УДК 519.2: 530.1: 600.1

И.И. ГОРБАНЬ

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ПРИ НАРУШЕНИЯХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Анотація. *Поняття збіжності послідовності випадкових величин узагальнено на випадок збіжності послідовності гіпервипадкових величин. Показано, що закон великих чисел має місце не тільки у разі, коли є збіжність вибіркового середнього до фіксованого числа, але й коли такої збіжності немає. Встановлено, що вибіркове середнє випадкових величин може збігатись до фіксованого числа, прямувати до плюс чи мінус нескінченності або флуктувати в межах інтервалу, а вибіркове середнє гіпервипадкової величини може збігатись до фіксованого числа, множини фіксованих чисел, флуктувати в межах інтервалів, що не перетинаються, флуктувати в межах одного інтервалу або прямувати до плюс чи мінус нескінченності.*
Ключові слова: *закон великих чисел, статистична нестійкість, теорія гіпервипадкових явищ, збіжність.*

Аннотация. *Понятие сходимости последовательности случайных величин обобщено на случай сходимости последовательности гиперслучайных величин. Показано, что закон больших чисел имеет место не только при наличии сходимости выборочного среднего к фиксированному числу, но и тогда, когда такой сходимости нет. Установлено, что выборочное среднее случайной величины может сходиться к фиксированному числу, стремиться к плюс бесконечности, минус бесконечности или флуктуировать в пределах определенного интервала, а выборочное среднее гиперслучайной величины может сходиться к фиксированной величине, множеству фиксированных величин (множеству чисел), флуктуировать в непересекающихся интервалах, флуктуировать в пределах одного интервала или стремиться к плюс или минус бесконечности.*
Ключевые слова: *закон больших чисел, статистическая неустойчивость, теория гиперслучайных явлений, сходимость.*

Abstract. *The term sequence convergence of random quantities has been generalized to the sequence convergence of hyper-random quantities. It has been shown that the low of large numbers for random sequence is correct not only when the average tends to fixed number but in case of the absence of the convergence. It has been found that the average of random variables can approach to the fixed number, tend to plus or minus infinity or fluctuate within the interval and the average of hyper-random variable can approach to the fixed number, to the set of fix numbers, fluctuate within the of disjoint intervals, fluctuate within the single interval or tend to plus or minus infinity.*
Keywords: *low of large numbers, statistical instability, theory of hyper-random phenomenon, convergence.*

1. Введение

Окружающий мир подчиняется определенным физическим законам, среди которых особое место занимает статистическая устойчивость массовых явлений [1] – удивительный физический феномен, послуживший физической основой построения теории вероятностей, широко используемой в настоящее время в различных областях науки и техники.

Современную теорию вероятностей можно рассматривать как физико-математическую теорию [1]. Математическая ее часть базируется на абстрактной системе аксиом А.Н. Колмогорова [2], а физическая – на гипотезе статистической устойчивости физических явлений и возможности адекватного их описания стохастическими моделями [1, 3].

Как правило, гипотеза статистической устойчивости хорошо согласуется с результатами экспериментальных исследований на относительно небольших временных, пространственных и пространственно-временных интервалах наблюдения [1]. Однако на больших интервалах наблюдения происходят существенные нарушения устойчивости. Эти нарушения, присущие, по всей видимости, всем физическим явлениям, связаны с тем, что окружающий мир – открытая система, у которой меняются все характеристики и параметры, в том числе и статистические.

Исследования нарушений статистической устойчивости физических явлений и разработка эффективных средств адекватного представления явлений с учетом таких нарушений привели к построению новой физико-математической теории – теории гиперслучайных явлений [1, 3].

Математическая часть новой теории базируется на той же системе аксиом А.Н. Колмогорова, что и теория вероятностей, и потому, с точки зрения математики, является ветвью последней. Физическая часть теории гиперслучайных явлений основана на новой системе физических предположений: гипотезе ограниченной статистической устойчивости физических явлений и возможности адекватного их описания гиперслучайными моделями [1, 3].

