

УДК 621.391

**А. В. Ласточкин**

Киевский государственный университет им. Т.Г. Шевченко

e-mail: andrey\_v@mail.univ.kiev.ua

## **Новое время-частотное распределение на основе оконного преобразования Фурье**

*Предложен новый метод время-частотного анализа. Показано, что новое преобразование имеет ряд общих свойств с непрерывным вейвлет-преобразованием. Произведено сравнение методов между собой.*

**Ключевые слова:** оконное преобразование Фурье, вейвлет-преобразование, время-частотное распределение.

### **Введение**

В настоящее время продолжается интенсивное развитие методов спектрального оценивания, которое позволяет охарактеризовать частотные особенности сигналов, наблюдаемых на конечном промежутке времени (или пространства). В том случае, когда сигнал нестационарный, т.е. его частотные характеристики изменяются с течением времени, для его анализа уже не хватает обычного спектра той же размерности, что и размерность сигнала. Другими словами, для одномерного нестационарного сигнала его одномерный спектр не сможет передать информацию о том, какие его частотные особенности как изменяются с течением времени [1]. Для того, чтобы преодолеть эти трудности, были предложены, так называемые время-частотные распределения (встречается также термин «время-частотные представления») сигналов. В случае одномерного сигнала его время-частотное распределение будет двумерным: по одной оси откладывается время, по другой — частота. Примерами таких время-частотных распределений являются оконное преобразование Фурье, непрерывное вейвлет-преобразование и другие, описанные в [2, 3]. Настоящая работа посвящена получению нового преобразования посредством предельного перехода от оконного преобразования Фурье. Показано, что новое преобразование имеет ряд общих свойств с непрерывным вейвлет-преобразованием, произведено их сравнение между собой.

### **Предельный переход для оконного Фурье-преобразования**

Прямое преобразование Фурье записывается следующим образом:

© А. В. Ласточкин

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int f(t) \exp(-j\omega t) dt, \quad (1)$$

где  $f(t)$  — исследуемый сигнал. Модуль  $F(\omega)$  является обычным Фурье-спектром сигнала. Оконное преобразование Фурье имеет вид:

$$F(\omega, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int f(t) g(t - \tau) \exp(-j\omega t) dt, \quad (2)$$

где  $g(t - \tau)$  — функция окна.

Выражение (2), взятое по модулю и возведенное в квадрат, называется также спектрограммой сигнала. Спектрограмма позволяет видеть изменение частотных компонент сигнала с течением времени. Одной из особенностей такого представления является зависимость время-частотной локализации от ширины окна, т.е. при узком окне хорошо видны высокочастотные (ВЧ) изменения в сигнале и не видны низкочастотные (НЧ) компоненты. При широком же окне видны часть НЧ-компонент (до некоторого предела, определяемого шириной окна), но в то же время ВЧ-компоненты становятся «расплывчатыми», и их быстрые изменения перестают быть видимыми (рис. 2, 3). Естественно, что лучше видеть и то, и другое одновременно, для чего можно попытаться «собрать» некое время-частотное распределение из нескольких спектрограмм, полученных с различной шириной окна, беря из них те области, в которых ширина окна этой спектрограммы обеспечивает наилучшее представление частотных компонент. Записать это можно следующим образом:

$$F(\omega, \tau) = \begin{cases} \left| \frac{1}{c_1 2\pi} \int f(t) g\left(\frac{t-\tau}{a_1}\right) \exp(-j\omega t) dt \right|, & \omega \in (\omega_{\max}, \omega_1), \\ \left| \frac{1}{c_2 2\pi} \int f(t) g\left(\frac{t-\tau}{a_2}\right) \exp(-j\omega t) dt \right|, & \omega \in (\omega_1, \omega_2), \\ \dots \\ \left| \frac{1}{c_n 2\pi} \int f(t) g\left(\frac{t-\tau}{a_n}\right) \exp(-j\omega t) dt \right|, & \omega \in (\omega_n, 0), \end{cases} \quad (3)$$

где коэффициент  $a_n$  — параметр масштабирования, определяющий ширину окна. Поскольку в окна различной ширины попадают неодинаковые по длине участки сигнала, то и их энергия будет отличаться. Для того, чтобы скомпенсировать этот эффект, вводится коэффициент  $c_n$ , который приводит к тому, что на итоговом изображении различные области не будут отличаться по яркости.

