УДК 621.3.019.076

А.В. ФЕДУХИН

К ВОПРОСУ О ТАБУЛИРОВАНИИ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТКАЗОВ

Abstract: *The reparametrization of the basic strictly probabilistic functions of refusals distribution: exponential distributions, logarithmically normal distribution and distribution Weibull are carried out. Tables of refusals distribution functions and examples of their use for the decision of some tasks on reliability are developed.*
Key words: *refusals distribution function, parameters of tabulation.*

Анотація: *Проведено перепараметризацію основних строго ймовірнісних функцій розподілів відмов: експоненційного розподілу, логарифмічно нормального розподілу, розподілу Вейбулла. Розроблено таблиці функцій розподілів відмов та приклади їх використання для рішення деяких задач з надійності.*
Ключеві слова: *функція розподілу відмов, параметри табулювання.*

Аннотация: *Проведена перепараметризация основных строго вероятностных функций распределения отказов: экспоненциального распределения, логарифмически нормального распределения и распределения Вейбулла. Разработаны таблицы функций распределения отказов и примеры их использования для решения некоторых задач по надежности.*
Ключевые слова: *функция распределения отказов, параметры табулирования.*

1. Введение

Решение ряда задач по надежности с учетом различных распределений отказов значительно упрощается, если функции этих распределений табулированы. Впервые эффективное решение задач по надежности с использованием таблиц функции *DN*-распределения предложено в [1], где функция *DN*-распределения была параметризована и табулирована в параметрах x и v. Использование в качестве параметра распределения относительной наработки $\frac{t}{s} = x$ позволило уйти при табулировании от реального масштаба времени, упростить табулирование функции и ее использование при решении ряда задач по надежности. Дополнительным преимуществом такого табулирования функции *DN*-распределения является использование в качестве параметра табулирования интегральной характеристики распределения отказов – коэффициента вариации v, оценку которого можно получить на основе разнообразной априорной информации об отказах и процессах деградации, протекающих в изделиях и приводящих их в состояние отказа.

Целью данной работы является разработка табулируемых функций основных строго вероятностных теоретических моделей надежности в параметрах x и v, что позволит пользоваться этими моделями так же эффективно, как и вероятностно-физическими моделями: *DN* и *DM*–распределениями [2].

2. Экспоненциальное распределение

Функция экспоненциального распределения имеет вид

$$E(t;\lambda) = 1 - \exp(-\lambda t)\,, \tag{1}$$

где λ – интенсивность отказов. Для удобства использования проведем параметризацию функции экспоненциального распределения через параметр s, используя известное выражение $\lambda = \frac{1}{s}$.

$$E(t;s) = 1 - \exp(-\frac{t}{s})\,. \tag{2}$$

Обозначив отношение $\frac{t}{s} = x$ и проведя соответствующую замену в (2), получим табулируемую функцию экспоненциального распределения вида

$$E(x) = 1 - \exp(-x). \tag{3}$$

3. Логарифмически нормальное распределение

Функция логарифмически нормального распределения имеет вид

$$LN(t;\mu,\sigma) = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right), \tag{4}$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ – нормированное нормальное распределение;

$\mu = \ln s - \frac{1}{2}\ln(1 + \frac{D}{s^2})$; $\sigma = \left[\ln(1 + \frac{D}{s^2})\right]^{1/2}$; s – математическое ожидание случайной величины t;

D – дисперсия случайной величины t. Для удобства использования проведем параметризацию функции логарифмически нормального распределения в параметрах s и ν, используя известное выражение $\nu = \frac{\sqrt{D}}{s}$, где ν – коэффициент вариации случайной величины t.

$$\mu = \ln s - \frac{1}{2}\ln(1 + \nu^2); \ \sigma = \left[\ln(1 + \nu^2)\right]^{1/2}. \tag{5}$$

Подставив (5) в (4), получим

$$LN(t;s,\nu) = \Phi\left(\frac{\ln\left[\frac{t(1+\nu^2)^{1/2}}{s}\right]}{\left[\ln(1+\nu^2)\right]^{1/2}}\right). \tag{6}$$

Обозначив отношение $\frac{t}{s} = x$ и проведя соответствующую замену в (6), получим табулируемую функцию логарифмически нормального распределения вида

$$LN(x;\nu) = \Phi\left(\frac{\ln\left[x(1+\nu^2)^{1/2}\right]}{\left[\ln(1+\nu^2)\right]^{1/2}}\right). \tag{7}$$

4. Распределение Вейбулла

Функция распределения Вейбулла имеет вид

$$W(t;a,b)=1-\exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right], \tag{8}$$