В теории вероятностей базовыми математическими моделями являются случайные событие, величина и функция; в теории гиперслучайных явлений в таком качестве выступают гиперслучайные событие, величина и функция, представляющие собой множества не связанных между собой соответственно случайных событий, величин и функций. С общесистемных позиций физико-математическая теория гиперслучайных явлений является обобщением физико-математической теории вероятностей.

В обеих теориях ключевую роль играет закон больших чисел (ЗБЧ). Несмотря на трехсотлетнюю историю этого закона, до сих пор остаются практически не изученными его особенности при нарушениях статистической устойчивости.

Целью настоящей статьи является восполнение имеющегося пробела.

2. Статистически неустойчивые последовательности

Последовательность $X_1, X_2,...$ случайных величин (случайную выборку) будем называть статистически устойчивой [1, 4], если при устремлении объема выборки N к бесконечности математическое ожидание выборочной дисперсии $\bar{D}_{Y_N} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(Y_n - \bar{m}_{Y_N})^2$ флуктуации выборочного среднего $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ($n = \overline{1, N}$) стремится по вероятности к нулю, где $\bar{m}_{Y_N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Y_n$ – выборочное среднее флуктуации среднего. Последовательности, не удовлетворяющие этому условию, будем называть статистически неустойчивыми.

3. ЗБЧ для случайных величин при нарушении статистической устойчивости

Известная теорема Чебышева, выражающая закон больших чисел для последовательности $X_1,..., X_N$ попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии и математические ожидания $m_{x_1},\dots, m_{x_N}$, утверждает [5], что при устремлении N к бесконечности выборочное среднее $Y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$ стремится по вероятности к среднему $m_{y_N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_{x_n}$ математических ожиданий $m_{x_1},\dots, m_{x_N}$.

Обратим внимание на одну тонкость, ускользающую от многих: эта теорема не говорит о сходимости ни выборочного среднего Y_N, ни среднего математических ожиданий

m_{y_N}, а утверждает сходимость этих величин друг к другу или, иначе, утверждает сходимость к нулю их разности. Это означает, что выборочное среднее Y_N и среднее математических ожиданий m_{y_N} могут не иметь предела. Они могут, например, флуктуировать вокруг константы, но при этом, согласно теореме, меняются синхронно так, что при $N \to \infty$ разность между ними стремится к нулю.

Разберем два случая: когда имеет место сходимость выборочного среднего m_x^* и среднего математических ожиданий m_x к определенным фиксированным величинам (числам) и когда такой сходимости нет.

В первом случае предел среднего математических ожиданий m_x может быть описан функцией распределения в виде функции единичного скачка в точке m_x. К ней стремится функция распределения $F_{m_x^*}(x)$ выборочного среднего m_x^* при $N \to \infty$ (рис. 1).

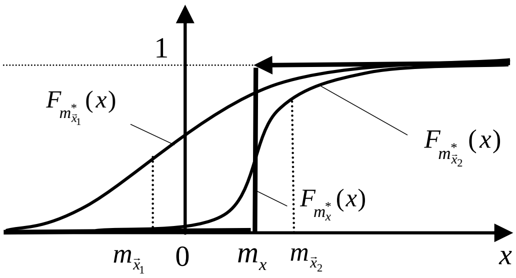

Рис. 1. Схема формирования функции распределения выборочного среднего при $N \to \infty$, когда выборочное и среднее математических ожиданий – фиксированные величины

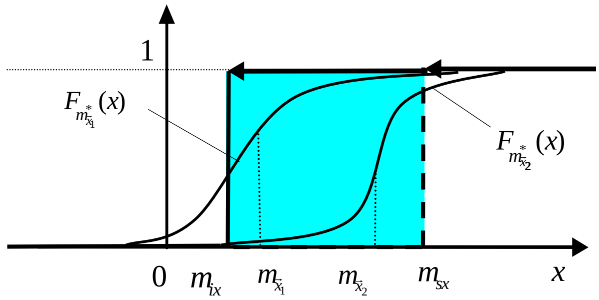

Рис. 2. Схема формирования функции распределения выборочного среднего при $N \to \infty$, когда выборочное и среднее математических ожиданий – конечные интервалы

На рисунке кривыми $F_{m^*_{\bar{x}_1}}(x), F_{m^*_{\bar{x}_2}}(x)$ изображены функции распределения среднего для двух выборок разных объемов, а точками $m_{\bar{x}_1}$, $m_{\bar{x}_2}$ на оси x – соответствующие математические ожидания.

