

УДК 534.22-18

## АНТИСИМЕТРИЧНІ ХВИЛІ В СИСТЕМІ ДВОХ ПАРАЛЕЛЬНИХ СТЕРЖНІВ, ПЕРІОДИЧНО ПІДКРІПЛЕНИХ ЖОРСТКИМИ ПОПЕРЕЧНИМИ ПЕРЕГОРОДКАМИ І ЗВ'ЯЗАНИХ З АКУСТИЧНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

В. Н. ОЛІЙНИК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 11.06.2008

Розглянуто можливість поширення антисиметричних гармонічних хвиль у системі двох періодично підкріплених жорсткими поперечними перегородками паралельних пружних стержнів. При цьому вважалося, що обмежені стержнями й сусідніми перегородками об'єми заповнені акустичним середовищем (газом), а самі стержні коливаються протифазно. Із застосуванням методу Флоке одержано відповідне дисперсійне рівняння і проаналізовано його корені. Збуджена таким способом хвиля – еквіволюмінальна, тому внутрішнє акустичне середовище відіграє тут роль приєднаної маси. Як наслідок, у цьому випадку ефективна пружність системи і відповідна швидкість поширення хвилі виявилися значно нижчими, ніж при синфазних коливаннях стержнів, які супроводжуються об'ємними деформаціями газонаповнених камер. Одержаний результат дозволяє на якісному рівні пояснити деякі експериментальні дані стосовно хвильових властивостей пористих газонаповнених середовищ, зокрема, легеневої паренхіми.

Рассмотрена возможность распространения антисимметричных гармонических волн в системе двух периодически подкрепленных жесткими поперечными перегородками паралельных упругих стержней. При этом считалось, что ограниченные стержнями и соседними перегородками объемы заполнены акустической средой, а сами стержни колеблются противофазно. С применением метода Флоке получено соответствующее дисперсионное уравнение и проанализированы его корни. Возбужденная таким способом волна – эквиволюминальная, поэтому внутренняя акустическая среда играет здесь роль присоединенной массы. Как следствие, в этом случае эффективная упругость системы и соответствующая скорость распространения волны оказались значительно ниже, чем при синфазных колебаниях стержней, которые сопровождаются объемными деформациями газонаполненных камер. Полученный результат позволяет на качественном уровне объяснить некоторые экспериментальные данные, касающиеся волновых свойств пористых газонаполненных сред, в частности, легочной паренхимы.

The paper deals with considering the possibility of antisymmetric harmonic wave propagation in the system of two elastic rods periodically supported by rigid transverse barriers. The volumes bounded by the rods and adjacent barriers were considered to be filled with an acoustic medium (gas), with rods performing an antiphase motion. With use of the Floquet method, the corresponding dispersion equation has been obtained and its roots have been analyzed. The wave, excited in such way, is an equivoluminal one, therefore, the internal acoustic medium plays the role of an equivalent mass. Hence, in this case the effective system elasticity parameter and corresponding wave propagation velocity are considerably lower than that occurring at the in-phase rod vibration, accompanying by volume deformations of the gas-filled cells. The obtained result allows the qualitative explanation of some experimental data concerning wave properties of gas-filled porous media, in particular, the parenchyma of the lung.

### ВСТУП

Починаючи з останньої чверті ХХ сторіччя, у світі спостерігається інтенсивний розвиток засобів об'єктивної реєстрації, аналізу й відображення акустичних характеристик звуків дихання, які покликані модернізувати одну з найпоширеніших традиційних діагностичних методик – аускультацию респіраторного тракту людини [1, 2]. Природно, що це стимулювало численні дослідження, спрямовані на з'ясування акустичних властивостей однієї з найбільш значущих компонент органів дихання – легеневої тканини (паренхіми) [3–9]. Очевидно, що за рахунок суттєво неоднорідної піноподібної структури легень, які складаються з тонкостінних повітряних пухирців-альвеол, зв'язаними з бронхіальним деревом [10], їхня здатність

проводити сигнали звукового діапазону повинна мати певні особливості.

Результати експериментів, проведених при різноманітних способах збудження акустомеханічних коливань у препарованих органах та в легенях *in situ*, дозволили з певним ступенем достовірності розділити зафіксовані хвилі на три типи [6]. Два з них – це добре відомі поздовжня [3–5, 9] й поперечна [7] хвилі, властивості яких безпосередньо визначаються ефективними параметрами еквівалентного однорідного пружного середовища [11]. При локалізованому імпульсному (ударному) механічному збудженні поверхні препарованої легень в діапазоні до 100÷200 Гц досить надійно фіксувалася ще одна хвиля. Її було ідентифіковано як поздовжню хвилю, що відповідає так званому квазістатичному модулю пружності легень, у яко-

му знівелювана роль об'ємної пружності альвеолярного легеневого газу [6–8]. Виявилось, що відповідна фазова швидкість лежить між характерними швидкостями поширення поздовжньої й поперечної хвиль. Величини всіх трьох швидкостей сильно залежать від ступеня розтягу легень. Вони зростають при збільшенні наповненості легень газом. Основними причинами цього вважаються зростання пружності стінок альвеол по мірі розтягу разом з одночасним зменшенням середньої густини середовища [12].

