \leq \xi} \lambda^2 d\|E_{\lambda,ix}\|^2 + \int_{\lambda > \xi} \lambda^2 d\|E_{\lambda,ix}\|^2 \\
&\leq \xi^2 \|P_{\xi,ix}\|^2 + \|M_i^{\frac{1}{2}} A_i\|^4 \|Q_{\xi,ix}\|^2 \\
&\leq \xi^2 \|P_{\xi,ix}\|^2 + 4(\|x\|^2 - \|P_{\xi,ix}\|^2).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Agora, defina para cada $k \leq p - 1$ os operadores

$$H_k = \prod_{i=0}^k (I - A_i^* M_i A_i) \Leftrightarrow H_k = H_{k-1} - A_k^* M_k A_k H_{k-1}, H_0 = (I - A_0^* M_0 A_0).$$

É claro, por (3.6), que $\|H_k\| \leq 1$, e por outro lado, da expressão recursiva

$$\begin{aligned}
H_k - I &= H_{k-1} - I - A_k^* M_k A_k (H_{k-1} - I) - A_k^* M_k A_k \\
&= (I - A_k^* M_k A_k)(H_{k-1} - I) - A_k^* M_k A_k
\end{aligned}$$

se infere, usando indução, que para $x \in X_{\mathbb{C}}$ qualquer,

$$\|(H_k - I)x\| \leq \|(H_{k-1} - I)x\| + \|A_k^* M_k A_k x\| \leq \sum_{i=0}^k \|A_i^* M_i A_i x\|.$$

Dado que (por (3.12)) $G = G - I + I = I - H_{p-1}$, tem-se

$$\|Gx\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \|A_i^* M_i A_i x\|. \tag{3.22}$$

Assim, aplicando (3.20), obtém-se a estimativa

$$\begin{aligned}
\|H_k x\|^2 &= \|(I - A_k^* M_k A_k) H_{k-1} x\|^2 \leq \theta \|P_{\xi, k} H_{k-1} x\|^2 + (1 - \theta) \|H_{k-1} x\|^2 \\
&\leq (1 - \theta) \|H_{k-1} x\|^2 + \theta (\|P_{\xi, k} x\| + \|P_{\xi, k} (I - H_{k-1}) x\|)^2 \\
&\leq (1 - \theta) \|H_{k-1} x\|^2 + \theta \left(\|P_{\xi, k} x\| + \sum_{i=0}^{k-1} \|A_i^* M_i A_i x\| \right)^2 \\
&\leq (1 - \theta) \|x\|^2 + \theta \left(\|P_{\xi, k} x\| + \sum_{i=0}^{k-1} \|A_i^* M_i A_i x\| \right)^2.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Defina agora a sequência de números

$$D_0 = 5, \quad D_k = (9 + 8 \sum_{i=0}^{k-1} \sqrt{D_i}), \quad k = 1, \dots, p-1.$$

A prova do Lema 3.3 é, a final, por contradição. Assuma que o resultado não é válido. Então existe algum $\eta > 0$ tal que, para todo $\epsilon > 0$ existe um $x \in X_{\mathbb{C}}$ tal que

$$|\langle (I - G)x, x \rangle_{X_{\mathbb{C}}}|^2 \geq (1 - \epsilon), \quad \operatorname{Re} \langle Gx, x \rangle_{X_{\mathbb{C}}} \geq \eta, \quad \|x\| = 1. \tag{3.24}$$

Seja $0 < \epsilon < 1$ suficientemente pequeno tal que

$$\epsilon \leq \left(\frac{1}{1 + \sum_{i=0}^{p-1} \sqrt{D_i}} \right)^{2^p} \tag{3.25}$$

$$(1 - \sqrt{\epsilon})^2 \geq \max_{i=0, \dots, p-1} (1 - \|A_i^* M_i A_i\|)^2 \tag{3.26}$$

$$\epsilon < \left(\frac{\eta}{\sum_{i=0}^{p-1} \sqrt{D_i}} \right)^{2^{p+1}}. \tag{3.27}$$

Como $|\langle (I - G)x, x \rangle_{X_{\mathbb{C}}}| \leq \|(I - G)x\|$ e

$$\|(I - G)x\| = \|H_{p-1} x\| \leq \|H_{p-2} x\| \leq \dots \leq \|H_0 x\|,$$

então, para esse ϵ existe um x como em (3.24) com

$$\|H_k x\|^2 \geq 1 - \epsilon, \quad \forall k = 0, \dots, p-1.$$

Por (3.26) a escolha de $\xi = \sqrt{\epsilon}$ pode ser usada em (3.20) e (3.23). Portanto, com $\theta = 2\sqrt{\epsilon} - \epsilon > \sqrt{\epsilon}$, obtém-se a desigualdade

$$1 - \epsilon \leq (1 - \theta) + \theta \left(\|P_{\sqrt{\epsilon}, k} x\| + \sum_{i=0}^{k-1} \|A_i^* M_i A_i x\| \right)^2, \quad \forall k = 0, \dots, p-1,$$

que por sua vez implica a estimativa

$$\|P_{\sqrt{\epsilon},k}x\| + \sum_{i=0}^{k-1} \|A_i^* M_i A_i\| \geq \sqrt{1 - \frac{\epsilon}{\theta}} \geq 1 - \frac{\epsilon}{\theta} \geq 1 - \sqrt{\epsilon}, \quad \forall k = 0, \dots, p-1. \quad (3.28)$$

Agora, usando (3.21), obtém-se

$$\|A_k^* M_k A_k x\|^2 \leq \epsilon \|P_{\sqrt{\epsilon},k}x\|^2 + 4(1 - \|P_{\sqrt{\epsilon},k}x\|^2) \leq \epsilon + 4(1 - \|P_{\sqrt{\epsilon},k}x\|^2). \quad (3.29)$$

Para $k = 0$, obtém-se de (3.28) e (3.29)

$$\|P_{\sqrt{\epsilon},0}x\|^2 \geq 1 - \sqrt{\epsilon}, \quad \|A_0^* M_0 A_0 x\|^2 \leq \epsilon + 4\sqrt{\epsilon} \leq D_0 \sqrt{\epsilon}.$$

Procedendo por indução se mostra que

$$\|A_k^* M_k A_k x\|^2 \leq D_k \epsilon^{\frac{1}{2^{k+1}}}, \quad \forall k = 0, \dots, p-1. \quad (3.30)$$

Usando (3.28) mais a hipótese de indução para $k-1, k \geq 1$, obtém-se

$$\|P_{\sqrt{\epsilon},k}x\| \geq 1 - \sqrt{\epsilon} - \sum_{i=0}^{k-1} \epsilon^{\frac{1}{2^{i+2}}} \sqrt{D_i} \geq 1 - \epsilon^{\frac{1}{2^{k+1}}} \left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} \sqrt{D_i}\right).$$