Таким образом, получается, что представление (3) составлено как бы из «ряда частотных полос», взятых из соответствующих спектрограмм. Естественно предположить, что существует такое представление сигнала, где ширина этих полос стремится к нулю или, другими словами, для представления каждой конкретной частоты берется окно соответствующей длины. Такое представление можно полу-

чить из формулы (3) предельным переходом. При этом параметр масштабирования определяется как

$$a = \frac{2\pi}{\omega} \quad (4)$$

Таким образом, если рассмотреть тестовый синусоидальный сигнал произвольной частоты и построить для него окно с параметром масштабирования (4), то в этом окне всегда будет помещаться одно и то же количество периодов, вне зависимости от частоты.

Коэффициент  $c_n$  можно выразить из параметра масштабирования следующим образом. Рассмотрим стационарный сигнал длины  $L$ , его спектр Фурье будет иметь энергию  $P$  (ее можно найти, взяв выражение (1) по модулю, возведя в квадрат и проинтегрировав по  $\omega$ ). Найдем теперь некую «элементарную составляющую» энергии на частоте  $\omega_1$ :

$$dP = \left[ \int_0^L f(t) \exp(-j\omega_1 t) dt \right]^2 = [A + jB]^2 = A^2 + B^2. \quad (5)$$

Если теперь увеличить длину этого стационарного сигнала в 2 раза, «собрать» его из двух одинаковых сигналов длины  $L$ , то

$$\begin{aligned} dP &= \left[ \int_0^L f(t) \exp(-j\omega_1 t) dt + \int_0^L f(t) \exp(-j\omega_1 t) dt \right]^2 = \\ &= [(A + jB) + (A + jB)]^2 = (2A)^2 + (2B)^2 = 4(A^2 + B^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Понятно, что если длину сигнала увеличить в 3 раза, то выражение (6) будет равно  $3^2(A^2 + B^2)$ , а если в  $n$  раз, то соответственно  $n^2(A^2 + B^2)$ . Таким образом, коэффициент  $c_n$  выражается как  $a$  и частота, на которой происходит определение энергии сигнала, обратно пропорциональна  $\omega$ . Формулу такого время-частотного распределения можно записать следующим образом (для того, чтобы отличать получающееся время-частотное распределение от оконного преобразования Фурье обозначим его « $Lf_{mp}$ »):

$$Lf_{mp}(a, \tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a} \left| \int f(t) g\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \exp(-j\frac{2\pi}{a}t) dt \right|. \quad (7)$$

Подынтегральное выражение в формуле (7) можно воспринимать двояко: во-первых, как произведение «кусочка сигнала»  $f$ , вырезанного с помощью окна  $g$  на комплексную экспоненту, а, во-вторых, как произведение сигнала  $f$  на «кусочек комплексной экспоненты», вырезанный с помощью окна  $g$ . Необходимо отметить,

что во втором случае при изменении  $\tau$  изменяется фаза комплексной экспоненты относительно окна  $g$  (это обозначает подстрочный индекс  $mp$  (moving phase)). Для того, чтобы «зафиксировать» фазу комплексной экспоненты в окне (это ведет к ряду преимуществ, описанных далее), введем дополнительный множитель в выражение (7) и получим:

$$\begin{aligned} Lf(a, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a} \left| \exp(j \frac{2\pi}{a} \tau) \int f(t) g(\frac{t-\tau}{a}) \exp(-j \frac{2\pi}{a} t) dt \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a} \left| \int f(t) g(\frac{t-\tau}{a}) \exp(-j 2\pi \frac{t-\tau}{a}) dt \right|. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее в работе выражение, описываемое формулой (8), будет называться Lf-распределением.

### Сравнение оконного преобразования Фурье и Lf-распределения

Основными параметрами Lf-распределения являются: количество периодов анализируемой частоты, которые попадают в окно (не обязательно целое количество) —  $k$ ,  $a$  — аналог периода, (то же самое, что и в случае непрерывного вейвлет-преобразования), определяет частоту, на которой производится анализ ( $a \geq 1$ ). Необходимо отметить, что на практике не удобно работать с распределениями, у которых частота или период меняются линейно (имеются в виду случаи, когда сигнал имеет много компонент, изменяющихся во времени и сильно отличающихся по частоте), вместо этого в данной работе будет использоваться следующий масштаб по частоте:

$$\omega = \frac{\pi}{e^{n-1}}, \quad n \in [1, \infty) \quad (9)$$

при условии того, что  $n$  изменяется линейно.

Тестовый сигнал (по длине составляет 400 отсчетов) показан на рис. 1.