Для пояснення природи другої поздовжньої хвилі висувались різні гіпотези. Так, автори робіт [6, 13] вважали, що насправді це – традиційна поздовжня хвиля, для якої на відносно низьких частотах справедливим стає наближення відкритих камер (open-cell approximation): на періоді коливання газ вільно перетікає між альвеолою й відповідними термінальними бронхіолами без зміни свого об'єму, тому його стисливість не бере участі у формуванні еквівалентної пружності легень. Втім, навіть за попередніми грубими оцінками цей ефект проявляється лише в діапазоні нижче 30 Гц [13].

Інша версія була пов'язана з розглядом паренхіми як насиченого пористого середовища, в якому поровий газ-наповнювач має можливість рухатись відносно тканинного “скелета” (теорія Біо) [14]. Тут можуть існувати хвилі трьох типів – дві поздовжні й одна поперечна, причому друга поздовжня хвиля формується саме за рахунок інтенсивних відносних рухів порової рідини (газу). При цьому для відносно м'якого “скелета” можливі випадки, коли фазова швидкість другої поздовжньої хвилі лежить між фазовими швидкостями двох інших хвиль [15]. На жаль, проведена асимптотична оцінка для паренхіми легень показала, що тут друга поздовжня хвиля мала б швидкість, яка радше відповідає хвилеводному механізмові поширення у бронхіальному дереві [16]. Таким чином, досі жодна з “відкритих” моделей не змогла задовільно пояснити результати досліджень [6–8].

Виходячи з цього, у статті [17] було запропоновано принципово інший підхід, ідея якого полягала в тому, щоб замість мікронеоднорідного середовища розглянути регулярну періодичну систему зі спрощеною геометрією, еквівалентну йому в тому сенсі, що на неї переносяться головні фізичні властивості компонент-фаз, а геометричні параметри структурної одиниці відповідають характерним розмірам структурного елемента середовища. Для хвиль, довжина яких значно перевищує масштаб мікроструктури, акустичні властивості такої регулярної періодичної системи будуть подібними до акустичних властивостей середови-

ща. Важливо, що усі заповнені газом камери вважаються замкненими, але всередині кожної камери збережено можливість руху газу-наповнювача відносно пружних стінок. Фактично, це означає, що ми обмежились моделюванням режимів, які не супроводжуються помітним витіканням альвеолярного газу в повітроводи бронхіального дерева.

Геометрію розглянутої в [17] періодичної акустопружної структури зображено на рис. 1. Це – два паралельні ідеально пружні стержні товщиною  $d$ , періодично (з кроком  $l$ ) підкріплені перпендикулярними до них жорсткими масивними тонкостінними перегородками довжиною  $2h$ . Вважалось, що матеріал стержнів має густину  $\rho_t$ , модуль Юнга  $E_t$  і коефіцієнт Пуассона  $\nu$ , а перегородка – погонну (на одиницю площі) масу  $\gamma$ . Обмежені перегородками порожнини заповнені акустичним середовищем без втрат з густиною  $\rho_g$  і швидкістю звуку  $c_g$ . У статті [17] знайдено фазову швидкість гармонічної хвилі, для якої рух стержнів – синфазний (найпростіша квазіодновимірна кінематика системи). Встановлено, що результуюче значення відповідає швидкості поширення поздовжньої (об'ємної) хвилі у пружному середовищі з осередненими параметрами. Для легень вона відома як швидкість хвилі Райса [3, 6].

Цю статтю, яка є логічним продовженням дослідження [17], присвячено вивченню випадку протифазного руху направляючих стержнів. Відмінність цієї моди коливань від розглянутої раніше полягає в тому, що тепер заповнені газом камери деформуються без зміни об'єму, а створене при цьому акустичне поле в камері – антисиметричне й має виражену багатомодову двовимірну структуру. Очікується, що відповідна фазова швидкість гармонічної хвилі в структурі виявиться значно нижчою, ніж вказана в статті [17], і відповідатиме експериментальним оцінкам [6–8]. Такий результат дозволив би пояснити існування повільної поздовжньої хвилі без залучення гіпотези про витікання альвеолярного газу в бронхіальне дерево при проходженні звукової хвилі через легеню.

## 1. ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ

Часові залежності в задачі задаються спільним гармонічним множником  $e^{-i\omega t}$ . Тому надалі працюватимемо лише з амплітудними значеннями відповідних величин, відділивши змінну  $t$ . Додатково зауважимо, що тут розглядається модельна двовимірна постановка для системи, нескінченної в напрямку, перпендикулярному до площини рисунка.