Note que, por (3.25), o lado direito desta desigualdade é positivo. Portanto, por (3.29) tem-se

$$\begin{aligned} & \|A_k^* M_k A_k x\|^2 \\ & \leq \epsilon + 4 \left[1 - \left(1 - \epsilon^{\frac{1}{2^{k+1}}} \left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} \sqrt{D_i} \right) \right)^2 \right] \\ & \leq \epsilon^{\frac{1}{2^{k+1}}} + 4 \left[2\epsilon^{\frac{1}{2^{k+1}}} \left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} \sqrt{D_i} \right) - \left(\epsilon^{\frac{1}{2^{k+1}}} \left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} \sqrt{D_i} \right) \right)^2 \right] \\ & \leq \epsilon^{\frac{1}{2^{k+1}}} \left(9 + 8 \sum_{i=0}^{k-1} \sqrt{D_i} \right) = \epsilon^{\frac{1}{2^{k+1}}} D_k, \end{aligned}$$

o que prova (3.30), para todo $k = 0, \dots, p-1$. Finalmente, consegue-se uma contradição para (3.24). Usando (3.22) e (3.27) obtém-se

$$\begin{aligned} \eta & \leq \operatorname{Re}\langle Gx, x \rangle_{X_c} \\ & \leq \|Gx\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \|A_i^* M_i A_i x\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \epsilon^{\frac{1}{2^{i+2}}} \sqrt{D_i} \leq \epsilon^{\frac{1}{2^{p+1}}} \sum_{i=0}^{p-1} \sqrt{D_i} < \eta, \end{aligned}$$

assim (3.24) não pode ser válida para essa escolha de ϵ , completando assim a prova. ■

Observação 3.3. *Uma consequência direta da prova do Lema 3.3, é que γ em (3.19) pode ser escolhido como o maior número ϵ tal que (3.25)-(3.27) não são satisfeitas. Em particular, para η suficientemente pequeno (tal que (3.27) implica (3.25) e (3.26)), o Lema 3.3 é válido com a seguinte escolha de γ*

$$\gamma = \left(\frac{\eta}{\sum_{i=0}^{p-1} \sqrt{D_i}} \right)^{2^{p+1}}.$$

Agora, é possível estimar o erro de aproximação assumindo que uma condição de fonte é satisfeita. Como indicou-se anteriormente, a análise clássica via teoria espectral não é possível porque o correspondente operador não é simétrico. Para superar esse obstáculo, usa-se o cálculo funcional no *rango numérico*.

Definição 3.1. *Define-se o rango numérico do operador $G : X_{\mathbb{C}} \rightarrow X_{\mathbb{C}}$ como*

$$W(G) := \{ \langle Gx, x \rangle_{X_{\mathbb{C}}} : x \in X_{\mathbb{C}}, \|x\|_{X_{\mathbb{C}}} = 1 \}.$$

Com esta definição, pode-se enunciar o lema principal, necessário para achar as estimativas do erro de aproximação.

Lema 3.4. *Se (3.6) é válida e existe $h > 0$ tal que*

$$W(G) \subset \Sigma := \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda)| \leq \tan^{-1}(h) < \frac{\pi}{2} \}, \quad (3.31)$$

então, existe uma constante C dependendo de α, h, p e $\left(\|A_i^ M_i^{\frac{1}{2}}\| \right)_{i=0}^{p-1}$, tal que*

$$\|(I - G)^n G^\alpha\| \leq \frac{C}{(n+1)^\alpha}, \quad \forall \alpha > 0.$$

Prova: Seja $\eta > 0$, então, pelo Lema 3.1, para $x \in X_{\mathbb{C}}$, tem-se

$$Re \langle Gx, x \rangle_{X_{\mathbb{C}}} \geq \eta \quad \text{ou} \quad 0 \leq Re \langle Gx, x \rangle_{X_{\mathbb{C}}} < \eta.$$

Se $Re \langle Gx, x \rangle_{X_{\mathbb{C}}} \geq \eta$ com $\|x\|_{X_{\mathbb{C}}} = 1$, então pelo Lema 3.3, existe $0 < \gamma < 1$ tal que

$$|1 - \langle Gx, x \rangle_{X_{\mathbb{C}}}| = | \langle (I - G)x, x \rangle_{X_{\mathbb{C}}} | \leq \|(I - G)x\|_{X_{\mathbb{C}}} \leq \sqrt{1 - \gamma},$$

e assim tem-se

$$W(G) \subset \Sigma \cap (\{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(\lambda) < \eta\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \eta \leq \operatorname{Re}(\lambda), \\ |1 - \lambda| < \sqrt{1 - \gamma}\})$$

e portanto

$$W(G) \subset (\Sigma \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(\lambda) < \eta\}) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \eta \leq \operatorname{Re}(\lambda), \\ |1 - \lambda| < \sqrt{1 - \gamma}\}.$$

Agora, fixe $\eta = \cos^2(\psi)$, onde $\psi = \tan^{-1}(h)$ e tome γ como em (3.19). Usando o Cálculo Funcional de Crouzeix (para detalhes veja [4]), concluí-se que para todo $\alpha > 0$

$$\|(I - G)^n G^\alpha\| \leq C_C \sup_{\lambda \in \Sigma} |(1 - \lambda)^n \lambda^\alpha|,$$

para alguma constante $C_C \leq 11.08$. Para os elementos de $W(G)$ que pertencem a $\Sigma \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(\lambda) < \eta\}$ tal que $0 < \operatorname{Re}(\lambda) < \eta$, tem-se, devido a que a função tangente é crescente

$$\tan(\arg(\lambda)) = \frac{\operatorname{Im}(\lambda)}{\operatorname{Re}(\lambda)} \leq h \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}(\lambda)^2 + \operatorname{Im}(\lambda)^2}{\operatorname{Re}(\lambda)^2} \leq h^2 + 1,$$

ou seja

$$|\lambda| \leq \operatorname{Re}(\lambda) \sqrt{1 + h^2} < \frac{\eta}{\cos(\psi)} = \cos(\psi) \quad (\dagger).$$

Por outro lado, de $|1 - \lambda|^2 = (1 - \lambda)(1 - \bar{\lambda}) = 1 + |\lambda|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda)$ e da forma polar de λ , tem-se

$$|1 - \lambda|^2 = 1 + |\lambda|^2 - 2|\lambda| \cos(\arg(\lambda)). \quad (\dagger\dagger)$$

Agora, como $\lambda \in \Sigma$, então $|\arg(\lambda)| \leq \psi < \frac{\pi}{2}$ e como a função cosseno é decrescente em $[0, \frac{\pi}{2}]$ tem-se $\cos(\psi) \leq \cos(|\arg(\lambda)|) = \cos(\arg(\lambda))$ o que implica por $(\dagger\dagger)$

$$|1 - \lambda|^2 \leq 1 + |\lambda|^2 - 2|\lambda| \cos(\psi)$$

mas por (\dagger) $|\lambda|^2 \leq |\lambda| \cos(\psi)$, e assim tem-se

$$|1 - \lambda|^2 \leq 1 - |\lambda| \cos(\psi).$$

Com essa desigualdade pode-se estimar

$$|(1 - \lambda)^n \lambda^\alpha| = (|1 - \lambda|^2)^{\frac{n}{2}} |\lambda|^\alpha \leq |1 - |\lambda| \cos(\psi)|^{\frac{n}{2}} |\lambda|^\alpha$$

$$\leq \frac{1}{\cos^\alpha(\psi)} |1 - |\lambda| \cos(\psi)|^{\frac{n}{2}} |\lambda \cos(\psi)|^\alpha.$$

