УДК 512.544

О. Ю. Дашкова

Об одном классе модулей над целочисленными групповыми кольцами разрешимых групп

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Исследован $\mathbf{Z}G$-модуль A такой, что $\mathbf{Z}$ — кольцо целых чисел, $A/C_A(G)$ не является минимаксным $\mathbf{Z}$-модулем, $C_G(A) = 1$, G — разрешимая группа. Рассмотрена система $L_{nm}(G)$ всех подгрупп $H \leqslant G$, для которых фактормодули $A/C_A(H)$ не являются минимаксными $\mathbf{Z}$-модулями. Изучен $\mathbf{Z}G$-модуль A такой, что $L_{nm}(G)$ удовлетворяет условию максимальности как упорядоченное множество. Описана структура разрешимой группы G, удовлетворяющей заданным условиям.

Пусть A — векторное пространство над полем F. Подгруппы группы $GL(F, A)$ всех автоморфизмов пространства A называются линейными группами. Если A имеет конечную размерность над полем F, $GL(F, A)$ можно рассматривать как группу невырожденных $n \times n$-матриц, где $n = \dim_F A$. Конечномерные линейные группы давно являются объектом исследования алгебры и достаточно изучены. В случае, когда пространство A имеет бесконечную размерность над полем F, ситуация кардинально меняется. Бесконечномерные линейные группы исследованы мало. Это направление является достаточно новым и требует решения ряда важных вопросов. Вместе с тем бесконечномерные линейные группы играют важную роль в различных областях математики и ее приложениях.

Изучение бесконечномерных линейных групп возможно лишь при наложении на них дополнительных ограничений. К таким ограничениям относятся различные условия конечности. Примером служит финитарность линейной группы. Финитарные линейные группы исследовались многими авторами (В. В. Беляев, Р. Е. Филлипс, А. Розенберг, А. Е. Залесский и др.) Р. Е. Филлипсом проведен обзор исследований финитарных линейных групп [1]. В [2] рассмотрено другое условие конечности, налагаемое на бесконечномерные линейные группы, и введено понятие центральной размерности бесконечномерной линейной группы. Пусть H — подгруппа группы $GL(F, A)$. H действует на факторпространстве $A/C_A(H)$ естественным образом. Авторы определяют $\mathrm{centdim}_F H$ как $\dim_F(A/C_A(H))$. Говорят, что подгруппа H имеет конечную центральную размерность, если $\mathrm{centdim}_F H$ конечна, и H имеет бесконечную центральную размерность, если $\mathrm{centdim}_F H$ бесконечна. Пусть $G \leqslant GL(F, A)$. В [2] рассматривалась система $\mathbf{L_{id}(G)}$ всех подгрупп группы G, имеющих бесконечную центральную размерность. Чтобы исследовать бесконечномерные линейные группы, которые по своей структуре близки к конечномерным, следует рассмотреть случай, когда система $\mathbf{L_{id}(G)}$ "достаточно мала". Так, в [2] изучались локально разрешимые бесконечномерные линейные группы, у которых $\mathbf{L_{id}(G)}$ удовлетворяет условию минимальности как упорядоченное множество. Разрешимые бесконечномерные линейные группы, у которых $\mathbf{L_{id}(G)}$ удовлетворяет условию максимальности, исследовались в [3].

Если $G \leqslant GL(F, A)$, то A можно рассматривать как FG-модуль. Естественным обобщением этого случая является рассмотрение $\mathbf{R}G$-модуля A, где $\mathbf{R}$ — кольцо, структура которого близка к структуре поля. При этом обобщением понятия центральной размерности подгруппы линейной группы является понятие коцентрализатора подгруппы, введенное в [4]. Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ — кольцо, G — группа. Если $H \leqslant G$, то фактормодуль $A/C_A(H)$, рассматриваемый как $\mathbf{R}$-модуль, называется коцентрализатором подгруппы H в модуле A.

Отметим, что до настоящего времени исследование алгебраических систем, удовлетворяющих условиям минимальности и максимальности, остается актуальным. Примерами таких систем являются классы нетеровых и артиновых модулей. Напомним, что модуль называется артиновым, если упорядоченное множество его подмодулей удовлетворяет условию минимальности. Модуль называется нетеровым, если упорядоченное множество его подмодулей удовлетворяет условию максимальности. Естественным обобщением классов артиновых и нетеровых модулей является класс минимаксных модулей [5, гл. 7]. $\mathbf{R}$-модуль A называется минимаксным, если он обладает конечным рядом подмодулей, каждый фактор которого является либо нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, либо артиновым $\mathbf{R}$-модулем.