Як і в [17], представимо направляючі стержні у

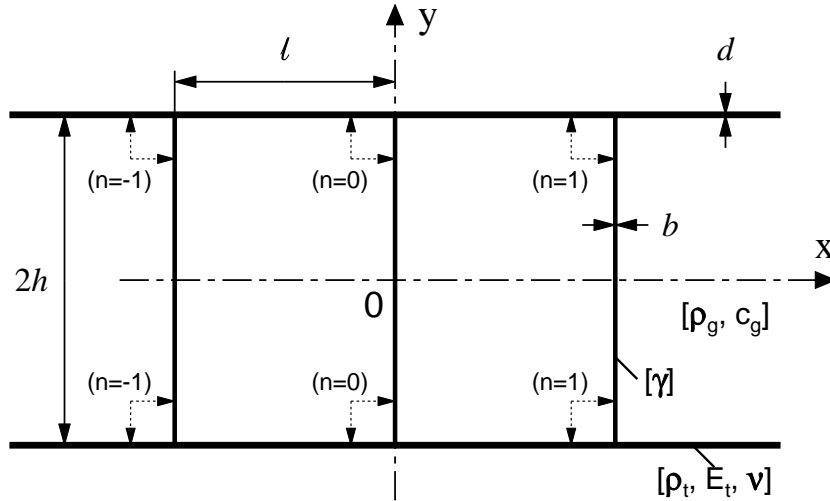


Рис. 1. Геометрія періодичної акустопружної структури

вигляді послідовності з'єднаних ланок довжиною  $l$ , кожній з яких (і відповідній камері) присвоємо номер  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , див. рис. 1. Тоді  $u_n^\pm$  позначатиме зміщення  $n$ -ої ланки стержня (знак "+" приписуємо верхньому з них, а "-" – нижньому). Оскільки тут розглядаються виключно антисиметричні рухи, то зміщення верхнього й нижнього стержнів мають однакову амплітуду й відносний зсув по фазі на  $\pi$  радіан:

$$u_n^- = u_n^+ e^{i\pi} = -u_n^+.$$

Це дозволяє спростити подальші записи, формально вважаючи  $u_n^+ \equiv u_n$ .

Потенціал швидкості в  $n$ -ій камері позначимо як  $\phi_n$ , а відповідні акустичний тиск і коливальну швидкість –  $p_n$  і  $v_n$ . Тоді

$$p_n = \frac{d\phi}{dt} = -i\omega\phi, \quad v_n = -\frac{d\phi}{dx}.$$

У своїх областях існування поля  $u_n$  і  $\phi_n$  задовольняють рівняння

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} + k_t^2 u_n = 0, \quad k_t = \frac{\omega}{c_t}, \quad (1)$$

$$c_t = \sqrt{\frac{E_t^*}{\rho_t}}, \quad E_t^* = \frac{E_t}{1-\nu},$$

$$\nabla^2 \phi_n + k_g^2 \phi_n = 0, \quad k_g = \frac{\omega}{c_g}, \quad (2)$$

де оператор Лапласа –

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}.$$

Вважатимемо стержні недеформівними в поперечному напрямку. Тому додатково слід вимагати рівності нулю нормальних швидкостей на верхній і нижній стінках камер:

$$\left. \frac{d\phi_n}{dy} \right|_{y=\pm h} = 0, \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n. \quad (3)$$

Оскільки верхній та нижній стержні коливаються у протифазі, то умови спряження кінематичних величин у вузлах – точках кріплення перегородок будуть виглядати так:

$$u_n|_{x=nl} = u_{n+1}|_{x=nl}, \quad (4)$$

$$-\left. \frac{d\phi_n}{dx} \right|_{x=nl} = -\left. \frac{d\phi_{n+1}}{dx} \right|_{x=nl},$$

$$-\left. \frac{d\phi_n}{dx} \right|_{x=nl} = -i\omega \frac{y}{h} u_n|_{x=nl}, \quad |y| \leq h. \quad (5)$$

Умову динамічної рівноваги для перегородки слід записати як

$$-2d(\sigma_n - \sigma_{n+1})|_{x=nl} + \int_{-h}^h (p_n - p_{n+1})|_{x=nl} dy + \omega^2 2\gamma h u_n|_{x=nl} = 0, \quad (6)$$

$$\sigma_n = E_t^* \frac{du_n}{dx}.$$

## 2. ДИСПЕРСІЙНЕ РІВНЯННЯ

Для визначення параметрів гармонічних хвиль, які можуть поширюватися в розглянутій періодичній структурі, застосуємо метод (теорему) Флоке [18, 19]. При цьому шуканий розв'язок слід записати у формі  $\sim e^{i(\varkappa x - \omega t)}$  з узагальненою амплітудою, модульованою відносно поперечної координати  $y$ . Невідома константа поширення  $\varkappa$  і відповідна фазова швидкість  $c = \omega / \varkappa$  визначаються як розв'язки дисперсійного рівняння системи.

Згідно з прийнятою методикою, запишемо умови періодичності для фізичних полів, які випливають з нав'язаної гармонічної залежності відносно  $x$ . Беручи до уваги очевидний зв'язок між  $\sigma_n$ ,  $v_n$  і першими похідними відповідних величин, одержимо

$$u_n|_{x=(n-1)l} e^{i\varkappa l} = u_{n+1}|_{x=nl},$$

$$\left. \frac{du_n}{dx} \right|_{x=(n-1)l} e^{i\varkappa l} = \left. \frac{du_{n+1}}{dx} \right|_{x=nl}, \quad (7)$$

$$\phi_n|_{x=(n-1)l} e^{i\varkappa l} = \phi_{n+1}|_{x=nl},$$

$$\left. \frac{d\phi_n}{dx} \right|_{x=(n-1)l} e^{i\varkappa l} = \left. \frac{d\phi_{n+1}}{dx} \right|_{x=nl}, \quad (8)$$

$$|y| \leq h.$$

Загальний розв'язок рівняння руху стержня (1) має стандартний вигляд:

$$u_n = U_{1n} e^{ik_t x} + U_{2n} e^{-ik_t x}, \quad (9)$$

З умов періодичності випливає

$$U_{1n} = e^{i\varkappa x} e^{-ik_t x} U_{1n-1},$$

$$U_{2n} = e^{i\varkappa x} e^{ik_t x} U_{2n-1}. \quad (10)$$

Зауважимо, що саме таким є коректний запис співвідношень [17, (7)].