Agora, fazendo $z = |\lambda| \cos(\psi)$ na última desigualdade, tem-se $z \geq 0$, $z \leq \eta = \cos^2(\psi) \leq 1$, e a função real $f(z) = (1 - z)^{n/2} z^\alpha$ atinge o seu máximo (para $0 \leq z \leq 1$) em $z = \alpha / (\alpha + \frac{n}{2})$, logo

$$(1 - z)^{n/2} z^\alpha \leq \left(\frac{\frac{n}{2}}{\alpha + \frac{n}{2}} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \frac{n}{2}} \right)^\alpha \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha + \frac{n}{2}} \right)^\alpha, \forall 0 \leq z \leq 1,$$

o que claramente implica,

$$(1 - z)^{n/2} z^\alpha \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha + \frac{n}{2}} \right)^\alpha \leq \alpha^\alpha \left(\frac{n}{2} \right)^{-\alpha}, \forall \alpha > 0,$$

e portanto,

$$|(1 - \lambda)^n \lambda^\alpha| \leq \frac{\alpha^\alpha}{\cos^\alpha(\psi)} \left(\frac{n}{2} \right)^{-\alpha}, \forall \alpha > 0.$$

Por outro lado, como $(n + 1)^\alpha \leq (2n)^\alpha, \forall n \in \mathbb{N}$, então $\left(\frac{n}{2} \right)^{-\alpha} = \frac{2^\alpha}{n^\alpha} \leq \frac{4^\alpha}{(n+1)^\alpha}$, e assim tem-se

$$|(1 - \lambda)^n \lambda^\alpha| \leq \left(\frac{4\alpha}{\cos(\psi)} \right)^\alpha \frac{1}{(n + 1)^\alpha}, \forall \alpha > 0.$$

Agora, para os elementos da outra parte do rango numérico tem-se $|1 - \lambda| \leq (1 - \gamma)^{1/2} \leq 1$ o que implica $|\lambda| \leq 2$, assim

$$|(1 - \lambda)^n \lambda^\alpha| = |1 - \lambda|^n |\lambda|^\alpha \leq 2^\alpha (1 - \gamma)^{\frac{n}{2}}, \forall \lambda : Re(\lambda) \geq \gamma.$$

Como $(1 - \gamma)^{\frac{n}{2}} (n + 1)^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, então existe uma constante \overline{C} , que depende de γ e α , tal que $(1 - \gamma)^{\frac{n}{2}} \leq \overline{C} (n + 1)^{-\alpha}, \forall n \in \mathbb{N}$, e assim obtém-se o resultado escolhendo $C = \max\left\{ \left(\frac{4\alpha}{\cos(\psi)} \right)^\alpha, 2^\alpha \overline{C} \right\}$. ■

Observação 3.4. *Para poder aplicar o Lema 3.4 é preciso focar a atenção na condição (3.31). Usando a parte real e imaginária de $G(u)$ para $u = x + iy \in W(G)$, com G como antes, tem-se*

$$\langle G(x + iy), x + iy \rangle_{X_c} = \langle Gx, x \rangle + \langle Gy, y \rangle + i(\langle Gy, x \rangle - \langle Gx, y \rangle)$$

o que implica que uma condição equivalente a (3.31) é a existência de $h > 0$ tal que

$$|\langle Gy, x \rangle - \langle Gx, y \rangle| \leq h(\langle Gx, x \rangle + \langle Gy, y \rangle),$$

ou equivalentemente

$$|\langle (\mathbf{A}^* \mathbf{M}_B^* \mathbf{A} - \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B \mathbf{A})x, y \rangle| \leq h(\langle \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B \mathbf{A}x, x \rangle + \langle \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B \mathbf{A}y, y \rangle)$$

para todo $x, y \in X$ tal que $\|x + iy\|_{X_C}^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$. Fazendo $z = \mathbf{M}_B \mathbf{A}x$ e $v = \mathbf{M}_B \mathbf{A}y$, infere-se que a condição anterior é satisfeita se, para todo $z, v \in \mathbf{Y}$, a desigualdade

$$|\langle (\mathbf{M}_B^{-1} - (\mathbf{M}_B^{-1})^*)z, v \rangle| \leq h(\langle \mathbf{M}_B^{-1}z, z \rangle + \langle \mathbf{M}_B^{-1}v, v \rangle)$$

é válida. Usando a definição de \mathbf{M}_B (3.10), a desigualdade acima é satisfeita se para todo $z, v \in \mathbf{Y}$,

$$|\langle (\mathbf{L} - \mathbf{L}^*)z, v \rangle| \leq h(\|z\|^2 + \|v\|^2 + \langle \mathbf{L}z, z \rangle + \langle \mathbf{L}v, v \rangle). \quad (3.32)$$

Esta observação leva ao seguinte lema.

Lema 3.5. *Se q é tal que*

$$\|\mathbf{L}\| \leq q < 1,$$

então, (3.31) é válida com $h = q/(1 - q)$.

Prova: Pela Observação 3.4 é suficiente provar (3.32). Note que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz tem-se

$$\begin{aligned} |\langle (\mathbf{L} - \mathbf{L}^*)z, v \rangle| &\leq |\langle \mathbf{L}z, v \rangle| + |\langle z, \mathbf{L}v \rangle| \leq \|\mathbf{L}z\| \|v\| + \|z\| \|\mathbf{L}v\| \\ \langle \mathbf{L}z, z \rangle + \langle \mathbf{L}v, v \rangle &\geq -\|\mathbf{L}z\| \|z\| - \|\mathbf{L}v\| \|v\| \end{aligned}$$

portanto é suficiente provar

$$\|\mathbf{L}z\| \|v\| + \|z\| \|\mathbf{L}v\| \leq h(\|z\|^2 + \|v\|^2 - \|\mathbf{L}z\| \|z\| - \|\mathbf{L}v\| \|v\|),$$

ou seja

$$\|\mathbf{L}z\| \|v\| + \|z\| \|\mathbf{L}v\| + h(\|\mathbf{L}z\| \|z\| + \|\mathbf{L}v\| \|v\|) \leq h(\|z\|^2 + \|v\|^2).$$

Mas, como $\|\mathbf{L}\| \leq q$, tem-se

$$\begin{aligned} \|\mathbf{L}z\| \|v\| + \|z\| \|\mathbf{L}v\| + h(\|\mathbf{L}z\| \|z\| + \|\mathbf{L}v\| \|v\|) &\leq q(2\|z\| \|v\| + h\|z\|^2 + h\|v\|^2) \\ &\leq q(1 + h)(\|z\|^2 + \|v\|^2), \end{aligned}$$

já que $\|z\|^2 + \|v\|^2 \geq 2\|z\|\|v\|$. Logo, como $h = q/(1 - q)$, então $q(1 + h) = h$, o que completa a prova. ■

Para finalizar, basta achar condições suficientes para garantir (3.17) e assim obter (3.18). Para conseguir isto, é necessário o seguinte teorema que se apresenta sem demonstração. Para os detalhes da prova veja [21].

Teorema 3.3. *Seja T um operador limitado sobre um espaço de Banach complexo. Se existe uma constante C tal que*

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda - 1|}, \quad \forall |\lambda| > 1, \lambda \in \mathbb{C},$$

então,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\| < \infty.$$

Usando o Teorema 3.3 com $T = \mathbf{I} - \mathbf{M}_B \mathbf{A} \mathbf{A}^*$, pode-se obter (3.17) se consegue-se provar

$$\|(\mathbf{M}_B \mathbf{A} \mathbf{A}^* - \lambda \mathbf{I})^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda|}, \quad \forall |\lambda - 1| > 1, \lambda \in \mathbb{C}, \quad (3.33)$$

tendo assim o seguinte resultado.