Во втором случае при $N \to \infty$ выборочное среднее m_x^* и среднее математических ожиданий m_x могут либо стремиться к плюс или минус бесконечности, либо флуктуировать в определенных интервалах.

Вариант, когда при $N \to \infty$ величины m_x^* и m_x находятся в интервалах, представляет особый интерес. Эти интервалы могут быть конечными или бесконечными. Если интервалы конечны, то существуют границы m_{ix}^*, m_{sx}^* выборочного среднего m_x^* и границы m_{ix}, m_{sx} среднего математических ожиданий m_x. Эти границы можно описать функциями распределения в виде функций единичного скачка в точках m_{ix}^*, m_{sx}^*, m_{ix}, m_{sx}.

На основании закона больших чисел m_{ix}^* стремится к m_{ix}, а m_{sx}^* – к m_{sx} (рис. 2). Интервал [m_{ix}, m_{sx}] – область, в которой флуктуирует выборочное среднее при $N \to \infty$.

Таким образом, выборочное среднее случайных величин может сходиться к определенному числу, стремиться к плюс или минус бесконечности или флуктуировать в определенном интервале. В последнем случае можно говорить о сходимости выборочного среднего к интервалу [1].

На рис. 3 и 4 приведены реализации двух статистически неустойчивых процессов x_n, $n = \overline{1, N}$ (*а*), модули их мгновенных спектров S_{x_k}, $k = \overline{1, N/2}$ (*б*) и выборочные средние y_n, $n = \overline{1, N}$ (*в*).

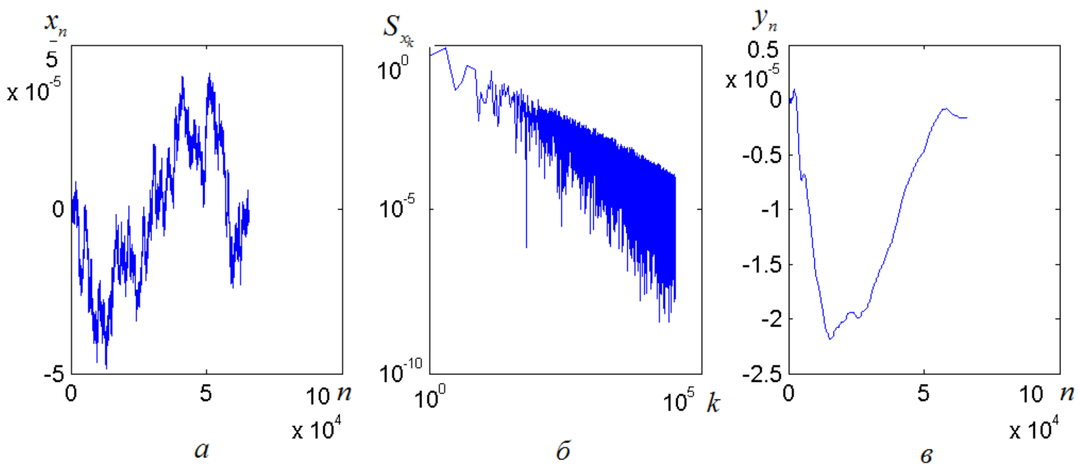

Рис. 3. Реализация статистически неустойчивого процесса 1, модуль ее мгновенного спектра и ее выборочное среднее