Залежність акустичного поля від координати  $y$  виникає за рахунок повороту перегородок відносно своїх геометричних центрів  $y = 0$ . Тому розв'язок рівняння Гельмгольца (2) для  $\phi_n$  має задовольняти граничні умови (3), (5) для вузлів  $x = (n-1)l$  та  $x = nl$ . Опустивши тривіальну процедуру розв'язання відповідної граничної задачі для  $n$ -ої камери, запишемо його в кінцевому ви-

гляді:

$$\phi_n = 2i\omega \left( \frac{2}{\pi} \right)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \sin \frac{\pi(2s+1)}{2h} y \times$$

$$\times \frac{1}{\alpha_s \sin \alpha_s l} \frac{(-1)^s}{(2s+1)^2} \times$$

$$\times [u_n|_{x=(n-1)l} \cos \alpha_s(x-nl) -$$

$$- u_n|_{x=nl} \cos \alpha_s(x-(n-1)l)];$$

$$\alpha_s = \sqrt{k_g^2 - \frac{\pi^2(2s+1)^2}{4h^2}}.$$

Важливим наслідком застосованої процедури стало вираження акустичного потенціалу через зміщення стержнів, у якому вже автоматично враховані умови періодичності, а невизначені коефіцієнти можна винести за знак суми як амплітуди кінематичного збудження.

Переписавши кінематичну й динамічну умови спряження (6), (4) з урахуванням виразу (11) для акустичного потенціалу й умови періодичності (7), одержуємо систему з двох функціональних рівнянь:

$$u_n|_{x=nl} - e^{i\varkappa l} u_n|_{x=(n-1)l} = 0,$$

$$\left. \frac{du_n}{dx} \right|_{x=nl} - e^{i\varkappa l} \left. \frac{du_n}{dx} \right|_{x=(n-1)l} - u_n|_{x=nl} \times \quad (12)$$

$$\times \left[ 2 \frac{\rho_g h}{\rho_t d} (\eta_\alpha - \eta_\varkappa \cos \varkappa l) + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{\rho_t d} \right] = 0.$$

За рахунок підстановки загального розв'язку (9) співвідношення (12) зводяться до однорідної лінійної алгебраїчної системи. Прирівнюючи до нуля її визначник, одержуємо дисперсійне рівняння, яке визначає величини сталої поширення  $\varkappa$ , для яких у розглянутій періодичній структурі можуть існувати гармонічні хвилі. Наведемо його остаточний вигляд:

$$e^{2i\varkappa l} - 2q e^{i\varkappa l} + 1 = 0, \quad (13)$$

де

$$q = \frac{\cos k_t l - \left( \eta_\alpha \frac{\rho_g h}{\rho_t d} + \frac{1}{6} \frac{h}{l} \frac{\gamma}{\rho_t d} \right) k_t l \sin k_t l}{1 - \eta_\kappa \frac{\rho_g h}{\rho_t d} k_t l \sin k_t l};$$

$$\eta_\alpha = -2 \left( \frac{2}{\pi} \right)^4 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_s l \sin \alpha_s l} \frac{1}{(2s+1)^4};$$

$$\eta_\kappa = -2 \left( \frac{2}{\pi} \right)^4 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\cos \alpha_s l}{\alpha_s l \sin \alpha_s l} \frac{1}{(2s+1)^4}.$$

Табл 1. Фізичні характеристики матеріалу стержнів

МАТЕРІАЛ	$\rho_t$ , кг/м <sup>3</sup>	$E_t$ , Па	$\nu$
Сталь	$7.8 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^{11}$	0.3
Біотканина	$1.1 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^5$	0.4999999

Табл 2. Фізичні характеристики акустичного середовища

СЕРЕДОВИЩЕ	$\rho_g$ , кг/м <sup>3</sup>	$c_g$ , м/с
Повітря	1.29	330
Вода	$10^3$	21500

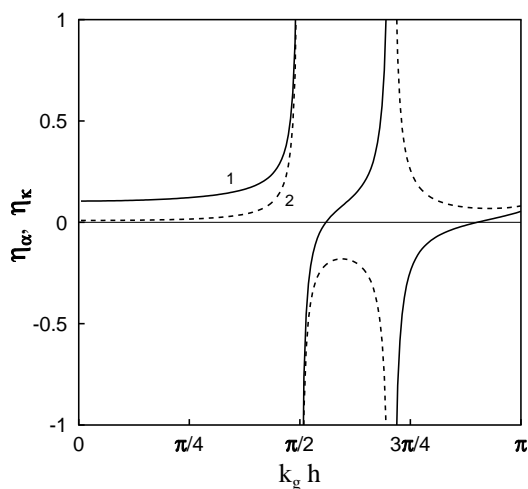


Рис. 2. Залежності коефіцієнтів  $\eta_\alpha$ ,  $\eta_\kappa$  від хвильового розміру камери:  
1 –  $\eta_\alpha$ ; 2 –  $\eta_\kappa$

### 3. ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Розглянемо чисельні результати, одержані для структур з різними комбінаціями фізичних характеристик пружного матеріалу стержнів і акустичного заповнення, див. табл. 1, 2 (вихідні дані взято з джерел [12, 20]). Окрім того, вважалося  $l = 2h$  (квадратні камери),  $b = 2d$ ,  $\gamma = b\rho_t$  (густин матеріалів стержнів і перегородок однакові). З практичних міркувань розрахунки обмежувались діапазоном  $k_t l \leq \pi/2$ , в якому для пружних стінок коректно використовувати стержньову модель.