Lema 3.6. *Se*

$$\|\mathbf{L}\| + \frac{1}{2} \|\mathbf{A} \mathbf{A}^*\| < 1, \quad (3.34)$$

então (3.33) é válida.

Prova: Defina o operador $\mathbf{S}(\lambda) := (\mathbf{A} \mathbf{A}^* - \lambda \mathbf{I})$, para $\lambda \in \mathbb{C}$. Pela definição de \mathbf{M}_B (3.10), para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda - 1| > 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{M}_B \mathbf{A} \mathbf{A}^* - \lambda \mathbf{I})^{-1}\| &= \|(\mathbf{A} \mathbf{A}^* - \lambda(\mathbf{I} + \mathbf{L}))^{-1} \mathbf{M}_B^{-1}\| \\ &\leq \|\mathbf{M}_B^{-1}\| \|(\mathbf{A} \mathbf{A}^* - \lambda(\mathbf{I} + \mathbf{L}))^{-1}\| \\ &= \|\mathbf{M}_B^{-1}\| \|(\mathbf{S}(\lambda) - \lambda \mathbf{L})^{-1}\| \\ &= \|\mathbf{M}_B^{-1}\| \|(\mathbf{I} - \mathbf{S}(\lambda)^{-1} \lambda \mathbf{L})^{-1} \mathbf{S}(\lambda)^{-1}\| \\ &\leq \|\mathbf{M}_B^{-1}\| \|\mathbf{S}(\lambda)^{-1}\| \|(\mathbf{I} - \mathbf{S}(\lambda)^{-1} \lambda \mathbf{L})^{-1}\| \\ &\stackrel{(L.B)}{\leq} \frac{\|\mathbf{M}_B^{-1}\|}{|\lambda|} \frac{|\lambda| \|\mathbf{S}(\lambda)^{-1}\|}{1 - |\lambda| \|\mathbf{S}(\lambda)^{-1}\| \|\mathbf{L}\|} \end{aligned}$$

sempre que $\|\mathbf{S}(\lambda)^{-1} \lambda \mathbf{L}\| < 1$, já que assim é possível aplicar o Lema de Banach (L.B) e garantir a existência de $(\mathbf{M}_B \mathbf{A} \mathbf{A}^* - \lambda \mathbf{I})^{-1}$. Agora, para

provar essa condição, usa-se a estimativa para operadores auto-adjuntos

$$\|\mathbf{S}(\lambda)^{-1}\| \leq \sup_{t \in [0, \|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\|]} \frac{1}{|\lambda - t|}.$$

Assim,

$$\sup_{\lambda, |\lambda-1| > 1} |\lambda| \|\mathbf{S}(\lambda)^{-1}\| \leq \sup_{\lambda, |\lambda-1| > 1} \sup_{t \in [0, \|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\|]} \frac{|\lambda|}{|\lambda - t|} = \frac{2}{2 - \|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\|},$$

e da hipótese concluí-se que $\|\mathbf{S}(\lambda)^{-1}\lambda\mathbf{L}\| \leq \frac{2}{2 - \|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\|} \|\mathbf{L}\| < 1$. Finalmente, reunindo as cotas anteriores na constante $C = \frac{2\|\mathbf{M}_B^{-1}\|}{2 - \|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\| - 2\|\mathbf{L}\|}$ obtém-se a desigualdade (3.33), completando assim a prova. ■

A seguir, o resultado principal da secção 3.3, onde as taxas de convergência para o método de Landweber-Kaczmarz são derivadas.

Teorema 3.4. *Sejam \mathbf{L}, \mathbf{A} satisfazendo (3.34) e suponha que (3.6) é válida. Além disso, assuma que a condição de fonte*

$$x_0 - x^\dagger = G^\nu w, \text{ para algum } 0 < \nu < \infty,$$

é satisfeita com $G = \mathbf{A}^\mathbf{M}_B\mathbf{A}$. Então, a iteração do método de Landweber-Kaczmarz (3.7) satisfaz a estimativa do erro*

$$\|x_n^\delta - x^\dagger\| \leq C_1 \sqrt{n} \delta_M + C_2 \frac{1}{n^\nu},$$

para algumas constantes positivas C_1, C_2 . Em particular a regra de escolha de parâmetro a-priori $n \sim \delta_M^{\frac{-2}{2\nu+1}}$ fornece a taxa de convergência de ordem ótima

$$\|x_n^\delta - x^\dagger\| \sim \delta_M^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}$$

ou equivalentemente

$$\|x_n^\delta - x^\dagger\| \leq C \|\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\| \delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}.$$

Prova: A prova é a coleção dos resultados prévios. Usando a desigualdade triangular tem-se

$$\|x_n^\delta - x^\dagger\| \leq \|x_n^\delta - x_n\| + \|x_n - x^\dagger\|.$$

Para o erro propagado $\|x_n^\delta - x_n\|$, se \mathbf{L} e \mathbf{A} satisfazem (3.34), então como observado no Lema 3.6, essa é uma condição suficiente para garantir (3.17) e pelo Lema 3.2 tem-se

$$\|x_n^\delta - x_n\| \leq C_1 \sqrt{n} \delta_M.$$

Agora, para o erro de aproximação $\|x_n - x^\dagger\|$, usando a condição de fonte e dados exatos $\mathbf{y} = \mathbf{A}x^\dagger$, com x^\dagger x_0 -solução de norma mínima de (3.1), tem-se

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \mathbf{A}^* \mathbf{M}_B (\mathbf{A}x_n - \mathbf{A}x^\dagger) \\ &= x_n - G(x_n - x^\dagger), \end{aligned}$$

de onde obtém-se

$$x_1 - x^\dagger = (I - G)G^\nu w.$$

Indutivamente se chega à expressão

$$x_n - x^\dagger = (I - G)^n G^\nu w$$

o que implica

$$\|x_n - x^\dagger\| \leq \|(I - G)^n G^\nu\| \|w\|.$$

Agora, por (3.34), \mathbf{L} satisfaz a condição do Lema 3.5 e assim mediante a Observação 3.4 pode-se usar o Lema 3.4, obtendo

$$\|(I - G)^n G^\nu\| \leq \frac{C_2}{(n+1)^\nu} < \frac{C_2}{n^\nu}$$

ou seja

$$\|x_n^\delta - x^\dagger\| \leq C_1 \sqrt{n} \delta_M + C_2 \frac{1}{n^\nu}.$$

Finalmente, é claro que com a regra de escolha de parâmetro a-priori $n \sim \delta_M^{\frac{-2}{2\nu+1}}$ tem-se

$$\sqrt{n} \delta_M \sim \delta_M^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \sim n^{-\nu},$$

e assim

$$\|x_n^\delta - x^\dagger\| \sim \delta_M^{\frac{2\nu}{2\nu+1}},$$

ou equivalentemente

$$\|x_n^\delta - x^\dagger\| \leq C \|\mathbf{M}\|^{\frac{1}{2}} \|\delta\|^{\frac{2\nu}{2\nu+1}},$$

onde C depende de $\|\mathbf{M}\|^{\frac{1}{2}} \|\delta\|^{\frac{-1}{2\nu+1}}$. ■

Note que, salvo a condição de fonte, sempre é possível atingir as hipóteses deste teorema mediante a introdução de um parâmetro τ suficientemente pequeno multiplicando os operadores M_i .

