УДК 532.517.4

Авраменко А.А.[1], Басок Б.И.[1], Тыринов А.И.[1], Кузнецов А.В.[2]

[1]*Институт технической теплофизики НАН Украины*
[2]*Университет штата Северная Каролина, США*

ЭФФЕКТ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

На основі апроксимації Паде розглянуто різні діапазони енергетичного спектра турбулентності. Показано, що границя області існування негативної турбулентної в'язкості збігається з границею області існування "закону зворотного куба" енергетичного спектра.

На основе аппроксимации Паде рассмотрены различные диапазоны энергетического спектра турбулентности. Показано, что граница области существования отрицательной турбулентной вязкости совпадает с границей области существования "закона обратного куба" энергетического спектра.

On the basis of Pade approximation the different regions of energy specter of turbulence are considered. It is shown that the region boundary of existence of negative turbulent viscosity coincides with region boundary of existence of "the law of an inverse cube" of energy specter.

d – размерность пространства;
C_K – константа Колмогорова;
C^* – константа;
E – спектр кинетической энергии турбулентности;
K – кинетическая энергия турбулентности;
k – волновое число;
ε – скорость диссипации;
ν – кинематический коэффициент молекулярной вязкости;
ν_t – кинематический коэффициент турбулентной вязкости;
η – скорость подвода энергии к турбулентным пульсациям.

Индексы:
d – размерность пространства;
rev – граница диапазона обратного механизма передачи энергии;
t – турбулентный.

Введение

В работах [1–3], исходя из соображений размерности, было сделано предположение, что в случае двухмерной турбулентности после колмогоровского диапазона спектра кинетической энергии турбулентности, где выполняется соотношение

$$E = C_K k^{-5/3} \varepsilon^{2/3} , \qquad (1)$$

в пространстве волновых чисел (со стороны мелких масштабов) следует интервал "плавучести", в котором справедлива зависимость

$$E = C^* k^{-3} \eta^{2/3} . \qquad (2)$$

Экспериментально такой "закон обратного куба" был найден в измерениях И. Огуры [4].

Покажем, каким образом можно прийти к закону (2) через известные теоретические зависимости для энергетического спектра турбулентности и каким образом эта часть спектра связана с проявлением эффекта отрицательной турбулентной вязкости.

Различные области энергетического спектра турбулентности

Пао [5] предположил, что функция переноса энергии турбулентности в инерционном диапазоне не должна зависеть от величины волновых чисел. На этой основе найдено выражение для энергетического спектра

$$E = C_K k^{-5/3} \varepsilon^{2/3} \exp\left(-\frac{3}{2} C_K \nu k^{4/3} \varepsilon^{-1/3} \right) , \qquad (3)$$

используя (1) и дифференциальное уравнение энергетического баланса. Приведенное выражение показывает, что при малых k выполняется закон Колмогорова (1), а при больших – происходит затухание спектра по экспоненциальной зависимости.

Используя аппроксимацию Паде по параметру ν, перепишем (3) в следующем виде:

$$E \approx \frac{C_K k^{-5/3}\varepsilon^{2/3}}{1+\frac{3}{2}C_K \nu k^{4/3}\varepsilon^{-1/3}+\frac{9}{8}C_K^2\nu^2 k^{8/3}\varepsilon^{-2/3}+\frac{9}{16}C_K^3\nu^3 k^4\varepsilon^{-1}+\frac{27}{128}C_K^4\nu^4 k^{16/3}\varepsilon^{-4/3}+\ldots}\ . \qquad (4)$$

Анализируя (4), можно заключить, что в пространстве волновых чисел существуют различные участки спектра турбулентной энергии, подчиняющиеся различным закономерностям. При малых k все слагаемые, начиная со второго, в знаменателе (4) меньше единицы и, как уже отмечалось выше, выполняется закон Колмогорова (1). При более высоких значениях волновых чисел, очевидно, превалирующую роль начинает играть второй член в знаменателе (4). В этом случае имеем

$$E \approx \frac{4\varepsilon}{3\nu k^3}\ . \qquad (5)$$

Таким образом, мы приходим к "закону обратного куба". Условие, при котором начинает выполняться "закон обратного куба", имеет следующий вид

$$k_{rev} = k \geq \left(\frac{2}{3C_K}\frac{\sqrt[3]{\varepsilon}}{\nu}\right)^{3/4}\ . \qquad (6)$$

Условие (6) получено из сравнения величин первого и второго слагаемых знаменателя (4).

В работе [6] на основе ренормгруппового (RNG) подхода показано, что для трехмерной турбулентности $C_K = 5/3$, а для двухмерной – $C_K = 10^{2/3}/3$. Следовательно, из (6) следует, что для трехмерной турбулентности диапазон действия "закон обратного куба" определяется условием

$$k \geq 0{,}503\sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{\nu^3}}\ ,$$

а для двухмерной –

$$k \geq 0{,}532\sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{\nu^3}}\ .$$

Если сравнить выражение (5) с распределением (2), то можно заметить, что скорость передачи энстрофии равна

$$\eta = \left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)^{3/2}\ ,$$

а $C^* = 4/3$. В соответствии с численными экспериментами $C^* = 1{,}5$ [4].