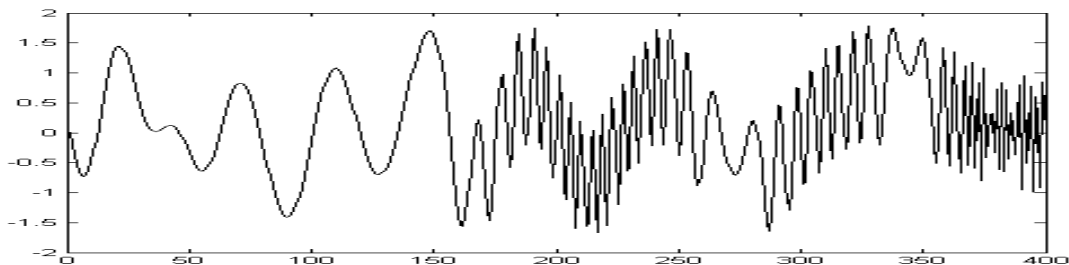


Рис. 1. Тестовый сигнал

Оконное преобразование Фурье тестового сигнала производится с шириной окна 15 отсчетов и 150 отсчетов, и прямоугольным окном. Получившиеся распре-

деления показаны на рис. 2, 3 (по вертикальной оси отложен параметр  $n$ , а частоту можно вычислить согласно формуле (9)).

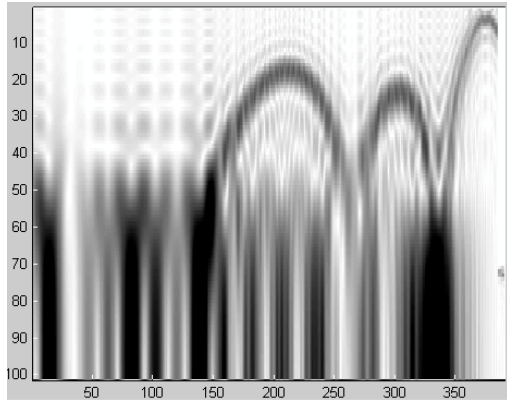


Рис. 2. Оконное Фурье-преобразование с длиной окна — 15 отсчетов

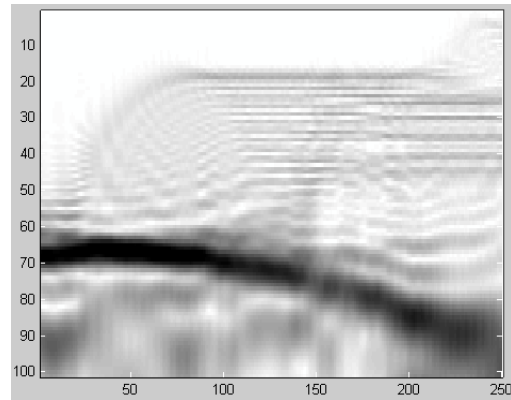


Рис. 3. Оконное Фурье-преобразование с длиной окна — 150 отсчетов

Одно из свойств оконного преобразования Фурье состоит в том, что при малой ширине окна хорошо «видны» высокочастотные компоненты, в то время как при большой ширине — низкочастотные компоненты, поэтому для исследования одного сигнала приходится многократно вычислять оконное преобразование Фурье. Lf-распределение тестового сигнала с прямоугольным окном показано на рис. 4, с гауссовым окном — на рис. 5.

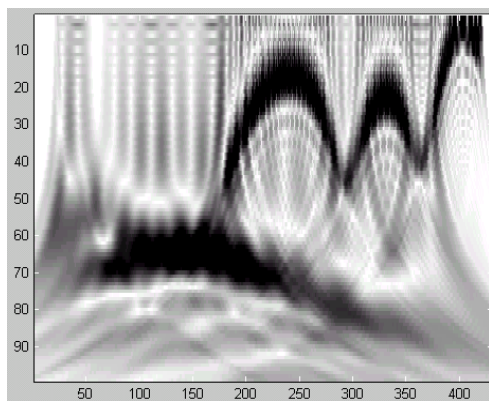


Рис. 4. Lf-распределение тестового сигнала,  $k_{po} = 2$  (2 периода в окне), прямоугольное окно, частотная полоса — та же, что и в примерах на рис. 2, 3