Observação 3.5. *No Teorema 3.4, as taxas de convergência são estabelecidas sob a condição de fonte $x_0 - x^\dagger \in \mathcal{R}((\mathbf{A}^* \mathbf{M}_B \mathbf{A})^\nu)$. Seria interessante substituir essa condição pela condição de fonte usual com imagem $\mathcal{R}((\mathbf{A}^* \mathbf{A})^\nu)$. Mas, não é claro se isto pode ser feito dadas as mesmas suposições do Teorema 3.4. Uma equivalência entre as condições de fonte pode provavelmente ser mostrada se*

$$d_1 \|\mathbf{A}^* \mathbf{A} x\| \leq \|\mathbf{A}^* \mathbf{M}_B \mathbf{A} x\| \leq d_2 \|\mathbf{A}^* \mathbf{A} x\|,$$

é válida uniformemente para algumas constantes positivas d_1 e d_2 . Para esse propósito, uma generalização da desigualdade de Kato-Heinz para operadores acretivos (veja [17]) pode ser utilizada. Para maiores detalhes veja [19].

Observação 3.6. *O resultado do Teorema 3.4, usa a clássica escolha de parâmetro a-priori $\alpha \sim \delta_M^{\frac{-2}{2\nu+1}}$. No entanto, usando os resultados de Plato e Hämarik (veja [22]), é possível estabelecer taxas de convergência para regras de escolha de parâmetros a-posteriori, como por exemplo, usando o princípio da discrepância.*

A condição principal para obter as taxas de convergência é (3.34). A seguir, uma condição suficiente mais simples para estimar a norma de \mathbf{L} é estabelecida.

Defina a matriz $|\mathbf{L}| \in \mathbb{R}^{p \times p}$, como a matriz triangular inferior com diagonal nula

$$|\mathbf{L}|_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \geq i \\ \|\mathbf{L}_{i,j}\| & \text{outro caso} \end{cases}, \quad i, j = 0, \dots, p-1. \quad (3.35)$$

Note que os índices das entradas na matriz $|\mathbf{L}|$ começam de 0. Na sequência, $|\mathbf{L}|$ pode ser substituída por qualquer outra matriz triangular inferior com diagonal nula satisfazendo

$$\|\mathbf{L}_{i,j}\| \leq |\mathbf{L}|_{i,j}, \quad i < j, i, j = 0, \dots, p-1. \quad (3.36)$$

Então, tem-se o seguinte resultado.

Lema 3.7. *Com $|\mathbf{L}|$ como em (3.35) ou (3.36), tem-se*

$$\|\mathbf{L}\| \leq \sigma_{\max}(|\mathbf{L}|),$$

onde $\sigma_{\max}(N)$ denota o maior valor singular da matriz N .

Prova: Para $z \in \mathbf{Y}$, a i -ésima componente de $\mathbf{L}z$ pode ser limitada por

$$\|(\mathbf{L}z)_i\|_{Y_i} \leq \sum_{j=0}^{p-1} |\mathbf{L}|_{i,j} \|z_j\|.$$

Assim, tomando a soma de quadrados e notando que σ_{max} é o operador norma, segue o resultado. ■

Agora, lembrando que

$$\|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\| = \|\mathbf{A}\|^2 = \sum_{i=0}^{p-1} \|M_i^{\frac{1}{2}} A_i\|^2 = \sum_{i=0}^{p-1} \|A_i^* M_i A_i\|,$$

tem-se o seguinte corolário do lema anterior.

Corolário 3.1. *Seja $|\mathbf{L}|$ como em (3.35) ou (3.36). As taxas de convergência do Teorema 3.4 são válidas se*

$$\sigma_{max}(|\mathbf{L}|) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{p-1} \|A_i^* M_i A_i\| < 1. \quad (3.37)$$

Observação 3.7. *Considerando o simples preconditionador da forma $M_i = \tau I$, com $\tau > 0$ o parâmetro de tamanho de passo, é claro que a iteração de Landweber-Kaczmarz tem taxas de convergência para todo τ suficientemente pequeno. Com efeito, para essa escolha de M_i tem-se*

$$\tau < \frac{1}{\sigma_{max}(|\mathbf{L}|) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{p-1} \|A_i^* A_i\|}, \quad (3.38)$$

onde aqui $|\mathbf{L}|$ é a matriz triangular inferior com diagonal nula e com $|\mathbf{L}|_{i,j} = \|A_i A_j^*\|$, assim com τ satisfazendo (3.38) pode-se aplicar o corolário anterior. O mesmo acontece usando preconditionadores M_i . Substituindo eles por τM_i , sempre é possível encontrar um intervalo de possíveis valores de τ tal que as hipóteses do Corolário 3.1 são satisfeitas.

3.4 Taxas de Convergência para o Método Landweber-Kaczmarz Simétrico

Para completar, e por razões de comparação, agora se estabelecem as taxas de convergência para a versão simétrica do método de Landweber-Kaczmarz vista na secção (3.2.2). Assuma que (3.6) é válida, então definindo,

$$\mathbf{B} := (2\mathbf{I} - \text{diag}(M_i^{\frac{1}{2}} A_i A_i^* M_i^{\frac{1}{2}}))^{\frac{1}{2}} \mathbf{M}_B,$$

tem-se

$$\mathbf{M}_{SB} = \mathbf{B}^* \mathbf{B}. \quad (3.39)$$

Com isto, a iteração do método **sLK** (3.14) é equivalente à iteração do método de Landweber aplicada ao sistema

$$\mathbf{B}\mathbf{A}x = \mathbf{B}\mathbf{y}^\delta, \quad (3.40)$$

onde se usa o nível de ruído $\delta_S = \|\mathbf{B}(\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y})\|$. Com efeito, fazendo isto, tem-se

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - (\mathbf{B}\mathbf{A})^*(\mathbf{B}\mathbf{A}x - \mathbf{B}\mathbf{y}^\delta) \\ &= x_n - \mathbf{A}^* \mathbf{B}^* \mathbf{B} (\mathbf{A}x - \mathbf{y}^\delta) \\ &= x_n - \mathbf{A}^* \mathbf{M}_{SB} (\mathbf{A}x - \mathbf{y}^\delta). \end{aligned}$$

Assim, a teoria clássica para o método de Landweber imediatamente fornece (veja [8]):

Teorema 3.5. *Suponha que as condições (3.6) e $x^\dagger - x_0 = (\mathbf{A}^* \mathbf{M}_{SB} \mathbf{A})^\nu w$ são válidas. Então, para o método **sLK** e a escolha de parâmetro a priori $n \sim \delta_S^{-\frac{2}{2\nu+1}}$, tem-se a taxa de convergência de ordem ótima*

$$\|x_n - x^\dagger\| \leq C \delta_S^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}.$$

Observação 3.8. *Segundo [19], usando a desigualdade de Heinz (veja [8]), no Teorema 3.5 pode ser usada uma condição de fonte usual, já que se a condição (3.6) é válida, então existem constantes m_1 e m_2 tais que,*

$$m_1 \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{Y}} \leq \|\mathbf{B}\mathbf{y}\| \leq m_2 \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{Y}}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}.$$

Em particular, para $0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$, em cada um desses casos as condições de fonte $x^\dagger - x_0 = (\mathbf{A}^ \mathbf{M}_{SB} \mathbf{A})^\nu w$ e $x^\dagger - x_0 = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^\nu w$ são equivalentes.*

Assim, o resultado do Teorema 3.5 é válido com a condição de fonte usual $x^\dagger - x_0 = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^\nu w$ para $0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$ e, claramente, com δ_S em vez de δ . Assim, foram estabelecidas exatamente as mesmas taxas de convergência sob a mesma condição de fonte que para o método de Landweber por blocos ordinário.