Дисперсійне рівняння (13) має дійсні коефіцієнти. До того ж, дійсними є величини  $\eta_\alpha$  і  $\eta_\kappa$ . Їхні залежності від акустичного хвильового розміру камери  $k_g h$  зображені на рис. 2. Оскільки при  $k_g h \leq \pi/2$  всі  $\alpha_s$  – уявні, то в цьому діапазоні  $\eta_\alpha$ ,  $\eta_\kappa$  – позитивні, причому для  $k_g h \leq \pi/10$  можна вважати, що вони є константами:  $\eta_\alpha \approx 0.105$  з точністю до 3.2 %, а  $\eta_\kappa \approx 0.00906$  з точністю до 14.4 %. Тому можна стверджувати, що при  $k_g h, k_t l \rightarrow 0$  виконується умова  $|q| < 1$  і шукана стала поширення – дійсна. При зростанні акустичного хвильового розміру  $k_g h$  поведінка коефіцієнтів  $\eta_\alpha$ ,  $\eta_\kappa$  суттєво змінюється, визначаючи більш складний характер процесів у системі, насамперед, в околах значень  $k_g h = \pi(2s + 1)/2$ .

Скориставшись узагальненими виразами для обернених тригонометричних функцій комплексного аргумента [21, с. 46], запишемо (поки що, формально):

$$\kappa = \frac{\omega}{c} - i\delta = \text{Arccos } q = \begin{cases} -i \ln q, & q > 1, \\ \arccos q, & |q| \leq 1, \\ \pm\pi - i \ln q, & q < -1. \end{cases} \quad (14)$$

Як уже зазначалося, хвилевідні властивості системи суттєво залежать від наявності акустичного заповнення камер. Тому аналіз кількісних даних доцільно розпочати з випадку відносно жорсткого матеріалу стінок ( $c_t \gg c_g$ ), що дозволяє дослідити широкий діапазон значень  $k_g h$ . Зручною для цього є комбінація вода – сталь, тим більше, що вода має достатньо високу густину і її динамічний вплив на періодичну структуру має бути відчутним.

На рис. 3 зображено графіки  $\epsilon$  і  $\delta$  для результуючої хвилі в періодичній структурі зі сталевими стінками. Крива 1 відповідає відношенню  $c/c_t$  без акустичного заповнення. Зрозуміло, що при  $k_t l \leq \pi/2$  це – практично константа, дещо менша від  $c_t$  за рахунок впливу інерційності поперечних перегородок. Структура, заповнена водою, демон-

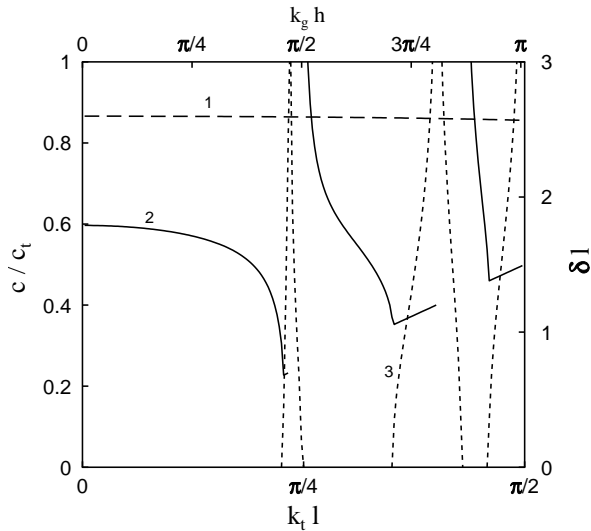


Рис. 3. Фазова швидкість  $c$  і коефіцієнт згасання  $\delta$  для стержнів зі сталі ( $c_t \approx 6052$  м/с):

- 1 –  $c/c_t$ , порожні камери;  
 2 –  $c/c_t$ , камери заповнені водою;  
 3 –  $\delta l$ , камери заповнені водою

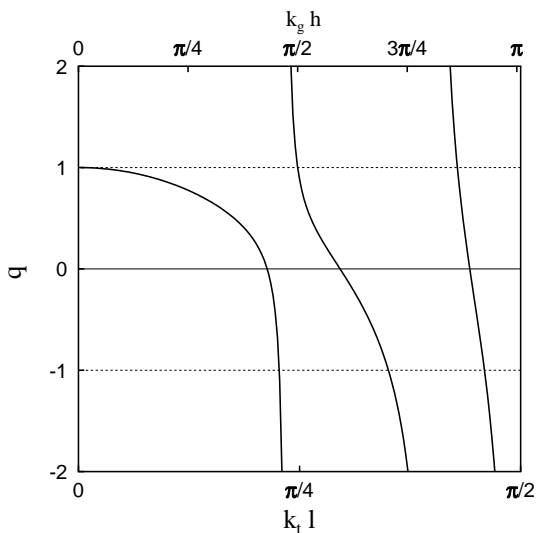


Рис. 4. Величина параметра  $q$  в дисперсійному рівнянні (13) для комбінації матеріалів вода – сталь

струє набагато складнішу поведінку (криві 2, 3 для дійсної й уявної частин  $\kappa$  відповідно).