где $b \approx \frac{1}{\nu}$ ($\delta_b \le 0{,}15$); $a=\frac{s}{\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right)}=\frac{s}{\Gamma(1+\nu)}$; $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Для удобства использования проведем параметризацию функции распределения Вейбулла в параметрах s и ν:

$$W(t;s,\nu)=1-\exp\left\{-\left[\frac{t\Gamma(1+\nu)}{s}\right]^{1/\nu}\right\}. \tag{9}$$

Обозначив отношение $\frac{t}{s}=x$ и проведя соответствующую замену в (9), получим табулируемую функцию распределения Вейбулла вида

$$W(x;\nu)=1-\exp\left\{-[x\Gamma(1+\nu)]^{1/\nu}\right\}. \tag{10}$$

5. Использование таблиц функций распределения отказов

В табл. 1–4 приведены фрагменты таблиц функций, соответственно, *DN*–распределения $DN(x;v)$ [1], экспоненциального распределения $E(x)$, распределения Вейбулла $W(x,\nu)$ и логарифмически нормального распределения $LN(x,\nu)$. Для двухпараметрических функций значение коэффициента вариации равно $v=0{,}75$.

Таблица 1. Функция $DN(x;v)$ $v=0{,}75$

x	*0,00*	*0,01*	*0,02*	*0,03*	*0,04*	*0,05*	*0,06*	*0,07*	*0,08*	*0,09*
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00005
0,1	0,00014	0,00032	0,00064	0,00116	0,00194	0,00303	0,00449	0,00634	0,00864	0,01138
0,2	0,01460	0,01830	0,02248	0,02712	0,03223	0,03777	0,04374	0,05011	0,05685	**0,06395**
0,3	0,07137	0,07910	0,08710	0,09536	0,10384	0,11253	0,12140	0,13044	0,13961	0,14891
0,4	0,15831	0,16780	**0,17736**	0,18698	0,19663	0,20632	0,21602	0,22572	0,23542	0,24511
0,5	0,25477	0,26440	0,27399	0,28353	0,29302	0,30245	0,31182	0,32112	0,33035	0,33950
0,6	0,34857	0,35756	0,36646	0,37527	0,38400	0,39263	0,40117	0,40961	0,41795	0,42620
0,7	0,43435	0,44241	0,45036	0,45821	0,46597	0,47362	0,48118	0,48863	0,49599	0,50325
0,8	0,51041	0,51747	0,52443	0,53130	0,53807	0,54475	0,55133	0,55782	0,56422	0,57052
0,9	0,57674	0,58286	0,58890	0,59484	0,60070	0,60648	0,61217	0,61777	0,62329	0,62873
1,0	0,63409	0,63937	0,64457	0,64970	0,65474	0,65971	0,66461	0,66943	0,67418	0,67886

Таблица 2. Функция $E(x)$

x	*0,00*	*0,01*	*0,02*	*0,03*	*0,04*	*0,05*	*0,06*	*0,07*	*0,08*	*0,09*
0,0	0,00000	0,00995	0,01980	0,02955	0,03921	0,04877	0,05824	0,06761	0,07688	0,08607
0,1	0,09516	0,10417	0,11308	0,12190	0,13064	0,13929	0,14786	0,15634	0,16473	0,17304
0,2	**0,18127**	0,18942	0,19748	0,20547	0,21337	0,22120	0,22895	0,23662	0,24422	**0,25174**
0,3	0,25918	0,26655	0,27385	0,28108	0,28823	0,29531	0,30232	0,30927	0,31614	0,32294
0,4	0,32968	0,33635	0,34295	0,34949	0,35596	0,36237	0,36872	0,37500	0,38122	0,38737
0,5	0,39347	0,39950	0,40548	0,41140	0,41725	0,42305	0,42879	0,43447	0,44010	0,44567
0,6	0,45119	0,45665	0,46206	0,46741	0,47271	0,47795	0,48315	0,48829	0,49338	0,49842
0,7	0,50341	0,50836	0,51325	0,51809	0,52289	0,52763	0,53233	0,53699	0,54159	0,54616
0,8	0,55067	0,55514	0,55957	0,56395	0,56829	0,57259	0,57684	0,58105	0,58522	0,58934
0,9	0,59343	0,59748	0,60148	0,60545	0,60937	0,61326	0,61711	0,62092	0,62469	0,62842
1,0	0,63212	0,63578	0,63941	0,64299	0,64655	0,65006	0,65354	0,65699	0,66040	0.66378