Comparando o método **sLK** com o método de Landweber por blocos usual, dá para notar uma diferença: Ao usar preconditionadores $M_i = \tau I$, então, por (3.6) $\tau = \tau_{\mathbf{sLK}}$ pode ser escolhido como

$$\tau_{\mathbf{sLK}} < \frac{2}{\max_{i=0, \dots, p-1} \|A_i^* A_i\|}.$$

Por outro lado, com a correspondente escolha para o método de Landweber por blocos, τ deve ser escolhido de tal maneira que $\tau \|\mathbf{A}\|^2 < 2$, ou seja,

$$\tau_L < \frac{2}{\sum_{i=0}^{p-1} \|A_i^* A_i\|} < \frac{2}{\max_{i=0, \dots, p-1} \|A_i^* A_i\|}.$$

Uma situação similar acontece com o método Landweber-Kaczmarz não simétrico. Embora para obter taxas de convergência seja necessário (3.38), para obter só convergência, a condição

$$\tau_{LK} < \frac{2}{\max_{i=0, \dots, p-1} \|A_i^* A_i\|}$$

é suficiente (detalhes em [7]), pelo menos em dimensão finita. Assim, as iterações tipo Kaczmarz além de ser mais fáceis de implementar do que as iterações tipo Landweber por blocos, também permitem escolher um tamanho de passo maior.

Capítulo 4

Experiências Numéricas

Neste último capítulo, será comparado o desempenho de alguns métodos iterativos para resolver problemas da forma do sistema (3.1) do Capítulo 3. Os critérios de comparação serão o erro na iteração, o erro na solução encontrada e o tempo médio de execução.

4.1 Métodos Iterativos a Serem Comparados

Os métodos estudados nos capítulos 2 e 3 foram variantes do método de Landweber-Kaczmarz, a saber, os métodos **LK** e **sLK** para operadores com estrutura de bloco incorporando o parâmetro ω_n (1.10) para o caso de dados com ruído. A ideia é comparar esses métodos nos casos de dados exatos e dados com ruído, com métodos bem estabelecidos. Os testes feitos na próxima secção serão para operadores lineares em dimensão finita.

O primeiro dos métodos utilizado para a comparação será o método de *Landweber* descrito no Capítulo 1 para operadores lineares,

$$x_{n+1} = x_n - B^*(Bx_n - y).$$

Outro dos métodos utilizados para a comparação é o método de *Landweber com busca linear*. Seja $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ com $B > 0$, a matriz do sistema,

$$Bx = y.$$

O algoritmo de máxima descida para minimizar $\|Bx - y\|^2$, fornece a

iteração de Landweber com busca linear

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n d_n,$$

onde

$$\alpha_n = \frac{d_n^T d_n}{d_n^T B^2 d_n} \text{ e } d_n = B(Bx_n - y).$$

Finalmente, o último método usado para a comparação é o método *Steepest Descent*, para matrizes $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ com $B > 0$, que é dado pela iteração

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n d_n,$$

onde

$$\alpha_n = \frac{d_n^T d_n}{d_n^T B d_n} \text{ e } d_n = (Bx_n - y).$$

Detalhes sobre análise de convergência desses métodos podem ser encontrados na literatura clássica e em [8, 16] no caso do método de Landweber.

Como critério de parada para os métodos de Landweber e Landweber com busca linear no caso de dados com ruído, será utilizado o princípio da discrepância,

$$\|Bx_n - y^\delta\| \leq \tau\delta, \quad (4.1)$$

isto é, o método para quando por primeira vez é satisfeita a condição (4.1), e nesse caso $x_n = x_n^\delta$. O método *Steepest Descent* não é considerado no caso de dados com ruído.

4.2 Descrição do Problema Teste

Para comparar os métodos citados anteriormente, será resolvido o seguinte sistema linear,

$$Bx = y, \quad (4.2)$$

onde

$$B := \frac{1}{\|H_N\|} H_N \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

com H_N a matriz de Hilbert de ordem N e $x, y \in \mathbb{R}^N$. A matriz B é simétrica definida positiva, com norma igual a 1, mas é mal condicionada, de fato, para $N > 15$ é quase singular. Com a matriz B definida dessa forma, são garantidas as condições (2.1) e (2.2) utilizadas na análise dos métodos de Landweber e Landweber- Kaczmarz nos capítulos anteriores.

Para resolver o sistema (4.2) mediante os métodos **LK** e **sLK** descritos no Capítulo 3, a matriz B será dividida em blocos de mais de uma linha, já que se cada linha é considerada como um bloco, dada a estrutura cíclica dos métodos, teriam-se N blocos, e para N grande isso complica a visualização dos resultados, além de desaproveitar as bondades da estrutura.

Agora, para resolver o sistema (4.2) mediante os métodos descritos na Secção 4.1, será considerado o sistema de forma íntegra.

4.2.1 Gerando Dados Exatos e com Ruído

Para gerar os vetor de dados exatos y , o procedimento é o seguinte. Fixe $x^\dagger = \mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N$, e calcule $y = Bx^\dagger$.

Agora, para calcular o vetor de dados perturbados y^δ , com δ a porcentagem de ruído, o procedimento é o seguinte. Dado $y = Bx^\dagger$, faça $\tilde{\delta}_i := 2\delta(\theta_i - \frac{1}{2})$, $i = 1, \dots, N$, onde θ_i é um número aleatório com distribuição de probabilidade uniforme no intervalo $(0,1)$. Agora, defina $\tilde{y}_i := \tilde{\delta}_i y_i$, $i = 1, \dots, N$, para finalmente calcular $y_i^\delta := y_i + \tilde{y}_i$, $i = 1, \dots, N$. Assim, o nível de ruído é proporcional ao tamanho de y .

Para os métodos não cíclicos, isto é, o método de Landweber, Landweber com busca linear, o valor do nível de ruído utilizado para o princípio da discrepância será $\|\tilde{y}\|$, e para os métodos tipo Kaczmarz o k -ésimo nível de ruído será $\delta_k := \|\tilde{y}\|_k$, onde $[b]_k$ é o k -ésimo bloco do vetor b .

4.3 Resultados

Foram realizados testes comparativos para dados exatos e com ruído, no último caso para dois valores de δ , a saber, $\delta = 0.05$ e $\delta = 0.1$.

O vetor inicial em cada execução da bateria de métodos é aleatório gerado pela expressão $x_0 = 0.1\theta$, onde θ é um vetor aleatório com distribuição de probabilidade uniforme no intervalo $(0,1)$. Portanto para cada vetor inicial os métodos tem tempos de execução diferentes. Assim, para achar o tempo de execução de cada método(tempo necessário para convergir), se calculou o tempo médio em 1000 repetições, onde no caso de dados com ruído, manteve-se o vetor de dados perturbados, y^δ , fixo. Em todos os testes os parâmetros $N = 120$ e $\tau = 5$ são fixos. Para esse valor de N , o número de condicionamento da Matriz B é $K(B) = 2.8438 \times 10^{19}$, onde o mal condicionamento da matriz B é evidente.