В [6] исследовался $\mathbf{R}G$-модуль A такой, что $\mathbf{R}$ — дедекиндова область, и коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Рассматривалась система $L_{nad}(G)$ всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются артиновыми $\mathbf{R}$-модулями, упорядоченная относительно обычного включения подгрупп. Изучался такой $\mathbf{R}G$-модуль A, что система $L_{nad}(G)$ удовлетворяет условию максимальности как упорядоченное множество, а группа G разрешима. В [7] исследовался $\mathbf{R}G$-модуль A такой, что $\mathbf{R}$ — произвольное коммутативное кольцо, коцентрализатор группы G в модуле A не является нетеровым $\mathbf{R}$-модулем, и рассматривалась система $L_{nnd}(G)$ всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются нетеровыми $\mathbf{R}$-модулями. Описана структура разрешимой группы G в случае, когда система $L_{nnd}(G)$ удовлетворяет условию максимальности.

В настоящей работе рассматривается обобщение двух данных проблем. Изучается $\mathbf{R}G$-модуль A такой, что $\mathbf{R}$ — кольцо целых чисел, коцентрализатор группы G в модуле A не является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем, а группа G разрешима. Пусть $L_{nm}(G)$ — система всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются минимаксными $\mathbf{R}$-модулями. На $L_{nm}(G)$ введем порядок относительно обычного включения подгрупп. Если система $L_{nm}(G)$ удовлетворяет условию максимальности как упорядоченное множество, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию $\max -nm$. В работе обобщаются некоторые результаты о бесконечномерных линейных группах, полученные в [3].

Далее всюду рассматривается $\mathbf{R}G$-модуль A такой, что $C_G(A) = 1$, $\mathbf{R} = \mathbf{Z}$ — кольцо целых чисел.

Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, $MD(G)$ — множество всех элементов $x \in G$ таких, что коцентрализатор группы $\langle x \rangle$ в модуле A является минимаксным $\mathbf{Z}$-модулем. Поскольку $C_A(x^g) = C_A(x)g$ для всех $x, g \in G$, отсюда вытекает, что $MD(G)$ является нормальной подгруппой группы G.

При доказательстве основных результатов работы важную роль играют следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль.*

(i) Если $K \leqslant H \leqslant G$ и коцентрализатор подгруппы H в модуле A является минимаксным $\mathbf{Z}$-модулем, то коцентрализатор подгруппы K в модуле A также является минимаксным $\mathbf{Z}$-модулем.

(ii) Если U, $V \leqslant G$ такие, что их коцентрализаторы в модуле A являются минимаксными $\mathbf{Z}$-модулями, то коцентрализатор подгруппы $\langle U, V\rangle$ в модуле A является минимаксным $\mathbf{Z}$-модулем.

Лемма 2. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль и группа G удовлетворяет условию* $\max -nm$. *Тогда либо коцентрализатор каждой конечно порожденной подгруппы группы G в модуле A является минимаксным $\mathbf{Z}$-модулем, либо группа G конечно порождена. В частности, если G бесконечно порождена, то $G = MD(G)$.*

Лемма 3. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, группа G разрешима и удовлетворяет условию* $\max -nm$. *Тогда факторгруппа $G/MD(G)$ полициклическая.*

Лемма 4. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, коцентрализатор группы G в модуле A не является минимаксным $\mathbf{Z}$-модулем, группа G разрешима и удовлетворяет условию* $\max -nm$. *Если факторгруппа $G/[G,G]$ бесконечно порождена, то группа G имеет ряд нормальных подгрупп $H \leqslant N \leqslant M \leqslant G$ такой, что факторгруппа G/M конечна, факторгруппа M/N — прюферова p-группа для некоторого простого числа p, N/H конечно порождена, факторгруппа M/H абелева, подгруппа H нильпотентна и коцентрализатор подгруппы N в модуле A является минимаксным $\mathbf{Z}$-модулем.*

При описании структуры разрешимой группы G с условием $\max -nm$ следует отдельно рассмотреть случаи конечно порожденной и бесконечно порожденной группы G. Если группа G такова, что ее факторгруппа по коммутанту бесконечно порождена, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, коцентрализатор группы G в модуле A не является минимаксным $\mathbf{Z}$-модулем, группа G разрешима и удовлетворяет условию* $\max -nm$. *Если факторгруппа $G/[G,G]$ бесконечно порождена, то группа G удовлетворяет следующим условиям:*