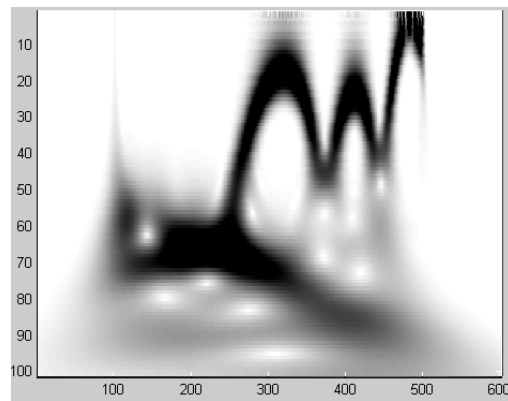


Рис. 5. Lf-распределение тестового сигнала,  $k_{po} = 5$  (5 периодов в окне), гауссово окно, частотная полоса — та же, что и в примерах на рис. 2, 3

Из рисунков видно, что Lf-распределение позволяет получить более адекватную информацию о поведении сигнала в широком диапазоне частот, в то время как оконное преобразование Фурье позволяет получать в ряде случаев более узкие

спектральные линии. Это объясняется тем, что при повышении частоты окно в Lf-распределении уменьшается, в то время как в оконном преобразовании Фурье оно остается постоянным.

### Сравнение Lf-распределения и непрерывного вейвлет-преобразования

Формула непрерывного вейвлет-преобразования записывается следующим образом:

$$W_{\psi}(a, b) = |a|^{-1/2} \int f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (10)$$

Если в формуле (8) функцию окна и комплексную экспоненту обозначить одной буквой, то формально это будет то же, что записано в виде (10). Действительно, налагая ограничения на функцию окна, можно добиться того, чтобы ее произведение с комплексной экспонентой удовлетворяло свойствам вейвлета. В то же время есть много случаев, когда это произведение свойствам вейвлета не удовлетворяет, но на практике оказывается очень полезным. Таким образом, есть некоторые частные случаи Lf-распределения, которые являются частными случаями непрерывного вейвлет-преобразования. Теперь распишем экспоненту из формулы (8) следующим образом:

$$Lf(a, \tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a} \times \left| \int f(t) g\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \cos\left(2\pi \frac{t-\tau}{a}\right) dt - j \int f(t) g\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \sin\left(2\pi \frac{t-\tau}{a}\right) dt \right| \quad (11)$$

и рассмотрим только ее реальную часть ( $Lf^{\text{Re}}$ ):

$$\begin{aligned} Lf^{\text{Re}}(a, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a} \int f(t) g\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \cos\left(2\pi \frac{t-\tau}{a}\right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a} \int f(t) \gamma\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Ниже на рис. 6 показано как выглядит функция  $\gamma$  при различных значениях  $\text{кро}$  и гауссовом, а также прямоугольном окне.

Следует отметить, что функция  $\gamma$  в случае гауссова окна при значении  $\text{кро} = 2$  практически повторяет форму вейвлет-функции под названием «mexh», а в случае  $\text{кро} = 7$  повторяет форму вейвлет-функции «morlet» (рис. 6, б,г). В то же время функция  $\gamma$  при значении  $\text{кро} = 2$  и прямоугольном окне имеет вид, показанный на рис. 6,в.  $Lf^{\text{Re}}$ -распределение тестового сигнала согласно формулы (12), взятое по модулю, показано на рис. 7.

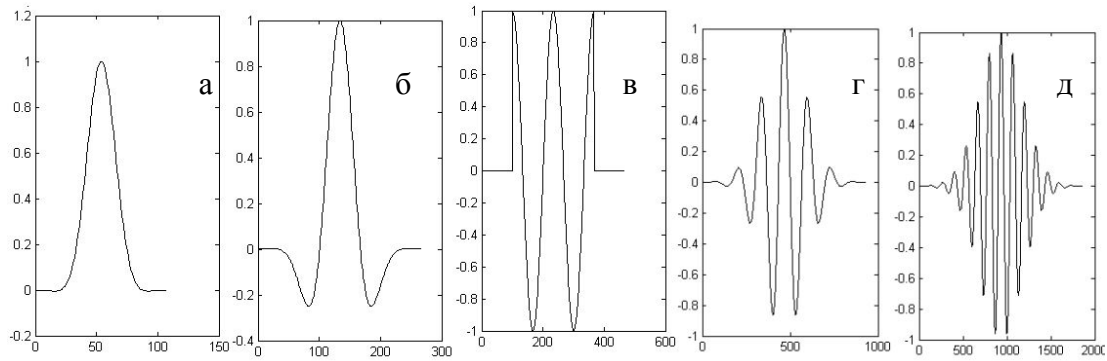


Рис. 6. Примеры функции  $\gamma$  при различных значениях  $k_{po}$  и функциях окна:  
 а —  $k_{po} = 0,8$ ; б —  $k_{po} = 2$ ; в —  $k_{po} = 2$ ; г —  $k_{po} = 7$ ; д —  $k_{po} = 14$   
 (в случае «в» окно — прямоугольное, в остальных случаях — гауссово)