Na sequência, definindo $t_i :=$ Tempo de execução do método na repetição i e $x_{n^*} :=$ solução fornecida pelo respectivo método, a nomenclatura nas tabelas e nos gráficos é a seguinte:

Nomenclatura	Significado
LW	Landweber
LW BL	Landweber com busca linear
SD	Steepest-Descent
LW-Kacz	Landweber-Kaczmarz
LW-Kacz S	Landweber-Kaczmarz simétrico
Tempo médio	$\frac{\sum_{i=1}^{1000} t_i}{1000}$
Erro na solução	$\ x_{n^*} - x^\dagger\ $
Erro relativo(porcentual)	$\frac{\ x_{n^*} - x^\dagger\ }{\ x^\dagger\ } \times 100\%$

Tabela 4.1: Nomenclatura nas tabelas e figuras.

4.3.1 Dados Exatos

Para dados exatos foi realizado um único teste. Como critério de parada foi adotado o número fixo de ciclos, $C = 150$, onde para os métodos LW-Kacz e LW-Kacz S um ciclo entende-se por um p -ciclo e $2p$ -ciclo, respectivamente, e para os método não cíclicos um ciclo é uma iteração. Os detalhes dos resultados na Tabela 4.2 e na Figura 4.1.

Método	Tempo médio	Erro na solução	Erro relativo
LW	0.0032 (s)	2.0073	18.3238%
LW BL	0.0045 (s)	1.6559	15.1164%
SD	0.0051 (s)	0.4256	3.8854%
LW-Kacz	0.0286 (s)	2.0091	18.3402%
LW-Kacz S	0.0520 (s)	1.7856	16.3004%

Tabela 4.2: Tempo médio de execução e erros absoluto e relativo na solução para dados exatos.

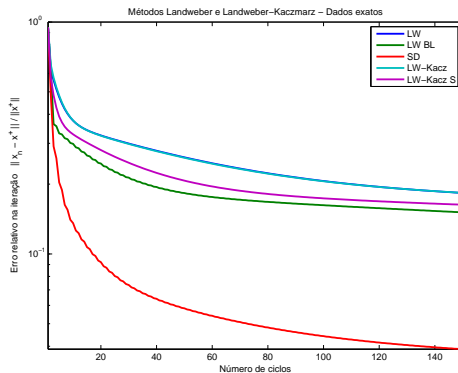


Figura 4.1: Evolução do erro relativo na iteração para dados exatos.

4.3.2 Dados com Ruído

Nesta etapa, o primeiro dos testes foi feito para dados com 5% de ruído, isto é, $\delta = 0.05$. Os detalhes dos resultados estão na Tabela 4.3 e na Figura 4.2, onde também pode-se apreciar o gráfico da quantidade de atualizações da aproximação efetuadas por ciclo, i.é, quando $\omega_n = 1$ nos métodos tipo Kaczmarz. No caso simétrico, a quantidade de avaliações do princípio da discrepância é o dobro.

Método	Tempo médio	Erro na solução	Erro relativo
LW	0.0001 (s)	4.9461	45.1517%
LW BL	0.0001 (s)	4.0018	36.5312%
LW-Kacz	0.0034 (s)	3.9505	36.0630%
LW-Kacz S	0.0033 (s)	4.0800	37.2453%

Tabela 4.3: Tempo médio de execução e erros absoluto e relativo na solução para dados com 5% de ruído.

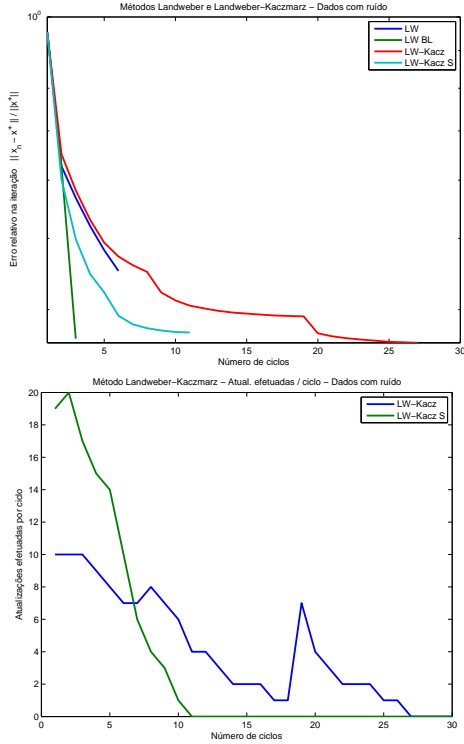


Figura 4.2: Evolução do erro relativo na iteração e atualizações efetuadas por ciclo para dados com 5% de ruído.

Finalmente, o teste para dados com 10% de ruído, cujos resultados se apresentam na Tabela 4.4 e nos gráficos da Figura 4.3.

Método	Tempo médio	Erro na solução	Erro relativo
LW	0.0001 (s)	6.8268	62.3194%
LW BL	0.0001 (s)	6.8194	62.2521%
LW-Kacz	0.0032 (s)	5.5906	51.0349%
LW-Kacz S	0.0033 (s)	6.1642	56.2710%

Tabela 4.4: Tempo médio de execução e erros absoluto e relativo na solução para dados com 10% de ruído.

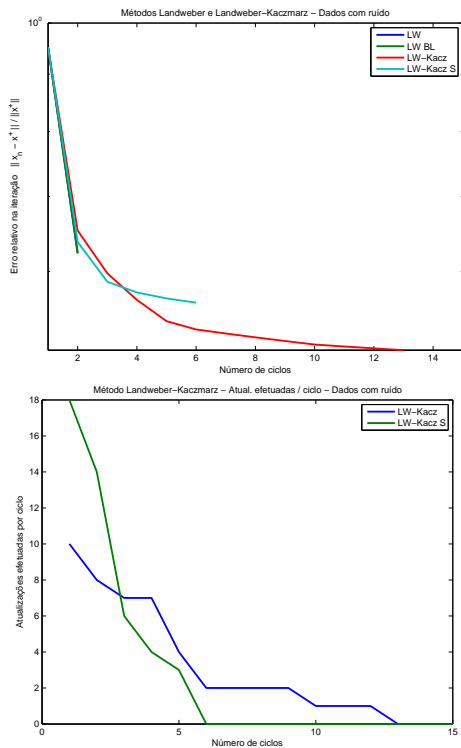


Figura 4.3: Evolução do erro relativo na iteração e atualizações efetuadas por ciclo para dados com 10% de ruído.

4.4 Conclusões

Para dados exatos, aprecia-se que o método com melhor desempenho é o método Steepest-Descent. Agora, na classe dos métodos cíclicos o método **sLK** obteve o menor erro na última aproximação do que o método **LK**, aproximadamente 11% menor, mas o tempo de execução do método **sLK** é quase o dobro.

Agora, para dados com 5% de ruído, aprecia-se que na classe de métodos cíclicos o melhor desempenho é obtido pelo método **LK**, obteve o menor erro, mas só conseguiu diminuir o erro na solução aproximadamente em apenas 3% com relação ao método **sLK**, aumentando o tempo médio de computo (com relação ao método **sLK**) em aproximadamente 3%.

