УДК 519.8

В.М. ГОРБАЧУК

СИНТЕТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ КУРНО–ШТАКЕЛЬБЕРГА–НЭША

Предложена модификация равновесия Штакельберга, где лидером является фирма с меньшим выигрышем в равновесии Курно-Нэша. Если выигрыши со временем возрастают за счет технологического прогресса, то такая модификация имеет необходимую интерпретацию. Показано, почему участнику с лучшей технологией может быть невыгодно отклоняться от предложенного синтетического равновесия.

Интерес к такому нетривиальному математическому понятию, как равновесие Нэша [1, 2], в последнее время был отмечен рядом важных событий.

Во-первых, сам Нэш (США), а также Харшаньи (Венгрия, США) и Зельтен (Германия) были удостоены Нобелевской премии 1994 г. по экономике.

Во-вторых, серъезные экономические преобразования в Центральной и Восточной Европе, на Кавказе и Средней Азии, Дальнем Востоке обостряют глобальную конкуренцию, которое моделируется равновесием Нэша и его модификациями. Автор данной работы начинал исследование равновесия Нэша как модели поведения стран – экспортеров нефти на мировом рынке [3].

Математическое творчество Нэша вызывает настолько широкий интерес, что голливудский фильм “Beautiful Mind”, посвященный личности Нэша, был удостоен Оскаров.

Распространение понятия равновесия Нэша стимулировало анализ известных и развитие других равновесий – Курно, Бертрана, Штакельберга [4–6] и многих других.

Данная работа посвящена попытке взаимосвязи между этими важными понятиями, ставшими классическими.

Для анализа выбрана модель конкуренции двух фирм с однородным продуктом, которая позволяет проводить необходимую интерпретацию. Показано, что уже простая такая модель обладает достаточно сложными свойствами. Предположим, что однородный продукт производят только фирмы 1, 2, а функция обратного спроса на этот продукт задается

$$P = a - bQ, \tag{1}$$

где $P > 0$ -- цена продукта, $Q > 0$ – его количество (объем), выпущенное фирмами, a, b – положительные параметры. Фирма i выпускает объем $q_i \geq 0$ и имеет затраты $c_i \geq 0$ на выпуск единицы продукции, $i = 1$, 2. Для простоты пусть $c_1 > c_2$. Заметим, что

$$Q = q_1 + q_2 . \tag{2}$$

Фирма i выбирает объем q_i, максимизируя свою прибыль

$$\pi_i = Pq_i - c_i q_i . \tag{3}$$

Сначала фирмы одновременно выбирают свои объемы выпуска, достигая равновесия Курно – Нэша (Cournot – Nash) [1–4]. Затем фирма j, у которой в этом равновесии прибыль π_j^C оказалась ниже, вынуждена стать лидером в постанов-ке Штакельберга (von Stackelberg) [6] и искать такой объем q_j^S своего выпуска, чтобы ее прибыль увеличивалась до $\pi_j^S > \pi_j^C$ и чтобы, после принятия решения фирмой-лидером, фирме-последователю было невыгодно отклоняться от резуль-тирующей ситуации. Если существует такой объем q_j^C, то эту результирующую ситуацию назовем синтетическим равновесием Курно – Нэша – Штакельберга.

Для начала определим π_1^C и π_2^C.

Теорема 1. В условиях (1)–(3), а также

$$a + c_2 > 2c_1, \tag{4}$$

$$a + c_1 > 2c_2, \tag{5}$$

имеет место

$$\pi_1^C = (a - 2c_1 + c_2)^2 /(9b), \tag{6}$$

$$\pi_2^C = (a - 2c_2 + c_1)^2 /(9b) . \tag{7}$$

Из необходимых условий максимизации π_i по q_i 1-го порядка имеем

$$0 = \partial \pi_i / \partial q_i = P + q_i \partial P / \partial q_i - c_i = a - b(q_1 + q_2) - bq_i \partial Q / \partial q_i - c_i,$$

$$0 = \partial \pi_1 / \partial q_1 = a - b(q_1 + q_2) - bq_1 \partial Q / \partial q_1 - c_1 = a - 2bq_1 - bq_2 - c_1,$$

$$0 = \partial \pi_2 / \partial q_2 = a - b(q_1 + q_2) - bq_2 \partial Q / \partial q_2 - c_2 = a - 2bq_2 - bq_1 - c_2, \tag{8}$$