1) A обладает конечным рядом $\mathbf{Z}G$-подмодулей

$$0 = C_0 \leqslant C_1 \leqslant C_2 \leqslant \cdots \leqslant C_l = A$$

таким, что каждый фактор C_j/C_{j-1}, $j = 2, \ldots, l$, является либо конечным $\mathbf{Z}G$-модулем, либо квазиконечным $\mathbf{Z}G$-модулем, либо G-рационально неприводимым $\mathbf{Z}G$-модулем, аддитивная группа которого — абелева группа без кручения конечного 0-ранга, а факторгруппа $G/C_G(C_1)$ — прюферова q-группа для некоторого простого числа q;

2) $H = C_G(C_1) \bigcap C_G(C_2/C_1) \bigcap \cdots \bigcap C_G(C_m/C_{m-1})$ — нильпотентная нормальная подгруппа группы G;

3) группа G имеет ряд нормальных подгрупп $H \leqslant N \leqslant M \leqslant G$ такой, что факторгруппа G/M конечна, факторгруппа M/N — прюферова p-группа для некоторого простого числа p, N/H конечно порождена, факторгруппа M/H абелева, подгруппа H нильпотентна и коцентрализатор подгруппы N в модуле A является минимаксным $\mathbf{Z}$-модулем.

Следующим естественным шагом является рассмотрение случая, когда группа G конечно порождена. В этом случае структура группы G описана в теоремах 2 и 3.

Теорема 2. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, коцентрализатор группы G в модуле A не является минимаксным $\mathbf{Z}$-модулем, G — конечно порожденная разрешимая группа, удовлетворяющая условию* $\max -nm$. *Если коцентрализатор $MD(G)$ в модуле A — минимаксный $\mathbf{Z}$-модуль, то G содержит нормальную нильпотентную подгруппу H такую, что факторгруппа G/H полициклическая.*

Доказательство. Пусть $C = C_A(MD(G))$. Поскольку $MD(G)$ — нормальная подгруппа группы G и коцентрализатор $MD(G)$ в модуле A является минимаксным $\mathbf{Z}$-модулем, то A обладает рядом $\mathbf{Z}G$-подмодулей

$$0 = C_0 \leqslant C = C_1 \leqslant C_2 \leqslant \cdots \leqslant C_t = A$$

таким, что каждый фактор C_j/C_{j-1}, $j = 2, \ldots, t$, является либо конечным $\mathbf{Z}G$-модулем, либо квазиконечным $\mathbf{Z}G$-модулем, либо $\mathbf{Z}G$-модулем, аддитивная группа которого — абелева группа без кручения конечного 0-ранга. Отсюда вытекает, что можно построить ряд подмодулей

$$0 = C_0 \leqslant C = C_1 \leqslant C_2 \leqslant \cdots \leqslant C_l = A$$

такой, что $l \geqslant t$, и каждый фактор C_j/C_{j-1}, $j = 2, \ldots, l$, является либо конечным $\mathbf{Z}G$-модулем, либо квазиконечным $\mathbf{Z}G$-модулем, либо G-рационально неприводимым $\mathbf{Z}G$-модулем, аддитивная группа которого — абелева группа без кручения конечного 0-ранга. В случаях, когда фактор C_j/C_{j-1}, $j = 2, \ldots, l$, является либо конечным $\mathbf{Z}G$-модулем, либо квазиконечным $\mathbf{Z}G$-модулем, по лемме 16.19 [8] факторгруппа $G/C_G(C_j/C_{j-1})$ почти абелева. В случае, когда фактор C_j/C_{j-1} — G-рационально неприводим, и его аддитивная группа является абелевой группой без кручения конечного 0-ранга, факторгруппу $G/C_G(C_j/C_{j-1})$ можно рассматривать как неприводимую подгруппу $GL_r(\mathbf{Q})$. По теореме А. И. Мальцева (лемма 3.5 [9]) $G/C_G(C_j/C_{j-1})$ почти абелева. Отсюда с учетом конечной порожденности группы G вытекает, что факторгруппы $G/C_G(C_j/C_{j-1})$, $j = 2, \ldots, l$, являются полициклическими.

Положим

$$H = C_G(C_1) \bigcap C_G(C_2/C_1) \bigcap C_G(C_3/C_2) \bigcap \cdots \bigcap C_G(C_l/C_{l-1}).$$

Подгруппа H действует тривиально в каждом факторе ряда $0 = C_0 \leqslant C = C_1 \leqslant C_2 \leqslant \leqslant \cdots \leqslant C_l = A$. Следовательно, H нильпотентна. Поскольку $MD(G) \leqslant C_G(C_1)$, то по лемме 3 факторгруппа $G/C_G(C_1)$ полициклическая. Так как факторгруппа G/H вкладывается в прямое произведение факторгрупп $G/C_G(C_j/C_{j-1})$, $j = 1, 2, \ldots, l$, то факторгруппа G/H полициклическая. Отсюда следует, что группа G содержит нормальную нильпотентную подгруппу H такую, что факторгруппа G/H полициклическая. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, коцентрализатор группы G в модуле A не является минимаксным $\mathbf{Z}$-модулем, G — конечно порожденная разрешимая группа, удовлетворяющая условию* $\max -nt$. *Если коцентрализатор $MD(G)$ в модуле A не является минимаксным $\mathbf{Z}$-модулем, то G содержит нормальную подгруппу L, удовлетворяющую следующим условиям:*