No caso de dados com 10% de ruído, o menor erro foi obtido pelo método **LK**, dessa vez conseguiu diminuir o erro na solução com relação ao método **sLK** em aproximadamente em 9%, e diminuindo o tempo médio de computo em aproximadamente 3%.

Finalmente, os experimentos mostram que no caso de dados com ruído de 5% os métodos tipo Kaczmarz tem um melhor desempenho (com relação ao erro na solução) que o método de Landweber e para dados com ruído de 10% os métodos tipo Kaczmarz tem melhor desempenho que os métodos Landweber e Landweber com busca linear.

Conclusões Gerais

Neste trabalho foi provada a estabilidade e convergência de uma variação do método de Landweber-Kaczmarz, com uma nova regra de parada e um parâmetro que permite omitir algumas iterações dentro de um ciclo, se os resíduos correspondentes são o suficientemente pequenos. Uma vantagem dos métodos tipo Kaczmarz, é que o método de regularização resultante aproveita de melhor maneira a estrutura especial do modelo e a estimativa pontual do nível de ruído $\|y^i - y^{\delta^i}\| \leq \delta^i$. A chave para provar convergência, quando o nível de ruído tende a zero, foi a introdução do parâmetro de relaxação bang-bang, ω_n na iteração (1.9).

Com relação às taxas de convergência, nos caso simétrico e não simétrico, dado que a única condição para a convergência nos teoremas é que os operadores $A_i^* M_i A_i$ sejam limitados, infere-se que para tamanhos de passo τ suficientemente pequenos (ou operadores escalados apropriadamente), sempre podem ser estabelecidas taxas de convergência usuais. Em particular, nos teoremas usam-se cotas (veja (3.34), (3.37)) que são computáveis e podem ser usadas em implementações numéricas.

A iteração simétrica, tem a vantagem que pode ser usada ainda em casos onde as condições para a iteração não simétrica não são satisfeitas. No entanto, deve-se pagar o preço de aumentar ao dobro o esforço computacional.

Finalmente, nas experiências numéricas do Capítulo 4 e na classe de métodos cíclicos, observa-se o bom desempenho do método **sLK** para dados exatos com relação ao erro na solução, embora tem um custo no tempo médio de execução com relação ao método **LK** de quase o dobro. Agora para dados com ruído a situação muda, quem tem melhor desempenho com relação ao erro na solução é o método **LK**, mas quem tem a melhor relação custo/benefício (com relação ao método **LK**), é o método **sLK**.

Referências Bibliográficas

- [1] ANH, P. K.; CHUNG, C. V.. Parallel regularized Newton method for nonlinear ill-posed equations. **Numer. Algorithms**. v. 58, p. 379-398, 2011.
- [2] BAUMEISTER, J.; KALTENBACHER, B.; LEITÃO, A.. On Levenberg-Marquardt-Kaczmarz iterative methods for solving systems of nonlinear ill-posed equations. **Inverse Problems and Imaging**. v. 4, p. 335-350, 2010.
- [3] BURGER, M.; KALTENBACHER, B.. Regularizing Newton-Kaczmarz methods for nonlinear ill-posed problems. **SIAM J. Numer. Anal.** v. 44, p. 153-182, 2006.
- [4] CROUZEIX, M.. Numerical range and functional calculus in Hilbert space. **Journal of Functional Analysis**, v. 244, p. 668-690, 2007.
- [5] DE CEZARO, A.; BAUMEISTER, J.; LEITÃO, A.. Modified iterated Tikhonov methods for solving systems of nonlinear ill-posed equations. **Inverse Problems and Imaging**. v. 5, p. 1-17, 2011.
- [6] DE CEZARO, A.; HALTMEIER, M.; LEITÃO, A.; SCHERZER, O.. On steepest-descent-Kaczmarz methods for regularizing systems of nonlinear ill-posed equations. **Appl. Math. Comput.** v. 202, p. 596-607, 2008.
- [7] ELFVING, T.; NIKAZAD, T.. Properties of a class of block-iterative methods. **Inverse Problems**, v. 25, p. 13, 2009.
- [8] ENGL, H. W.; HANKE, M.; NEUBAUER, A.. **Regularization of Inverse Problems**. Mathematics and Its Applications, v. 375, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

- [9] GROETSCH, C. W.. **The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind**. Pitman Advanced Publishing Program, Boston, London, Melbourne, 1984.
- [10] HALTMEIER, M.. Convergence analysis of a block iterative version of a loping Landweber-Kaczmarz iteration. **Nonlinear Anal**, v. 71, p. e2912-e2919, 2009.
- [11] HALTMEIER, M.; KOWAR, R.; LEITÃO, A.; SCHERZER, O.. Kaczmarz methods for regularizing nonlinear ill-posed equations II: Applications. **Inverse Problems and Imaging**, v. 1, p. 507-523, 2007.
- [12] HALTMEIER, M.; LEITÃO, A.; RESMERITA, E.. On regularization methods of EM-Kaczmarz type. **Inverse Problems**, v. 25, p. 17, 2009.
- [13] HALTMEIER, M.; LEITÃO, A.; SCHERZER, O.. Kaczmarz methods for regularizing nonlinear ill-posed equations I: convergence analysis. **Inverse Problems and Imaging**, v. 1, p. 289-298, 2007.
- [14] HANKE, M.; NEUBAUER, A.; SCHERZER, O.. A convergence analysis of the Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems. **Numerische Mathematik**, v. 72, p. 21-37, 1995.
- [15] KACZMARZ, S.. Angenäherte Auflösung von Systemem linearer Gleichungen. **Bull. Internat. Acad. Polon. Sci. A**. v. 35, p. 355-357, 1937.
- [16] KALTENBACHER, B.; NEUBAUER, A.; SCHERZER, O.. **Iterative Regularization Methods for Nonlinear Ill-Posed Problems**. Walter de Gruyter GmgH & Co. KG, Berlin, 2008.
- [17] KATO, T.. A generatization of the Heinz inequality. **Proceedings of the Japan Academy**. v. 37, p. 305-308, 1961.
- [18] KATO, T.. **Perturbation Theory for Linear Operators**. Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the 1980 edition.
- [19] KINDERMANN, S.; LEITÃO, A.. Convergence rates for Kaczmarz-type regularization methods. **Inverse Problems and Imaging**, v. 8, p. 149-172, 2014.

- [20] KOWAR, R.; SCHERZER, O.. Convergence Analysis of a Landweber-Kaczmarz Method for Solving Nonlinear Ill-Posed Problems. **Ill-Posed and inverse Problems (book series)**. v. 23, p. 69-90, 2002.
- [21] NAGY, B.; ZEMÁNEK, J.. A resolvent condition implying power boundedness. **Studia Mathematica**, v. 134, p. 143-151, 1999.
- [22] PLATO, R.; HÄMARIK, U.. On pseudo-optimal parameter choice and stopping rules for regularization methods in Banach spaces. **Numerical Functional Analysis and Optimization**, v. 17, p. 181-195, 1996.
- [23] PLATO, R.. **Iterative and Other Methods for Linear Ill-Posed Equations**. Habilitation thesis, Department of Mathematics, TU Berlin, 1995.