откуда вытекает равновесный по Курно – Нэшу объем выпуска фирмы 1:

$$a - 2bq_1^C - c_1 = bq_2^C = (a - bq_1^C - c_2) / 2,$$

$$2a - 4bq_1^C - 2c_1 = a - bq_1^C - c_2,$$

$$q_1^C = (a - 2c_1 + c_2) /(3b) . \tag{9}$$

В силу симметрии для другой фирмы

$$q_2^C = (a - 2c_2 + c_1)/(3b). \qquad (10)$$

Тогда в силу (2) равновесный по Курно – Нэшу объем выпуска на рынке равен

$$Q^C = q_1^C + q_2^C = (2a - c_1 - c_2)/(3b), \qquad (11)$$

а равновесная по Курно – Нэшу рыночная цена –

$$P^C = a - bQ^C = (3a - 2a + c_1 + c_2)/3 = (a + c_1 + c_2)/3. \qquad (12)$$

Из условий (3), (9), (10), (12) следует

$$\pi_1^C = (P^C - c_1)q_1^C = [(a + c_1 + c_2 - 3c_1)/3](a - 2c_1 + c_2)/(3b) = (a - 2c_1 + c_2)^2/(9b),$$

$$\pi_2^C = (P^C - c_2)q_2^C = [(a + c_i + c_2 - 3c_2)/3](a - 2c_2 + c_1)/(3b) = (a - 2c_2 + c_1)^2/(9b).$$

Заметим, что

$$\pi_1^C < \pi_2^C$$

равносильно

$$c_1 > c_2. \qquad (13)$$

При условии (13) у фирмы 1 появляется мотивация к изменению своего объема производства в сторону увеличения или уменьшения, чтобы попытаться увеличить свою прибыль. Фирма 1, зная из (8) реакцию фирмы 2 на выбор q_1

$$q_2 = (a - bq_1 - c_2)/(2b), \qquad (14)$$

в качестве лидера максимизирует по q_1 свою прибыль

$$\pi_1 = (P - c_1)q_1 = (a - bQ - c_1)q_1 = \{a - c_i - b[q_1 + (a - bq_1 - c_2)/(2b)]\}q_1 =$$
$$= (a - c_1)q_1 - bq_1(2bq_1 + a - bq_1 - c_2)/(2b) = (a - c_1)q_1 - bq_1(bq_1 + a - c_2)/(2b) =$$
$$= (a - c_1)q_1 - q_1(bq_1 + a - c_2)/2, \qquad (15)$$

находя оптимальное для себя решение q_1^S. Этому решению в силу (13) соответствует оптимальное решение q_2^S фирмы 2. Для этих q_1^S и q_2^S из (2) находится рыночный объем выпуска Q^S, которому в силу (1) соответствует рыночная цена P^S. Далее, из (3) вычисляются результирующие прибыль π_1^S фирмы 1 и прибыль π_2^S фирмы 2.