Таблица 3. Функция $W(x,\nu)$ $\nu = 0{,}75$

x	*0,00*	*0,01*	*0,02*	*0,03*	*0,04*	*0,05*	*0,06*	*0,07*	*0,08*	*0,09*
0,0	0,00000	0,00192	0,00484	0,00830	0,01215	0,01633	0,02077	0,02545	0,03033	0,03540
0,1	0,04063	0,04601	0,05152	0,05715	0,06290	0,06874	0,07468	0,08071	0,08682	0,09300
0,2	0,09924	0,10555	0,11191	0,11832	0,12478	0,13128	0,13782	0,14439	0,15100	**0,15763**
0,3	0,16428	0,17096	**0,17765**	0,18436	0,19108	0,19781	0,20455	0,21130	0,21805	0,22479
0,4	0,23154	0,23829	0,24503	0,25176	0,25848	0,26520	0,27190	0,27859	0,28527	0,29193
0,5	0,29857	0,30519	0,31180	0,31838	0,32494	0,33148	0,33799	0,34448	0,35094	0,35738
0,6	0,36379	0,37017	0,37652	0,38284	0,38912	0,39538	0,40160	0,40779	0,41395	0,42008
0,7	0,42616	0,43222	0,43823	0,44421	0,45016	0,45607	0,46194	0,46777	0,47356	0,47931
0,8	0,48503	0,49071	0,49634	0,50194	0,50750	0,51301	0,51849	0,52393	0,52932	0,53467
0,9	0,53999	0,54526	0,55049	0,55568	0,56082	0,56593	0,57099	0,57601	0,58099	0,58593
1,0	0,59083	0,59568	0,60049	0,60526	0,60999	0,61468	0,61933	0,62393	0,62849	0,63301

Таблица 4. Функция $LN(x,\nu)$ $\nu = 0{,}75$

x	*0,00*	*0,01*	*0,02*	*0,03*	*0,04*	*0,05*	*0,06*	*0,07*	*0,08*	*0,09*
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00002	0,00005	0,00013	0,00028	0,00054
0,1	0,00093	0,00149	0,00226	0,00327	0,00454	0,00611	0,00800	0,01022	0,01278	0,01570
0,2	0,01899	0,02264	0,02665	0,03103	0,03576	0,04084	0,04625	0,05199	0,05804	**0,06439**
0,3	0,07103	0,07794	0,08510	0,09250	0,10013	0,10797	0,11600	0,12420	0,13257	0,14109
0,4	0,14974	0,15852	0,16740	**0,17637**	0,18543	0,19456	0,20374	0,21298	0,22225	0,23155
0,5	0,24087	0,25019	0,25953	0,26885	0,27816	0,28745	0,29671	0,30594	0,31513	0,32428
0,6	0,33338	0,34242	0,35141	0,36033	0,36919	0,37798	0,38670	0,39534	0,40390	0,41239
0,7	0,42079	0,42911	0,43735	0,44550	0,45356	0,46153	0,46941	0,47720	0,48489	0,49250
0,8	0,50001	0,50743	0,51475	0,52198	0,52912	0,53616	0,54311	0,54997	0,55673	0,56340
0,9	0,56998	0,57647	0,58286	0,58917	0,59538	0,60151	0,60755	0,61350	0,61936	0,62513
1,0	0,63082	0,63643	0,64195	0,64739	0,65275	0,65802	0,66322	0,66833	0,67337	0,67833

Проиллюстрируем использование разработанных таблиц для решения двух типовых задач по надежности.

Таблица 5. Распределение отказов изделий

№ изделия	Наработка до отказа t_i, час	№ изделия	Наработка до отказа t_i, час
1	706	26	193
2	2750	27	1309
3	1935	28	797
4	748	29	3391
5	244	30	3000
6	1508	31	746
7	300	32	311
8	440	33	2288
9	682	34	676
10	450	35	1182
11	1223	36	876
12	2596	37	593
13	1108	38	571
14	407	39	269
15	589	40	399
16	1315	41	284
17	1272	42	1236
18	1165	43	685
19	519	44	305
20	355	45	1271
21	1607	46	620
22	1173	47	1300
23	1227	48	637
24	1625	49	782
25	745	50	1668

Таблица 6. Вариационный ряд отказов изделий

№ отказа	Наработка до отказа t_i, час	№ отказа	Наработка до отказа t_i, час
1	193	26	782
2	244	27	797
3	269	28	876
4	284	29	1108
5	300	30	1165
6	305	31	1173
7	311	32	1182
8	355	33	1223
9	399	34	1227
10	407	35	1236
11	440	36	1271
12	450	37	1272
13	519	38	1300
14	571	39	1309
15	589	40	1315
16	593	41	1508
17	620	42	1607
18	637	43	1625
19	676	44	1668
20	682	45	1935
21	685	46	2288
22	706	47	2596
23	745	48	2750
24	746	49	3000
25	748	50	3391

Задача 1. На испытания поставлена выборка изделий объемом N =50 шт. По истечении времени испытаний $t_н$ = 400 ч. необходимо методом квантилей определить среднюю наработку до

отказа изделий T_1 для различных гипотез о распределении отказов (*DN*–распределение, экспоненциальное распределение, распределение Вейбулла и логарифмически нормальное распределение), сравнить ее с выборочным значением $\hat{T}_1$ и определить относительную погрешность δ_T.

