ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

6 • 2012

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.21,519.718



**І. В. Малик**

# Слабка збіжність сім'ї напівмарковських процесів до дифузійного процесу

*(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)*

*Наведено основні критерії слабкої збіжності сім'ї напівмарковських процесів до "чисто" дифузійного процесу в умовах балансу та до дифузійного процесу Орнштейна–Уленбека за умови, що величина стрибка залежить від параметра серії $\varepsilon$.*

Напівмарковський процес $\eta(t)$ в евклідовому просторі $R^d$, $d \geqslant 1$, породжується процесом марковського відновлення (ПМВ) (див., наприклад, [1–3])

$$(\eta_n, \tau_n), \qquad n \geqslant 0,$$

де $\eta_n \in R^d$ — значення напівмарковського процесу при $t \in [\tau_n, \tau_{n+1})$, $\tau_n \in R_+$ — моменти відновлення. Позначимо через $\theta_n := \tau_n - \tau_{n-1}$, $n > 0$, час перебування в станах.

ПМВ визначається стохастичним ядром, яке задає умовні ймовірності величини стрибків, та функціями розподілу часів перебування в станах:

$$Q^\varepsilon(u, dv, t) := P\{\Delta\eta_{n+1} \in dv, \theta_{n+1} \leqslant t | \eta_n = u\} = \Gamma^\varepsilon(u, dv)F_u(t),$$

$$\Gamma^\varepsilon(u, dv) := P\{\Delta\eta_{n+1} \in dv \mid \eta_n = u\}, \qquad \Delta\eta_{n+1} := \eta_{n+1} - \eta_n, \qquad u \in R^d, \qquad dv \in \mathcal{R}^d,$$

$$F_u(t) := P\{\theta_{n+1} \leqslant t \mid \eta_n = u\} = P(\theta_u \leqslant t), \qquad t \geqslant 0.$$

Розподіл величини стрибка $\Gamma^\varepsilon$ має вигляд

$$\Gamma^\varepsilon(u, dv) = \Gamma_1(u, dv) + \varepsilon\Gamma_2(u, dv). \tag{1}$$

Зауважимо, що має місце співвідношення

$$\eta(t) := \eta_{\nu(t)},$$

де $\nu(t) := \max\limits_{n \geqslant 0}\{n \colon \tau_n < t\}$ — лічильний процес.

Введемо такі позначення:

$$a^{(i)}(u) := \int_{R^d} v\Gamma_i(u, dv), \qquad B^{(i)}(u) := \int_{R^d} v^2\Gamma_i(u, dv), \qquad i = 1, 2,$$

$$b(u) := \frac{1}{f(u)}, \qquad f(u) := E\theta_u = \int_0^\infty \overline{F}_u(t)\, dt, \qquad \overline{F}_u(t) := 1 - F_u(t).$$

Введемо нормовані малим параметром серії $\varepsilon \to 0 (\varepsilon > 0)$ випадкові процеси:

$$\rho^\varepsilon(t) := \varepsilon\eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{2}$$

$$\zeta^\varepsilon(t) := \varepsilon\eta\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right), \tag{3}$$

$$\xi^\varepsilon(t) = \varepsilon\eta\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) - \frac{\rho(t)}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2\eta\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) - \rho(t)}{\varepsilon}. \tag{4}$$

У роботі [4] розглянуто умови слабкої збіжності сім'ї НМП (2) до процесу $\rho(t)$, що є розв'язком звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = C(\rho(t)), \tag{5}$$

причому $C(u) = a^{(1)}(u)b(u)$.

У наведеній нижче теоремі сформулюємо умови слабкої збіжності сім'ї НМП (3).