Як і очікувалось, при  $k_t l \rightarrow 0$  величина  $c$  за рахунок приєднаної маси акустичного заповнення виявляється відчутно нижчою, ніж для порожніх камер. Зі зростанням хвильового розміру структури спостерігається зниження фазової швидкості, а згодом і докорінна зміна характеру коренів дисперсійного рівняння (13). Щоб краще зрозумі-

ти це, звернімося до залежності параметра  $q$  для даної акустопружної структури. Ця величина в достатньо широкому діапазоні значень  $k_g h$  може приймати значення від  $-\infty$  до  $+\infty$ . Тому умова  $|q| \leq 1$ , за якої зі співвідношення (14) можна відшукати дійсне значення фазової швидкості  $c$ , виконується практично лише для малих хвильових чисел (низьких частот). Надалі смуги з  $|q| \leq 1, q < -1, q > 1$  чергуються і при зростанні  $k_g h$  ( $k_t l$ ) стають все вузьчими. Зрозуміло, що при врахуванні механічних втрат в елементах структури параметр  $q$  стане комплексною величиною, обмеженою за модулем. Втім, ці зміни будуть відчутними лише при наближенні до точок розривів.

Появу ненульової уявної частини хвильового числа  $\kappa$  слід трактувати як належність відповідних частот до діапазону відсікання, де гармонічна хвиля в системі не поширюється. Звертає на себе увагу те, що при  $q < -1$   $\kappa$  має одночасно і дійсну, й уявну частини. На перший погляд, це могло б свідчити про існування хвилі, яка поширюється, але з експоненціальним згасанням амплітуди, що неможливо для системи без внутрішніх втрат енергії. Така удавана суперечність знімається за рахунок існування парних комплексних коренів, які містять члени  $\pm\pi$ . Справа в тому, що при дослідженні крайових задач з наявністю джерела збудження коливань відповідні пари розв'язків завжди формують модульовану експонентою стоячу хвилю, яка не переносить енергії. Ця особливість обумовлена самою природою пружних систем, на поверхнях яких мають виконуватись одночасно дві умови – і для нормальних, і для дотичних компонент напружень [22]. Вона зберігається при застосуванні постановок з виродженою геометрією для планарних коливань тонкостінних елементів (стержнів, пластинок), у яких хвилі, що переносять енергію, формуються за рахунок взаємодії Р- та SV-хвиль з бічними поверхнями. Очевидно, що діапазони з  $q < -1$  існуватимуть і для структур без акустичного заповнення. У цьому випадку їхнє розташування цілком залежатиме від того, наскільки масивними є перегородки.

Оцінимо фазову швидкість поширення хвиль у розглянутій періодичній структурі при  $k_t l \rightarrow 0$ , де  $|q| \leq 1$ . Скориставшись відомими властивостями тригонометричних функцій малого аргументу, легко пересвідчитися, що довгохвильова асимптотика величини  $c$  при протифазному збудженні стержнів має вигляд

$$c_{\text{ant}}^{\text{lf}} \approx \frac{c_t}{\sqrt{1 + 2(\eta_\alpha - \eta_\kappa) \frac{\rho_g h}{\rho_t d} + \frac{1}{3} \frac{h}{l} \frac{\gamma}{\rho_t d}}}. \quad (15)$$

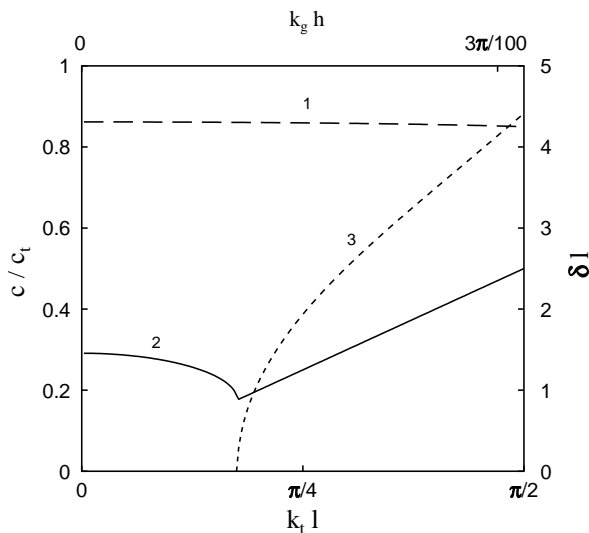


Рис. 5. Фазова швидкість  $c$  і коефіцієнт згасання  $\delta$  для стержнів з біотканини ( $c_t \approx 19$  м/с):

- 1 –  $c/c_t$ , камери заповнені повітрям;
- 2 –  $c/c_t$ , камери заповнені водою;
- 4 –  $\delta l$ , камери заповнені водою

Оскільки тут  $\eta_\alpha > \eta_\kappa$ , робимо висновок, що акустичне середовище в камерах дійсно працює як приєднана маса. Взагалі кажучи, така поведінка характерна для акустопружних об'єктів різної природи й призначення. Наприклад, у гідроакустичних системах перетікання стисливої рідини всередині пружних конструктивних елементів використовують для створення ефективних низькочастотних випромінювачів звуку, які мають малі розміри у порівнянні з довжиною акустичної хвилі [23, 24].