Решение.

Распределение отказов изделий в процессе испытаний приведено в табл. 5. По результатам испытаний для плана $[NUN]$ предварительно получены выборочные оценки $\hat{T}_1$=1041ч. $\hat{V}$ =0,71. Представим вариационный ряд наработок изделий в виде табл. 6.

По табл. 6 определим количество отказов изделий на момент времени $t_н$ = 400 ч.: r = 9 отказов.

Вычислим эмпирическую вероятность отказов изделий на момент времени $t_н$ = 400 ч.:

$$\hat{F}(400) = \frac{r}{N} = 0{,}18.$$

Входя в табл. 1–4 по вероятности $\hat{F}(400) = 0{,}18$, находим для каждого из теоретических распределений отказов значения относительной наработки x.

Среднюю наработку до отказа изделий определяем по формуле $T_1 = \frac{t}{x}$. Результаты расчетов приведены в табл. 7.

Таблица 7. Результаты прогнозирования средней наработки до отказа

Обозначение функции распределения отказов	Относительная наработка, x	Средняя наработка до отказа, T_1, час	Относительная погрешность оценки, $\delta_T = \frac{\hat{T}_1 - T_1}{\hat{T}_1}$
DN	0,42	952	0,085
E	0,2	2000	-0,92
LN	0,32	1250	-0,2
W	0,43	930	0,107

Задача 2. Определить предполагаемое количество отказов изделий r в выборке объемом N =50 шт. по истечении времени испытаний $t_н$ =300 ч., сравнить его с выборочным значением $\hat{r}$ и определить относительную погрешность δ_r.

Средняя наработка до отказа изделий равна T_1=1041 ч., коэффициент вариации наработки до отказа равен V =0,71.

Решение.

По табл. 6 определим эмпирическую оценку количества отказов $\hat{r}$ за $t_н$ =300 ч. - $\hat{r}$ = 5.

Вычислим относительную наработку $x = \frac{t_н}{T_1}$ =0,288.

Входя в табл. 1–4 по значениям x, находим величины вероятностей отказов $F_{(300)}$.

Количество отказов вычислим по формуле $r = NF_{(300)}$. Результаты расчетов приведены в табл. 8.

Таблица 8. Результаты прогнозирования количества отказов

Обозначение функции распределения отказов	Вероятность отказов, $F_{(150)}$	Количество отказов, r, шт.	Относительная погрешность оценки, $\delta_r = \frac{\hat{r} - r}{\hat{r}}$
DN	0,06395	3	0,4
E	0,25174	12	-1,4
LN	0,15763	8	-0,6
W	0,06439	3	0,4

7. Выводы

Анализ результатов, приведенных в табл. 7, показал, что наиболее точный прогноз средней наработки до отказа изделий по квантилю малого уровня получен для *DN*–распределения. Погрешность составила 8,5% в сторону занижения результата. На втором месте по точности стоит распределение Вейбулла с погрешностью 10,7% в сторону занижения результата. Экспоненциальное распределение дало погрешность в 92% в сторону завышения результата.

Анализ результатов, приведенных в табл. 8, показал, что более точный прогноз количества отказов по относительной наработке малого уровня $(x << 1)$ получен для всех двухпараметрических распределений. Погрешность составила 40% в сторону занижения результата для *DN*–распределения и распределения Вейбулла. Для логарифмически нормального распределения погрешность составила 60%, но в сторону завышения результата. Экспоненциальное распределение дало большую погрешность в 140% в сторону завышения результата.

Разработанные таблицы основных строго вероятностных функций распределения отказов, имеющих широкое применение в теории надежности, позволяют создавать на их основе эффективные инженерные методики оценки и прогнозирования некоторых показателей надежности изделий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Погребинский С.Б., Стрельников В.П. Проектирование и надежность многопроцессорных ЭВМ. – М.: Радио и связь, 1988 – 168 с.
2. Стрельников В.П., Федухин А.В. Оценка и прогнозирование надежности электронных элементов и систем. – К.: Логос, 2002. – 486 с.