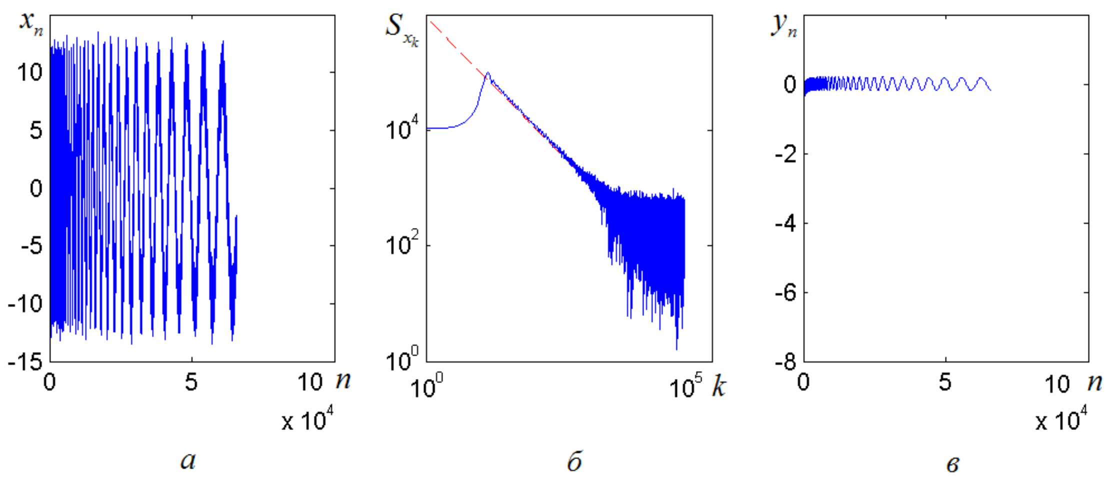

Рис. 4. Реализация статистически неустойчивого процесса 2, модуль ее мгновенного спектра и ее выборочное среднее

Комплексный спектр реализации процесса 1, приведенной на рис. 3*б*, описывается выражением $\dot{S}_{x_k} = \frac{n_k}{k}\exp(\mathrm{j}2\pi a \sin(bk))$, где n_k – отсчеты белого гауссовского шума с единичной дисперсией и нулевым математическим ожиданием, k – номер спектрального отсчета, a и b – параметры ($a = 200$, $b = 0,78$).

Реализация процесса 2, представленная на рис. 4*а*, описывается выражением $x_n = A\cos(2\pi f_0 \lg(n)/\lg N) + n_n$, где A – амплитуда ($A = 10$), f_0 – параметр, характеризующий частоту ($f_0 = 20$), n_n – отсчеты белого гауссовского шума с единичной дисперсией и нулевым математическим ожиданием. Пунктиром на рис. 4 *а* изображен для сравнения модуль мгновенного спектра $S(f) \sim \frac{1}{f}$.

Из рис. 3 *в* и 4 *в* видно, что в обоих случаях выборочные средние не стремятся к каким-либо определенным числам, а флуктуируют, оставаясь внутри определенных интервалов.

4. Сходимость последовательности гиперслучайных величин

Для дальнейшего изложения необходимо ввести понятие сходимости последовательности гиперслучайных величин. Вводимое понятие базируется на известных понятиях сходимости последовательности случайных величин [5].

Пусть имеется последовательность гиперслучайных величин $\mathrm{X} = \{X_1, ..., X_N\}$ и гиперслучайная величина X. Для всех $X_1, ..., X_N$ и X определены условные функции распределения $F_{x_1/g_1}(x), ..., F_{x_N/g_N}(x)$ и $F_{x/g}(x)$ для всех условий $g_1, \ldots, g_N \in G$, $g \in G$, где G принадлежит метрическому топологическому пространству с определенной метрикой.

Тогда последовательность X:

1) сходится (в смысле Бернулли) к X по функции распределения ($F_{x_N}(x) \to F_x(x)$), если в каждой точке x, где $F_{x/g}(x)$ непрерывна, для всех условий $g \in G$ при $N \to \infty$ и $g_N \to g$

$$F_{x_N/g_N}(x) \to F_{x/g}(x), \tag{1}$$

т.е., если для всех $g \in G$ последовательность случайных величин $X_1/g_1, ..., X_N/g_N$ сходится по функции распределения к случайной величине X/g;