Переходячи до розгляду структур з  $c_g > c_t$  (стінки з біотканини, рис. 3), зауважимо що для них діапазон  $k_t l \leq \pi/2$  буде біднішим на прояви особливостей. Фактично, тут спостерігається більш розтягнутий вздовж осі абсцис низькочастотний фрагмент графіка для комбінації матеріалів вода – сталь. Як і слід було очікувати з формули (15), при заповненні камер повітрям, за рахунок малої його густини результуюча фазова швидкість  $c$  виявляється практично такою ж, як і в структурі без заповнення (крива 1). Водночас, наявність масивного акустичного середовища (наприклад, води) обумовлює не тільки зниження величини  $c$ , але й існування першого діапазону відсікання вже при відносно малій хвильовій довжині періоду структури –  $k_t l < \pi/4$  (криві 2, 3).

Зауважимо, що дослідження комбінації матеріалів вода – біотканина може бути цікавим при акустичному моделюванні заповнених рідинами паренхіматозних органів (наприклад, паренхіми пе-

чінки). Окрім того, можна вказати на певну подібність розглянутої періодичної структури до анатомічної будови великих артерій [25].

#### 4. БІОМЕХАНІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

Повертаючись до задекларованої мети дослідження – моделювання акустичних властивостей легеневої паренхіми, – повністю зосередимось на розгляді довгохвильового діапазону для структури зі стінками, утвореними з біотканин. Будемо вважати низькими частоти, які відповідають умові  $k_t l < \pi/4$ . Виберемо значення  $l = 3 \cdot 10^{-4}$  м,  $b = 5 \cdot 10^{-6}$  м, які приблизно відповідають морфометрії альвеол людини на максимумі вдиху [10]. Тоді максимальна частота, при якій можна застосовувати асимптотику (15), становить близько 8 кГц. При цьому одержуємо фазову швидкість для комбінації повітря – біотканина  $c_{\text{ant}}^{\text{lf}} \approx 16.4$  м/с, що практично співпадає з верхньою межею експериментальних оцінок для сильно роздутих легень [6]. Водночас, роботи [7, 8] дають значно нижчі значення швидкості  $c$ . Така розбіжність може бути пов'язана як з неточністю задання механічних характеристик біотканини в табл. 1, так і з різницею в умовах проведення експериментів (у трьох згаданих дослідженнях використовувались препаровані легені різних видів тварин).

Для того, щоб порівняти одержану величину  $c_{\text{ant}}^{\text{lf}}$  зі швидкістю хвилі у випадку симетричних коливань стержнів, нагадаємо, що формулу для неї було одержано у статті [17]. Для зручності порівняння з оцінкою (15) запишемо цю асимптотику у вигляді

$$c_{\text{syn}}^{\text{lf}} \approx \sqrt{\frac{c_t^2 + \frac{\rho_g h}{\rho_t d} c_g^2}{1 + \frac{\rho_g h}{\rho_t d} + \frac{h}{l} \frac{\gamma}{\rho_t d}}}. \quad (16)$$

Для системи повітря – біотканина одержуємо  $c_{\text{syn}}^{\text{lf}} \approx 62.3$  м/с, що добре узгоджується з результатами [3–5, 9] для наповнених легень.

Структура виразу (16) дуже нагадує запис для швидкості об'ємної хвилі Райса при урахуванні пружності альвеолярних стінок [3, 12], однак, оскільки в нашій моделі поперечні перегородки вважаються недеформівними, швидкість  $c_{\text{syn}}^{\text{lf}}$  має бути трохи нижчою за істинну швидкість об'ємної хвилі. Втім, дослідження [12] дозволяє сподіватися, що ця розбіжність лежатиме в межах  $\sim 10\%$ .

У цьому контексті видається цікавим обрахувати величину ще однієї хвилі, яка спостерігалась у легенях – поперечної. Згідно з оцінками на основі

теорії Біо для пористих середовищ [16],

$$c_{\text{shear}} \approx \sqrt{\frac{G}{\rho_t}}. \quad (17)$$

Тут  $G$  – модуль зсуву біотканини. Для малостисливих середовищ ( $\nu \rightarrow 0.5$ ) справедливо  $G \approx E/3$ . Для вибраних фізичних параметрів маємо  $c_{\text{shear}} \approx 7.8$  м/с. Це в кілька разів більше, ніж в експериментах [7]. Очевидно, при поширенні хвилі зсуву пружність стінок альвеол також задіяна лише частково. Виходячи з цього, можна сподіватися, що більш адекватну оцінку  $c_{\text{shear}}$  забезпечив би вираз, одержаний на основі використання моделі періодичної структури (при належному заданні кінематики системи). Ще одною ймовірною причиною розбіжності є розімкнутість стінок реальних альвеол, що повинно призвести до зниження величини  $G$ .

## ВИСНОВКИ

За допомогою методу Флоке знайдено параметри хвилі, яка може поширюватись в акустопружній системі двох періодично підкріплених жорсткими поперечними перегородками паралельних пружних стержнів. При цьому вважалося, що обмежені стержнями й сусідніми перегородками об'єми заповнені акустичним середовищем, стержні коливаються у протифазі.