По мере продвижения в сторону ультрафиолетового предела в пространстве волновых чисел роль слагаемых в знаменателе (4) изменяется. При условии (это следует из оценки пятого слагаемого в знаменателе (4))

$$k \geq 4\sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{3C_K}\frac{\sqrt[3]{\varepsilon}}{\nu}\right)^{3/4}$$

из (4) вытекает, что

$$E \approx \frac{128\varepsilon^2}{27C_K^3\nu^4 k^7}\ .$$

Это согласуется с полуэмпирической теорией Гейзенберга [7], согласно которой поведение спектра подчиняется зависимости $E \sim k^{-7}$. Сравнивая последнее выражение с полуэмпирическими соотношениями Бэсса и Чандрасекара [8], можно получить значения эмпирической константы для аппроксимации функции переноса, которая вводится в первых теориях энергетического спектра турбулентности. Это значение равно

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{512}{27C_K^3}}\ .$$

Отрицательная турбулентная вязкость

В работе [6] на основе RNG - подхода было получено выражение для турбулентной вязкости

$$\nu_t \frac{d\nu_t}{dk} = -\frac{E}{b_d k^2} \ , \qquad (7)$$

где $b_2 = 4$ для двухмерной турбулентности и $b_3 = 5$ – трехмерной. Уравнение (7) при спектре турбулентной энергии (3) допускает для турбулентной вязкости как положительные, так и отрицательные значения. Известно, что проявление эффекта отрицательной турбулентной вязкости трактуется как реверс каскадного переноса энергии турбулентности [9], т.е. при отрицательной турбулентной вязкости энергия передается от беспорядочного пульсационного движения к упорядоченному осредненному.

Приближенное решение уравнения (7) с учетом (3) имеет вид

$$\nu_t = \sqrt{\frac{3C_K}{4b_d}} \varepsilon^{1/3} k^{-4/3} - \sqrt{\frac{27C_K^3}{16b_d}} \nu \ . \qquad (8)$$

Отсюда видно, что турбулентная вязкость принимает отрицательные значения при условии $k > k_{rev}$, где k_{rev} определяется по формуле (6). Следовательно, диапазон существования отрицательной турбулентной вязкости начинается на границе “закона обратного куба”.

Заключение

Исследования показали, что существует два диапазона в волновом пространстве: прямого и обратного переноса энергии турбулентности. Границей существования этих диапазонов является точка $k = k_{rev}$. При $k > k_{rev}$ превалирует обратный механизм, и энергия передается от меньших вихрей к большим. Хотя при этом не исключается возможность одновременной реализации в этом диапазоне прямого каскада, который сопровождается диссипацией энергии. Однако он явно не проявляется на фоне обратного каскада. При $k < k_{rev}$ реализуется лишь прямой перенос энергии. Следовательно, энергия, которая передается от меньших масштабов к большим, доходит до области $k = k_{rev}$ и затем, минуя зону $k \in [0, k_{rev}]$, передается к основному течению. Таким образом, перенос энергии носит нелокальный [10], гистерезисный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kraichnan R.H.* Inertial ranges in two-dimensional turbulence // Phys. Fluids. – 1967. – 10 № 7. – P. 1417 – 1423.

2. *Leith C.E.* Diffusion approximation for two-dimensional turbulence // Phys. Fluids. – 1968. – 11. – P. 671 – 673.

3. *Batchelor G.K.* Computation spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence // Phys. Fluids. – 1969. – 12. – P. 233 – 239.

4. *Монин А.С.* Теоретические основы геофизической гидродинамики. – Л.: Гидрометеоиздат, 1988. – 424 с.

5. *Pao Yin-Ho.* Structure of turbulent velocity and scalar fields at large wave-numbers // Phys. fluids. – 1965. – 8, № 6. – P. 1063–1075.

6. *Canuto V.M., Dudovikov M.S.* A new approach to turbulence // J. Modern physics. – 1997. – 12, № 18. – P. 3121-3152.

7. *Heisenberg W.* Zur statistischen theorie turbulenz // Zs. Phys. – 1948. – 124, № 7–12. – S.628-657.

8. *Хинце И.О.* Турбулентность. – М.:Физматгиз,1963. – 680с.

9. *Старр В.* Физика явлений с отрицательной вязкостью. – М.:Мир,1971. – 260 с.

10. *Kraichnan R.H.* Statistical dynamics of 2D flow // J. Fluid Mech. – 1975. – 67. Part 1. – P. 155 – 175.

Получено 06.11.2005 г.