2) сходится к X в среднеквадратическом $(\mathrm{M}[|X_N - X|^2] \to 0)$, если для всех условий $g \in G$ при $N \to \infty$ и $g_N \to g$ условные математические ожидания

$$\mathrm{M}[|X_N/g_N - X/g|^2] \to 0, \tag{2}$$

т.е., если для всех $g \in G$ последовательность случайных величин $X_1/g_1, ..., X_N/g_N$ сходится к случайной величине X/g в среднеквадратическом. При такой сходимости можно писать $\underset{\substack{N\to\infty \\ g_N \to g}}{\mathrm{l.i.m.}} X_N/g_N = X/g$ или

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} X_N = X. \tag{3}$$

Обратим внимание, что в данном случае математическое ожидание рассчитывается по двумерному распределению случайных величин X_N/g_N и X/g;

3) сходится к X почти наверное (с вероятностью единица – $P(X_N \to X) = 1$), если для всех условий $g \in G$ при $N \to \infty$ и $g_N \to g$ условная вероятность

$$P(X_N/g_N \to X/g) = 1, \tag{4}$$

т.е., если $\forall g \in G$ случайная последовательность $X_1/g_1, ..., X_N/g_N$ сходится с вероятностью единица к случайной величине X/g. При такой сходимости можно писать

$$\lim_{N\to\infty} X_N = X; \tag{5}$$

4) сходится к X по вероятности $(P(|X_N - X| > \varepsilon) \to 0)$, если для всех условий $g \in G$ и $\varepsilon > 0$ при $N \to \infty$ и $g_N \to g$

$$P(|X_N / g_N - X / g| > \varepsilon) \to 0, \qquad (6)$$

т.е., если $\forall g \in G$ случайная последовательность $X_1 / g_1, ..., X_N / g_N$ сходится по вероятности к случайной величине X / g .

Заметим, что в частном случае, когда X представляет собой множество чисел, описываемых функциями распределения в виде функций единичного скачка, можно говорить о сходимости гиперслучайных величин к этому множеству чисел. Когда это множество представляет собой интервал, можно говорить о сходимости гиперслучайной величины к этому интервалу.

Так же, как и для последовательности случайных величин, наиболее слабая сходимость для последовательности гиперслучайных величин – сходимость по распределению. Более сильная сходимость – по вероятности. Еще более сильная сходимость – в среднеквадратическом и с вероятностью единица. Следует иметь в виду, что некоторые последовательности сходятся в среднеквадратическом, но не сходятся с вероятностью единица; другие же – сходятся с вероятностью единица, но не сходятся в среднеквадратическом. Эти положения прямо следуют из аналогичных положений для последовательности случайных величин. Соотношения между разными типами сходимости условно изображены на рис. 5.

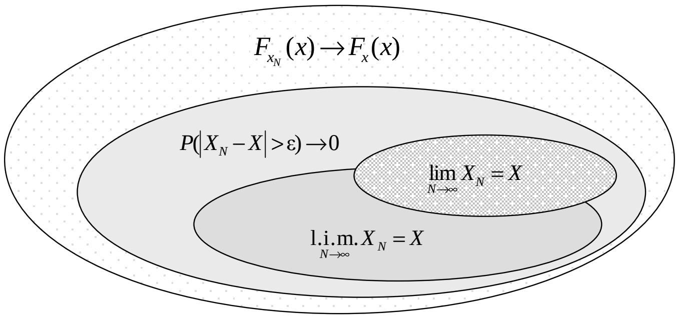

Рис. 5. Соотношения между разными типами сходимости

5. ЗБЧ для гиперслучайных величин при нарушении статистической устойчивости

Для гиперслучайных величин справедлива следующая теорема, аналогичная приведенной теореме Чебышева.

Теорема. Пусть гиперслучайная величина $X = \{X / g \in G\}$ представляет собой совокупность случайных величин X / g для различных статистических условий $g \in G$ с условными математическими ожиданиями $m_{x/g}$ и ограниченными условными дисперсиями $D_{x/g}$. Нижняя и верхняя границы математического ожидания гиперслучайной величины X равны соответственно m_{ix}, m_{sx}. Из генеральной совокупности гиперслучайной величины X, полученной в неконтролируемо меняющихся статистических условиях, формируется гиперслучайная выборка $\{X_1, \ldots, X_N\}$ объемом N с взаимно независимыми для всех условий элементами. По этой выборке рассчитывается гиперслучайное выборочное среднее $m_x^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$.