Показано, що для такої моди коливань об'єми заповнених газом камер не змінюються і внутрішнє акустичне середовище виступає в ролі приєднаної маси. Як наслідок, у цьому випадку ефективна пружність системи і відповідна швидкість поширення хвилі виявилися значно нижчою, ніж при синфазних (симетричних) коливаннях стержнів, які супроводжуються об'ємними деформаціями газонаповнених камер [17]. Таким чином, у двох розглянутих випадках періодична структура може підтримувати поширення двох незалежних гармонічних хвиль. Поведінка моделі вказує на принципову можливість формування у певних типах пористих середовищ хвиль з різними фазовими швидкостями, в залежності від типу збудження коливань.

Цей механізм дає ймовірне тлумачення експериментальних результатів з визначення швидкості звуку в паренхімі легень. Ймовірно, що при прозвучуванні паренхіми або її механічному збудженні через зовнішні тканини грудної клітки площа поверхні легені, на яку падає сигнал-збудник, виявляється достатньою для того, щоб ініціювати “симетричну” хвилю Райса з інтенсивним об'

ємним деформуванням альвеолярного газу. Натомість, при безпосередньому локальному ударному навантаженні бічної поверхні плеври у паренхімі переважають “антисиметричні” еквіволюмінальні коливання альвеол, при яких задіяна лише пружність їхніх стінок. Тому відповідна фазова швидкість завжди буде нижчою, ніж для хвилі Райса.

1. Pasterkamp H., Kraman S. S., Wodicka G. R. Respiratory sounds. Advances beyond the stethoscope // J. Respir. Crit. Care Med.– 1997.– **156**.– P. 974–987.
2. Вовк И. В., Дахнов С. Л., Крижановский В. В., Олійник В. Н. Возможности и перспективы диагностики легочных патологий с помощью компьютерной регистрации и обработки шумов дыхания // Акуст. вісн.– 1998.– **1**, N 2.– С. 21–33.
3. Rice D. A. Sound speed in pulmonary parenchyma // J. Appl. Physiol.– 1983.– **54**, N 1.– P. 304–308.
4. Kraman S. S. Speed of low-frequency sound through lungs of normal men // J. Appl. Physiol.– 1983.– **55**, N 6.– P. 1862–1867.
5. Yen R.T., Fung Y. C., Ho H. H., Butterman G. Speed of stress wave propagation in lung // J. Appl. Physiol.– 1986.– **61**, N 2.– P. 701–705.
6. Butler J. P., Lehr J.L., Drazen J. M. Longitudinal elastic wave propagation in pulmonary parenchyma // J. Appl. Physiol.– 1987.– **62**, N 4.– P. 1349–1355.
7. Jahed M., Lai-Fook S. J., Bhagat P. K., Kraman S. S. Propagation of stress waves in inflated sheep lungs // J. Appl. Physiol.– 1989.– **66**, N 6.– P. 2675–2680.
8. Jahed M., Lai-Fook S. J. Stress wave velocity measured in intact pig lungs with cross-spectral analysis // J. Appl. Physiol.– 1994.– **76**, N 2.– P. 565–571.
9. Paciej R., Vyshedskiy A., Shane J., Murphy R. Transpulmonary speed of sound input into the supraclavicular space // J. Appl. Physiol.– 2003.– **94**, N 2.– P. 604–611.
10. Вейбель Э. Р. Морфометрия легких человека.– М.: Медицина, 1970.– 175 с.
11. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред.– М.: Наука, 1978.– 336 с.
12. Олійник В. Н. Вплив властивостей стінок альвеол на величину швидкості звуку в легеневій паренхімі // Акуст. вісн.– 2003.– **6**, N 4.– P. 46–53.
13. Дьяченко А. И., Любимов Г. А. Распространение звука в легочной паренхиме // Изв. АН СССР. МЖГ.– 1988.– N 5.– С. 3–14.
14. Biot M. A. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media // J. Acoust. Soc. Amer.– 1962.– **34**, N 9, Pt. 1.– P. 1254–1264.
15. Городецкая Н. С., Соболев Т. В. Особенности поверхностных волн на свободной границе пористоупругого полупространства // Акуст. вісн.– 2008.– **11**, N 1.– С. 3–11.



16. Олійник В. Н. Особливості поширення хвиль у легеневої тканині // Акуст. вісн.– 2007.– **10**, N 2.– Р. 64–78.
17. Олійник В. Н. Поширення хвиль у системі двох паралельних стержнів, періодично підкріплених жорсткими поперечними перегородками і зв'язаних з акустичним середовищем // Акуст. вісн.– 2008.– **11**, N 1.– С. 60–67.
18. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.– М.: Наука, 1973.– 344 с.
19. Heckl M. A. Investigations on the vibrations of grillages and other simple beam structures // J. Acoust. Soc. Amer.– 1964.– **36**, N 7.– Р. 1335–1343.
20. Чайлдс У. Физические постоянные.– М.: Физматгиз, 1962.– 80 с.
21. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами.– М.: Наука, 1979.– С. 832.
22. Микер Т., Мейтцлер А. Волновое распространение в протяженных цилиндрах и пластинках // Физическая акустика / Под ред У. Мэзона. Том 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А.– М.: Мир, 1966.– С. 138–203.
23. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках.– К.: Наук. думка, 1986.– 240 с.
24. Vovk I. V., Olynyk V. N. Sound radiation by cylindrical piezoelectric shell with asymmetric insertion // J. Acoust. Soc. Amer.– 1996.– **99**, N 1.– Р. 133–138.
25. Свиридов О. І. Анатомія людини.– К.: Вища школа, 2001.– 399 с.