Частота компонент сигнала в случае  $Lf^{Re}$ -распределения определяется через период, который ищется как расстояние между пересечениями нулевого уровня (минимумами в случае модуля  $Lf^{Re}$ -распределения (рис. 7)). Кроме того, хорошо локализуются особенности формы сигналов. Ничего подобного не представляется возможным сделать в случае оконного преобразования Фурье. Реальная часть от него показана на рис. 8. Из-за того, что фаза комплексной экспоненты, помноженной на окно, не фиксирована относительно сигнала, особенности формы сигнала не выделяются, что было показано в [4]. Пример  $Lf^{Re}$ -распределения тестового сигнала с другим параметром  $k_{po}$  показан на рис. 9.

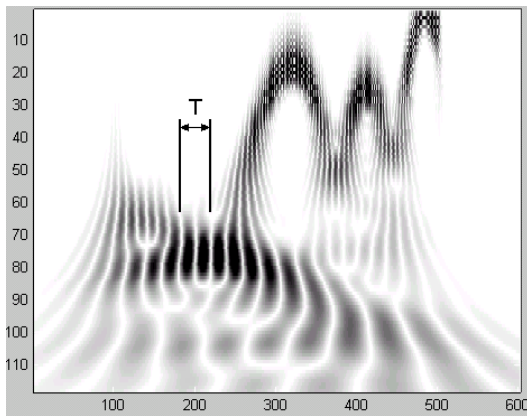


Рис. 7.  $Lf^{Re}$ -распределение тестового сигнала с параметром  $k_{po} = 7$  (оно же — вейвлет-преобразование тестового сигнала с помощью функции «morlet»)

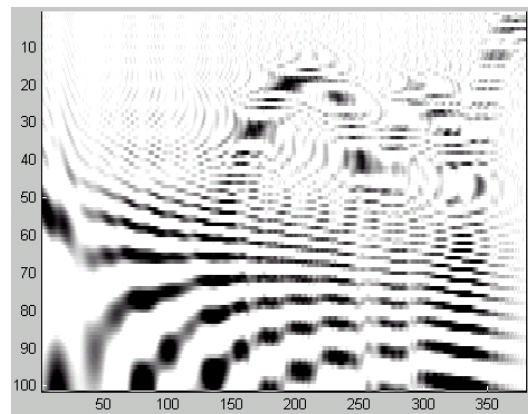


Рис. 8. Реальная часть оконного преобразования Фурье тестового сигнала (размер окна — 15 отсчетов)

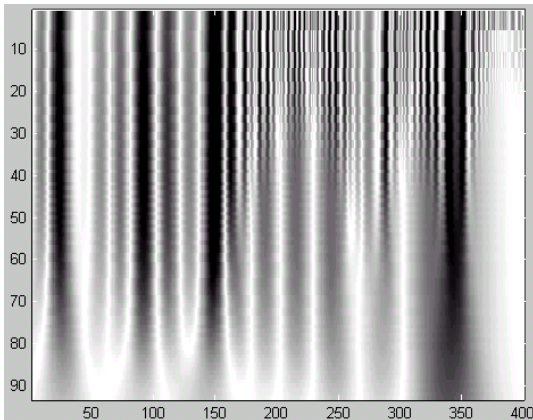


Рис. 9.  $Lf^{re}$ -распределение тестового сигнала с параметром  $\kappa_{po} = 0,8$

помощью формулы (12) практически идентичен непрерывному вейвлет-анализу и хорошо описан в [3].

## Заключение

Предложено новое время-частотное распределение, позволяющее получать информацию о поведении различных, изменяющихся во времени, компонент сигнала в намного более широком частотном диапазоне, чем это позволяет обычное оконное преобразование Фурье. Показано, что при рассмотрении отдельно реальной и мнимой частей предложенного преобразования некоторые вейвлет-функции являются его частным случаем, а также отмечено сходство в анализе сигналов с помощью непрерывного вейвлет-преобразования и предложенного время-частотного распределения.

1. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. — М.: Мир, 1990.
2. Коэн Л. Время-частотные распределения: обзор // ТИИЭР. — 1989. — Т. 77, № 10.
3. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и применения // Успехи физических наук. — 1996. — № 11. — С. 166.
4. Рыбальский О.В. К экспериментальной проверке достоверности положений теории выявления следов цифровой обработки фонограмм // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2004. — Т.6, № 3. — С. 85–98.

Поступила в редакцию 21.02.2005