Тогда, при устремлении объема выборки к бесконечности ($N \to \infty$), гиперслучайное выборочное среднее m_x^* сходится по вероятности к множеству $m_x = \{m_{x/\vec{g}},\ \vec{g} \in \vec{G}\}$, представляющему собой множество средних $m_{x/\vec{g}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_{x/g_n}$ условных математических ожиданий $m_{x/g_1}, \ldots, m_{x/g_N}$ случайных величин $X / g_1, \ldots, X / g_N$, соответствующих всевозможным условиям $g_n \in G,\ n = \overline{1, N}$, а нижняя и верхняя границы этого выборочного среднего сходятся по вероятности соответственно к нижней и верхней границам математического ожидания гиперслучайной величины X :

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\inf_{\vec{g}\in\vec{G}} m_x^* - m_{ix}\right| > \varepsilon\right\} = 0,$$
$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\sup_{\vec{g}\in\vec{G}} m_x^* - m_{sx}\right| > \varepsilon\right\} = 0, \qquad (7)$$

где $P\{z\}$ – вероятность условия z , а ε – как угодно малое положительное число.

Доказательство теоремы приведено в работах [1, 5].

Нетрудно убедиться, что известные модификации закона больших чисел для последовательности случайных величин [6] допускают обобщения на случай последовательности гиперслучайных величин, в частности, теорема, определяющая необходимые и достаточные условия сходимости последовательностей по вероятности.

Пределы условных средних математических ожиданий $m_{\vec{x}/\vec{g}}$ при фиксированных $\vec{g}\in\vec{G}$ могут существовать, а могут не существовать.

Если они существуют для всех $\vec{g}\in\vec{G}$, то гиперслучайное выборочное среднее m_x^* сходится к множеству детерминированных величин m_x. Отсутствие предела для какого-нибудь $\vec{g}\in\vec{G}$ означает, что соответствующее условное среднее математических ожиданий либо стремится к плюс или минус бесконечности, либо сходится к интервалу.

В случае существования пределов условных средних математических ожиданий $m_{\vec{x}/\vec{g}}$ для всех $\vec{g}\in\vec{G}$ множество чисел m_x может быть описано множеством условных функций распределения в виде функций единичного скачка в точках $m_{\vec{x}/\vec{g}}$. Границы этого множества m_{ix}, m_{sx} описываются функциями распределения в виде функций единичного скачка в точках m_{ix}, m_{sx} (рис. 6).

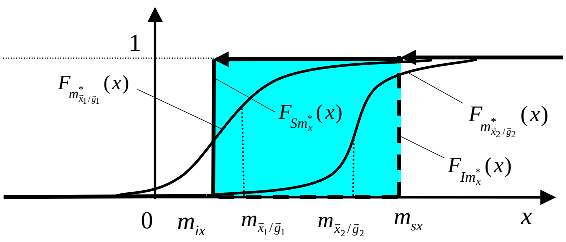

Рис. 6. Схема формирования границ функции распределения $F_{Sm_x^*}(x)$, $F_{\mathrm{Im}_x^*}(x)$ выборочного среднего при $N\to\infty$, когда выборочное и среднее математических ожиданий – множества чисел

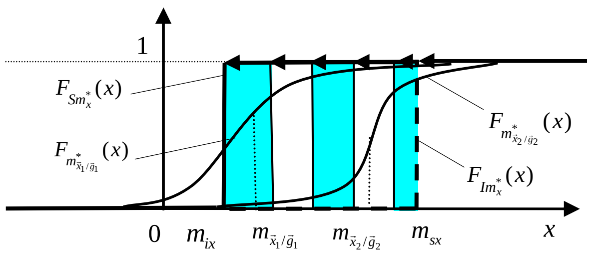

Рис. 7. Схема формирования границ функции распределения $F_{Sm_x^*}(x)$, $F_{\mathrm{Im}_x^*}(x)$ выборочного среднего при $N\to\infty$, когда выборочное и среднее математических ожиданий – конечные мультиинтервалы

На рисунке кривыми $F_{m^*_{\vec{x}_1/\vec{g}_1}}(x)$, $F_{m^*_{\vec{x}_2/\vec{g}_2}}(x)$ изображены функции распределения среднего для двух разных выборок конечного объема в условиях $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$, а точками $m_{\vec{x}_1/\vec{g}_1}$, $m_{\vec{x}_2/\vec{g}_2}$ на оси x – соответствующие им математические ожидания.