**Теорема 1** (слабка збіжність сім'ї НМП до дифузійного процесу в умовах балансу). *Нехай виконуються такі умови:*

*D1) має місце слабка збіжність $\rho^\varepsilon(t) \Rightarrow \rho(t)$, де $\rho(t)$ задовольняє рівняння* (5)*;*

*D2) обмеженість першого та другого моментів величини стрибка*

$$\int_{R^d} |v|\Gamma^\varepsilon(u, dv) \leqslant c_1 < \infty; \qquad \int_{R^d} |v^* v|\Gamma^\varepsilon(u, dv) \leqslant c_2 < \infty;$$

*D3) оператори*

$$R^\varepsilon\varphi(u) = \varepsilon^{-2} \int_{R^d} \left|\varphi(u + \varepsilon v) - \varphi(u) - \varepsilon v\varphi'(u) - \frac{\varepsilon^2 v^* v}{2}\varphi''(u)\right| \Gamma^\varepsilon(u, dv)$$

*задовольняють умову*

$$|R^\varepsilon\varphi(u)| \to 0, \qquad \varepsilon \to 0, \qquad \varphi(u) \in C^3(R^d).$$

*Зокрема ця умова виконується при обмеженості третього моменту величини стрибка*

$$|C^\varepsilon(u)| \leqslant c_3 < \infty, \tag{6}$$

*де*

$$C^\varepsilon(u) = \max_{i,j,k} |C^\varepsilon_{ijk}(u)|, \qquad C^\varepsilon_{ijk}(u) = \int\limits_{R^d} v_i v_j v_k \Gamma^\varepsilon(u, dv_i, dv_j, dv_k); \qquad i,j,k = \overline{1,d};$$

*D4) рівномірна інтегровність (обмеженість часу перебування в стані):*

$$\sup_{u \in R^d} \int\limits_T^\infty \overline{F}_u(t)dt \to 0 \qquad \textit{при} \qquad T \to \infty;$$

*D5)* $\exists\, C > 0$, *така, що для будь-якого* $u \in R^d$ *та* $\forall\, \varepsilon > 0$*:*

$$Ee^{-\varepsilon\theta_u} \leqslant 1 - C\varepsilon;$$

*D6) має місце збіжність початкових умов*

$$\zeta^\varepsilon(0) \Rightarrow \zeta(0) \qquad \textit{при} \qquad \varepsilon \to 0$$

*та*

$$\sup_{\varepsilon > 0} E|\zeta^\varepsilon(0)| \leqslant C < +\infty;$$

*D7) загальна умова балансу*

$$a^{(1)}(u) \equiv 0, \qquad a^{(2)}(u) \equiv 0.$$

*Тоді має місце слабка збіжність*

$$\zeta^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta^0(t), \qquad \varepsilon \to 0,$$

*де* $\zeta^0(t)$ *— дифузійний процес, що визначається генератором*

$$\Gamma^0\varphi(u) = \frac{b(u)B^{(1)}(u)}{2}\varphi''(u).$$

*Зауваження 1.* Якщо умову **D7** замінити на

$$a^{(1)} \equiv 0,$$

то має місце слабка збіжність

$$\zeta^\varepsilon(t) \Rightarrow \widetilde{\zeta}^0(t), \qquad \varepsilon \to 0,$$

де $\widetilde{\zeta}^0(t)$ — дифузійний процес, що визначається генератором

$$\Gamma^0\varphi(u) = a^{(2)}(u)\varphi'(u) + \frac{b(u)B^1(u)}{2}\varphi''(u).$$

Дослідимо слабку збіжність сім'ї НМП $\xi^\varepsilon(t)$ (4). Має місце

**Теорема 2** (слабка збіжність НМП до дифузійного процесу). *Нехай виконуються умови:*

*Z1) має місце слабка збіжність* $\rho^\varepsilon(t) \Rightarrow \rho(t)$, *де* $\rho(t)$ *задовольняє рівняння* (5)*;*

*Z2) рівномірна інтегровність (обмеженість часу перебування в стані):*

$$\sup_{u\in R^d}\int\limits_T^\infty \overline{F}_u(t)\,dt \to 0 \qquad \textit{при} \qquad T\to\infty;$$

*Z3) для* $\forall\, u \in R^d$ *та* $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, C > 0$ *таке, що*

$$Ee^{-\varepsilon\theta_u} \leqslant 1 - C\varepsilon, \qquad \sup_{u\in R^d} D\theta_u < C < \infty;$$