Теорема 2. В условиях (1)–(5), (13) имеет место

$$\pi_1^S = (a - 2c_1 + c_2)^2/(8b), \qquad (16)$$

$$\pi_2^S = (a + 2c_1 - 3c_2)^2/(16b). \qquad (17)$$

Из необходимых условий максимизации прибыли фирмы-лидера π_1, рассчитанной согласно (15), по q_1 имеем:

$$0 = \partial\pi_1/\partial q_1 = a - c_1 - bq_1^S - (a - c_2)/2,$$

$$bq_1^S = a - c_1 - (a - c_2)/2 = (2a - 2c_1 - a + c_2)/2,$$

$$q_1^S = (a - 2c_1 + c_2)/(2b). \tag{18}$$

Тогда из (14) вытекает

$$q_2^S = (a - bq_1^S - c_2)/(2b) = [a - c_2 - (a - 2c_1 + c_2)/2]/(2b) =$$
$$= (2a - 2c_2 - a + 2c_1 - c_2)/(4b) =$$
$$= (a + 2c_1 - 3c_2)/(4b). \tag{19}$$

Согласно (2), (18), (19)

$$Q^S = q_1^S + q_1^S = (2a - 4c_1 + 2c_2 + a + 2c_1 - 3c_2)/(4b) = (3a - 2c_1 - c_2)/(4b). \tag{20}$$

Следовательно, из (1)

$$P^S = a - bQ^S = a - (3a - 2c_1 - c_2)/4 = (a + 2c_1 + c_2)/4. \tag{21}$$

Из условий (3), (18), (19), (21) вытекает

$$\pi_1^S = (P^S - c_1)q_1^S = (a + 2c_1 + c_2 - 4c_1)(a - 2c_1 + c_2)/(8b) = (a - 2c_1 + c_2)^2/(8b),$$
$$\pi_2^S = (P^S - c_2)q_2^S = (a + 2c_1 + c_2 - 4c_2)(a + 2c_1 - 3c_2)/(16b) =$$
$$= (a + 2c_1 - 3c_2)^2/(16b).$$

Теорема 3. При условиях (1)–(5), (13) имеет место

$$\pi_1^S - \pi_1^C = (a - 2c_1 + c_2)^2/(72b) > 0, \tag{22}$$
$$\pi_2^S - \pi_2^C = (7a + 10c_1 - 17c_2)(2c_1 - a - c_2)/(144b) < 0. \tag{23}$$

Действительно, из (6), (16) следует (22):

$$\pi_1^S - \pi_1^C = (a + c_2 - 2c_1)^2/(8b) - (a + c_2 - 2c_1)^2/(9b) = (a - 2c_1 + c_2)^2/(72b) > 0.$$

Из условий (7), (17) вытекает

$$\pi_2^S - \pi_2^C = [9(a + 2c_1 - 3c_2)^2 - 16(a + c_1 - 2c_2)^2]/(16 \times 9b) =$$
$$= (3a + 6c_1 - 9c_2 + 4a + 4c_1 - 8c_2)(3a + 6c_1 - 9c_2 - 4a - 4c_1 + 8c_2)/(144b) =$$
$$= (7a + 10c_1 - 17c_2)(2c_1 - a - c_2)/(144b).$$

Заметим, что в силу (4)

$$2c_1 - a - c_2 < 0,$$

а в силу (5)

$$14c_2 - 7a - 7c_1 < 0,$$

откуда

$$7a + 7c_1 - 14c_2 > 0.$$

Отсюда ввиду (13) вытекает

$$7a + 10c_1 - 17c_2 > 0,$$

откуда следует неравенство (23).

Теперь в условиях (22), (23) фирма 2 получает мотивацию к изменению своей стратегии – объема выпуска q_2, чтобы повысить свою прибыль π_2. Кроме того, фирма 2, имея меньшие затраты на выпуск единицы продукции, может установить цену $P \in (c_2, c_1]$, вытесняя фирму 1 с рынка. Если, например, $P = c_1$, а фирма 1 предпочитает прекратить выпуск при нулевой прибыли, то

$$\pi_2 = (P - c_2)q_2 = (c_1 - c_2)(a - c_1)/b.$$

Но, устанавливая такую цену, фирма 2 рискует еще больше снизить свою прибыль, если $(a - c_1)/9 > (c_1 - c_2)$:

$$\pi_2 - \pi_2^S = (c_1 - c_2)(a - c_1)/b - (a - 3c_2 + 2c_1)^2/(16b) =$$
$$= \{16(c_1 - c_2)(a - c_1) - [a - c_1 + 3(c_1 - c_2)]^2\}/(16b) =$$
$$= [10(c_1 - c_2)(a - c_1) - (a - c_1)^2 - 9(c_1 - c_2)^2]/(16b) =$$
$$= [9(c_1 - c_2)(a - c_1 - c_1 + c_2) + (a - c_1)(c_1 - c_2 - a + c_1)]/(16b) =$$
$$= (a - 2c_1 + c_2)(9c_1 - 9c_2 - a + c_1)/(16b).$$

Таким образом, для фирмы 2 может оказаться невыгодно снижать цену так, чтобы полностью вытеснять фирму 1 с рынка, если удельные затраты фирм сравнительно мало отличаются. В то же время суммарная прибыль фирм 1 и 2 после действий фирмы 1 как лидера в постановке Штакельберга меньше, чем их суммарная прибыль в равновесии Курно – Нэша:

Теорема 4. В условиях (1)–(5), (13)

$$\pi_1^S + \pi_2^S - (\pi_1^C + \pi_2^C) = 3(a + c_2 - 2c_1)(3a + 2c_1 - 5c_2)/(144b) < 0. \qquad (24)$$

В силу (22), (23)

$$\pi_1^S + \pi_2^S - (\pi_1^C + \pi_2^C) = (a - 2c_1 + c_2)^2/(72b) + (7a + 10c_1 - 17c_2)(2c_1 - a - c_2)/(144b) =$$
$$= (a - 2c_1 + c_2)(2a + 2c_2 - 4c_1 - 7a - 10c_1 + 17c_2)/(144b) =$$
$$= (a - 2c_1 + c_2)(19c_2 - 14c_1 - 5a)/(144b).$$

Из условия 4) следует

$$a - 2c_1 + c_2 > 0,$$

а из условия (5) –

$$2a + 2c_1 - 4c_2 > 0.$$

Суммирование (4), (5) приводит к неравенству

$$2a > c_1 + c_2,$$

что вместе с (13) дает

$$a > c_2.$$

Отсюда

$$19c_2 - 14c_1 - 5a = 14(c_2 - c_1) + 5(c_2 - a) < 0.$$

Из последних неравенств, (4) и (13) вытекает (24).

Теорема 5. При условиях (1)-(5), (13) выполняется неравенство

$$P^S < P^C. \qquad (25)$$

В силу (12) и (21)

$$P^S - P^C = (a + 2c_1 + c_2)/4 - (a + c_1 + c_2)/3 =$$

$$= (3a + 6c_1 + 3c_2 - 4a - 4c_1 - 4c_2)/12 = (2c_1 - c_2 - a)/12 < 0,$$

что вместе с (4) дает (25).

Таким образом, при условиях (1)–(5), (13) выигрыш фирмы 1 в смысле утверждения теоремы 3 достигается за счет снижения рыночной цены относительно P^C подобно поведению для достижения равновесия Бертрана [5], а построенную ситуацию с большим выигрышем фирмы, имеющей большие удельные затраты и являющейся лидером в постановке Штакельберга, назовем синтетическим равновесием Курно – Штакельберга – Нэша [6]. Последнее является синтетическим равновесием не только в смысле своего построения, но и в смысле синтеза состояния рынка, где фирма-последователь имеет меньшие удельные затраты на выпуск продукции, чем фирма-лидер, вступившая в рынок раньше.

Такая постановка учитывает технологический прогресс не только во времени, но и в динамике цен: синтетическое равновесие Курно – Штакельберга – Нэша в большей степени моделирует технологический прогресс, чем равновесие Курно – Нэша.

Неравенства (4) и (5) указывают на приемлемые пределы суммарных удельных затрат фирм:

$$c_1 + c_2 < 2a.$$

Ввиду (1) величина a интерпретируется как максимально возможная цена спроса на однородный продукт рынка.