Когда условные математические ожидания $m_{\tilde{x}/\vec{g}}$ $\forall \vec{g} \in \vec{G}$ всюду плотно заполняют интервал $[m_{ix}, m_{sx}]$, гиперслучайное выборочное среднее при $N \to \infty$ стремится к интервальной величине $[m_{ix}, m_{sx}]$, изображенной на рис. 6 затемненной областью.

Когда условные математические ожидания $m_{\tilde{x}/\vec{g}}$ $\forall \vec{g} \in \vec{G}$ одинаковы ($m_{\tilde{x}/\vec{g}} = m_x$). При этом границы математических ожиданий m_{ix}, m_{sx} совпадают ($m_{ix} = m_{sx} = m_x$) и при увеличении объема выборки к бесконечности выборочное среднее гиперслучайной величины стремится к детерминированной величине m_x.

В случае сходимости при $N \to \infty$ всех условных средних математических ожиданий $m_{\tilde{x}/\vec{g}}$ к интервалам (рис. 7) гиперслучайная величина m_x представляет собой мультиинтервал (многосвязный интервал) – множество конечных интервалов [7], изображенных на рисунке затемненными областями.

Если отдельные интервалы мультиинтервала полностью перекрываются, то мультиинтервал m_x вырождается в интервал $[m_{ix}, m_{sx}]$. Тогда выборочное среднее m_x^* при $N \to \infty$ флуктуирует в этом интервале, не выходя за его границы.

Таким образом, при $N \to \infty$ выборочное среднее гиперслучайной величины может сходиться к фиксированной величине, множеству фиксированных величин (множеству чисел), флуктуировать в непересекающихся интервалах условных границ, флуктуировать во всем интервале $[m_{ix}, m_{sx}]$ или стремиться к $+\infty$ или $-\infty$.

Многообразие типов величин, к которым стремятся выборочные средние случайных и гиперслучайных величин, необходимо учитывать при моделировании реальных процессов.

5. Выводы

1. Понятие сходимости последовательности случайных величин обобщено на случай сходимости последовательности гиперслучайных величин.
2. Показано, что закон больших чисел имеет место не только при наличии сходимости выборочного среднего к фиксированному числу, но и тогда, когда такой сходимости нет.
3. Установлено, что выборочное среднее случайной величины может сходиться к фиксированному числу, стремиться к плюс бесконечности, минус бесконечности или флуктуировать в пределах интервала.
4. Установлено, что выборочное среднее гиперслучайной величины может сходиться к фиксированной величине, множеству фиксированных величин (множеству чисел), флуктуировать в непересекающихся интервалах, флуктуировать в пределах одного интервала или стремиться к плюс или минус бесконечности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2011. – 318 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html.
2. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей / Колмогоров А.Н. – М.: ОНТИ, 1936. – 175 с.; 1974. – 119 с.
3. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений / Горбань И.И. – К.: ИПММС НАН Украины, 2007. – 184 с. – Режим доступа: http://ifsc.ualr.edu/jdberleant/intprob.
4. Gorban I.I. Disturbance of statistical stability / I.I. Gorban // Information Models of Knowledge. – Sofia: ITHEA, 2010. – P. 398 – 410.
5. Горбань И.И. Особенности закона больших чисел при нарушениях статистической устойчивости / И.И. Горбань // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2011. – № 7. – С. 31 – 42.

6. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Гнеденко Б.В. – М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1988. – 448 с.
7. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ / Шарый С.П. – XYZ: Институт вычислительных технологий, 2010. – 597 с. – Режим доступа: http://www.nsc.ru/interval.

Стаття надійшла до редакції 08.09.2011