1) факторгруппа G/L полициклическая;

2) $L \leqslant MD(G)$ и коцентрализатор подгруппы L в модуле A не является минимаксным $\mathbf{Z}$-модулем;

3) факторгруппа $L/[L, L]$ бесконечно порождена.

Доказательство. Пусть $\langle 1 \rangle = D_0 \leqslant D_1 \leqslant \cdots \leqslant D_n = G$ — производный ряд группы G. Если группа G полициклическая, то подгруппа $MD(G)$ также полициклическая. По лемме 1 коцентрализатор подгруппы $MD(G)$ в модуле A является минимаксным $\mathbf{Z}$-модулем. Противоречие. Следовательно, существует номер $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ такой, что факторгруппа G/D_m полициклическая, а факторгруппа D_m/D_{m-1} не является конечно порожденной. Положим $L = D_m$. Согласно лемме 2, $L \leqslant MD(G)$. Предположим, что коцентрализатор подгруппы L в модуле A является минимаксным $\mathbf{Z}$-модулем. Тогда ввиду конечной порожденности факторгруппы $MD(G)/L$ по лемме 1 коцентрализатор $MD(G)$ в модуле A также является минимаксным $\mathbf{Z}$-модулем. Противоречие. Теорема доказана.

1. *Philips R. E.* Finitary linear groups: a survey // Finite and locally finite groups / NATO ASI. Ser. C. – Dordrecht: Kluwer, 1995. – Vol. 471. – P. 111–146.

2. *Dixon M. R., Evans M. J., Kurdachenko L. A.* Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension // J. Algebra. – 2004. – **277**, No 1. – P. 172–186.
3. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* Linear groups with the maximal condition on subgroups of infinite central dimension // Publ. Math. – 2006. – **50**. – P. 103–131.
4. *Курдаченко Л. А.* О группах с минимаксными классами сопряженных элементов. Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 160–177.
5. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya., Semko N. N.* Insight into modules over Dedekind domains. – Kyiv: Institute of Mathematics, 2008. – 119 p.
6. *Дашкова О. Ю.* Об одном классе модулей над групповыми кольцами разрешимых групп с ограничениями на некоторые системы подгрупп // Фундамент. и прикл. математика. – 2008. – **14**, № 7. – С. 111–119.
7. *Dashkova O. Yu.* On modules over group rings of soluble groups with commutative ring of scalars // Algebra and Discrete Math. – 2010. – **10**, No 2. – P. 51–63.
8. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* Artinian modules over group rings. – Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 2007. – 248 p.
9. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear groups // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. – New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1973. – 229 p.

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

Поступило в редакцию 23.05.2011

О. Ю. Дашкова

Про один клас модулів над цілочисельними груповими кільцями розв'язних груп

Досліджено $\mathbf{Z}G$*-модуль* A *такий, що* $\mathbf{Z}$ *— кільце цілих чисел,* $A/C_A(G)$ *не є мінімаксним* $\mathbf{Z}$*-модулем,* $C_G(A) = 1$*,* G *— розв'язна група. Розглянуто систему* $L_{nm}(G)$ *усіх підгруп* $H \leqslant G$*, для яких фактормодулі* $A/C_A(H)$ *не є мінімаксними* $\mathbf{Z}$*-модулями. Вивчено* $\mathbf{Z}G$*-модуль* A *такий, що* $L_{nm}(G)$ *задовольняє умову максимальності як упорядкована множина. Описано структуру розв'язної групи* G*, яка задовольняє ці умови.*

O. Yu. Dashkova

On a one class of modules over integer-valued group rings of soluble groups

Let A *be a* $\mathbf{Z}G$*-module, where* $\mathbf{Z}$ *is a ring of integers,* $A/C_A(G)$ *is not a minimax* $\mathbf{Z}$*-module,* $C_G(A) = 1$*,* G *is a soluble group. Let* $L_{nm}(G)$ *be a system of all subgroups* $H \leqslant G$ *such that the quotient modules* $A/C_A(H)$ *are not minimax* $\mathbf{Z}$*-modules. The author studies the* $\mathbf{Z}G$*-module* A *such that* $L_{nm}(G)$ *satisfies the maximal condition as an ordered set. The structure of a soluble group* G *with these conditions is described.*