*Z4) обмеженість першого та другого моментів величини стрибка:*

$$\int\limits_{R^d} |v|\Gamma^\varepsilon(u,dv) \leqslant C < \infty; \qquad \int\limits_{R^d} |v^*v|\Gamma^\varepsilon(u,dv) \leqslant C < \infty;$$

*Z5) умови на ядро* $\Gamma^\varepsilon(u,dv)$*:*

$$a^\varepsilon(z,u)\colon = \int\limits_{R^d} v\Gamma^\varepsilon(z+\varepsilon u,dv) = a(z) + \varepsilon a_1(z,u) + \varepsilon\delta_1^\varepsilon,$$

$$B^\varepsilon(z,u)\colon = \int\limits_{R^d} v^2\Gamma^\varepsilon(z+\varepsilon u,dv) = B(z) + \delta_2^\varepsilon,$$

$$\delta_1^\varepsilon, \delta_2^\varepsilon \to 0, \qquad \varepsilon\to 0;$$

*Z6) функція* $b(u)$ *є обмеженою та задовольняє умову*

$$b(\rho+\varepsilon u) = b(\rho) + \varepsilon\delta_3^\varepsilon, \qquad \delta_3^\varepsilon \to 0, \qquad \varepsilon\to 0;$$

*Z7) збіжність початкових умов*

$$\xi^\varepsilon(0) \Rightarrow \xi(0) \qquad \textit{при} \qquad \varepsilon\to 0$$

*та*

$$\sup_{\varepsilon>0} E|\xi^\varepsilon(0)| \leqslant C < +\infty.$$

*Тоді має місце слабка збіжність*

$$\xi^\varepsilon(t) \Rightarrow \xi^0(t), \qquad \varepsilon\to 0,$$

*де* $\xi^0(t)$ *— дифузійний процес, що визначається генератором*

$$\Gamma_t^0\varphi(u) = C_1(u,\rho(t))\varphi'(u) + \frac{1}{2}\widetilde{B}(\rho(t))\varphi''(u),$$

*причому*

$$C_1(u, \rho(t)) = b(\rho(t))a_1(\rho(t), u), \qquad \widetilde{B}(\rho(t)) = b(\rho(t))\sigma^2(\rho(t)),$$
$$\sigma^2(\rho(t)) = B(\rho(t)) - (a^{(1)}(\rho(t)))^2.$$

*Зауваження 2.* Як функція $b$ з Z7 може виступати нескінченно-диференційовна функція, для якої $b'(\rho) \equiv 0$, тобто

$$b(\rho + \varepsilon u) = b(\rho) + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{b^{(i)}(\rho)(\varepsilon u)^i}{i!}.$$

*Автор висловлює щиру вдячність акад. НАН України В. С. Королюку за увагу до даної роботи та цінні поради.*

1. *Свириденко М. Н.* Об условиях сходимости семейства полумарковских процессов к марковскому процессу. – Москва: ВИНИТИ, 1986. – Препр. № 37.
2. *Koroliuk V. S., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. – Singapore: World Scientific, 2005. – 331 p.
3. *Самойленко І. В., Малик І. В.* Збіжність напівмарковського і супроводжуючого марковського процесу до марковського процесу // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 5. – С. 674–681.
4. *Королюк В. С.* Стохастичні системи з усередненням у схемі дифузійної апроксимації // Там само. – 2005. – **57**, № 9. – С. 1235–1252.

*Чернівецький національний університет*
*ім. Юрія Федьковича*

*Надійшло до редакції 29.08.2011*

**И. В. Малык**

## Слабая сходимость семейства полумарковских процессов к диффузионному процессу

*Приведены основные критерии слабой сходимости семейства полумарковских процессов к “чисто” диффузионному процессу в условиях баланса и к диффузионному процессу Орнштейна–Уленбека при условии, что величина скачка зависит от параметра серии $\varepsilon$.*

**I. V. Malyk**

## Weak convergence of a family of semi-Markov processes to the diffusion process

*The basic criteria of weak convergence of a family of semi-Markov processes to the “pure” diffusion process under balance conditions and to the Ornstein–Uhlenbeck diffusion process provided that the value of jump depends on the series parameter $\varepsilon$ are obtained.*