Заметим также, что для своего отклонения от синтетического равновесия фирма-последователь должна существенно снизить удельные затраты, то есть совершить технологический прорыв, чтобы разница удельных затрат не оставалась на порядок меньшей разницы между максимальной ценой и наибольшими удельными затратами.

При условиях (1)–(5), (13) из (9), (18) вытекает

$$q_1^S - q_1^C = (a - 2c_1 + c_2)/(2b) - (a - 2c_1 + c_2)/(3b) = (a - 2c_1 + c_2)/(6b) > 0,$$

а из условий (10), (19) –

$$q_2^S - q_2^C = (a + 2c_1 - 3c_2)/(4b) - (a + c_1 - 2c_2)/(3b) =$$
$$= (3a + 6c_1 - 9c_2 - 4a - 4c_1 + 8c_2)/(12b) = (2c_1 - c_2 - a)/(12b) < 0.$$

Отсюда в силу (4)

$$Q^S - Q^C = q_1^S - q_1^C + q_2^S - q_2^C = (2a - 4c_1 + 2c_2 - a + 2c_1 - c_2)/(12b) =$$
$$= (a - 2c_1 + c_2)/(12b) > 0.$$

При этом дальнейшего исследования заслуживает вопрос такого распределения прироста рынка (дележа) между фирмами 1 и 2, который бы позволял увеличивать прибыли обеих фирм.

Лидером может оказаться фирма с меньшими удельными затратами (лучшей технологией). Оставляя за фирмой-лидером индекс 1, вместо (13) рассматриваем случай

$$c_1 < c_2.$$

Тогда в теоремах 2–5 для положительности q_2^S требуется дополнительное условие

$$a - 3c_2 + 2c_1 > 0 .$$

Теорема 3 не будет исключать увеличения прибыли фирмы-последователя, имеющей большие удельные затраты.

В.М. Горбачук

СИНТЕТИЧНА РІВНОВАГА КУРНО – ШТАКЕЛЬБЕРГА – НЕША

Запропоновано модифікацію рівноваги Штакельберга, де лідером є учасник з меншим виграшем за рівноваги Курно – Неша. Якщо виграші з часом збільшуються за рахунок технологічного прогресу, то така модифікація має необхідну інтерпретацію. Показано, чому учаснику з кращою технологією може бути невигідним відхилятися від синтетичної рівноваги. Розглянуто й випадок, коли лідером є учасник з більшим виграшем у рівновазі Курно – Неша.

W.M. Gorbachuk

SYNTHETIC COURNOT – STACKELBRG – NASH EQUILIBRIUM

The modification of Stackelberg equilibrium modification, where a leader is a player with lower payoff at the Cournot – Nash equilibrium, is suggested. If payoffs are growing in time due to technological progress, then such a modification has a necessary interpretation. It is showed why a player with better technology may not be willing to deviate from the synthetic equilibrium. The case when a leader is a player with higher payoff at the Cournot – Nash equilibrium is considered as well.

1. *Nash J.F.* The bargaining problem // Econometrica. – 1950. – 18. – P. 155–162.
2. *Nash J.F.* Noncooperative games // Annals of mathematics. – 1951. – 45. – P. 286–295.
3. *Горбачук В.М.* Методы стохастической и негладкой оптимизации в задачах поиска равновесий по Нэшу. – Автореф. на соиск. ученой степени канд.физ.-мат.наук. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН УССР, 1985. – 16 с.
4. *Cournot A.A.* Researches into the mathematical principles of the theory of wealth. – New York: Macmillan, 1897. – 499 p.
5. *Bertrand J.* Theorie mathematique de la richesse sociale // J. des savants. – 1883. – 67. – P. 499–508.
6. *Von Stackelberg H.* Marktform und Gleichgewicht. – Vienna: Springer-Verlag, 1934. – 349 p.

Получено 16.09.2003