ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2012

МЕХАНІКА

УДК 539.375

Член-кореспондент НАН України **О. Є. Андрейків, С. В. Хиль, Ю. Я. Матвіїв**

Розрахункова модель для визначення періоду докритичного росту тріщин в пластинах при блочному навантаженні

Розроблено метод для визначення залишкового ресурсу тонкостінних елементів конструкцій з тріщинами при блочному навантаженні. Досліджено вплив форми і структури блоків навантаження на залишкову довговічність пластини.

У різних конструкціях допускають появу втомних тріщин [1]. Неекономно проектувати конструкції з необмеженою довговічністю. Тому одна із важливих проблем під час експлуатації мобільних елементів конструкцій є визначення залишкового ресурсу, тобто ресурсу з наявними тріщинами. Цій проблемі в даний час присвячено багато праць (див., наприклад, [1, 2]), що в більшості стосуються регулярного навантаження. Проте в інженерній практиці (кораблях, літаках, деталях газотурбінних двигунів, трубопроводах, залізничних та автодорожних мостах, компресорних лопатках) елементи піддані дії багаточастотних або блочних навантажень. Теоретичні аспекти тут розроблені ще недостатньо [1, 3, 4], а експериментальні дослідження через значні технічні труднощі проведені в малому об'ємі.

Дана робота якраз і присвячена дослідженню такої важливої проблеми. Зокрема, тут на основі [5, 6] раніше сформульованого авторами енергетичного підходу розроблена розрахункова модель для визначення залишкового ресурсу тонкостінних елементів конструкцій при блочному навантаженні.

Постановка задачі і метод її розв'язання. Для простоти дослідження залежності залишкової довговічності тонкостінного елемента конструкції від структури і форми блоків навантаження розглянемо нескінченну пластину, послаблену прямолінійною тріщиною початкової довжини $2l_0$, яка піддана дії в нескінченно віддалених точках рівномірно розподілених зусиль F, зміна яких з часом t і напрямком має блочний характер. Задача полягає у визначенні такої кількості $N_1 = N_1^*$ блоків навантаження, після досягнення якого тріщина буде мати критичну довжину $l = l_*$ і пластина зруйнується.

Розв'язок даної задачі здійснюємо на основі сформульованого раніше [5, 6] авторами енергетичного підходу. В результаті цього для визначення $N_1 = N_1^*$ отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\frac{dl}{dN_1} = \frac{W_c}{\gamma_c - \gamma_t}, \qquad \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{W_c}{\gamma_c - \gamma_t}\right]_{\theta=\theta_*} = 0; \tag{1}$$

за початкових та кінцевих умов

$$N_1 = 0, \qquad l(0) = l_0; \qquad N_1 = N_1^*, \qquad l(N_1^*) = l_*, \qquad \gamma_t(l_*) = \gamma_c.$$

Тут $W_C = \sum\limits_{i=1}^{n} W_C^{(i)}$ — робота пластичних деформацій розтягу у зоні передруйнування біля вершин тріщини, які генерує саме тіло [6]; $W_C^{(i)}$ — робота пластичних деформацій розтягу W_C для i-го піку навантаження в блоці; n — кількість піків навантаження в блоці; θ — координата полярної системи координат $O\rho\theta$ з початком у вершині втомної тріщині і полярною віссю вздовж дотичної до лінії тріщині в цій вершині; θ_* — кут напрямку поширення тріщини; γ_C — питома енергія руйнування під час поширення втомної тріщини; γ_t — питома енергія пластичного деформування в зоні передруйнування біля вершини тріщини, яка залежить тільки від її довжини: $\gamma_t = \sigma_t\delta_{\mathrm{I}} + \tau_t\delta_{\mathrm{II}}$ [6, 7]; σ_t і τ_t — усереднені нормальні і дотичні напруження в зоні передруйнування; δ_I і δ_{II} — нормальний і дотичний розкриви вершини тріщини; δ_{fC} — критичне значення δ_I;

$$\begin{gathered}\gamma_C = \sigma_t\delta_{fA} = \frac{K_{fC}^2}{E}, \qquad \delta_{It} = \frac{K_I^2}{E\sigma_t}, \qquad \delta_{II} = \frac{K_{II}^2}{E\tau_t}, \\ W_C^{(i)}(l) = \frac{0{,}25\alpha_0}{\sigma_t E}(1-R)^4(K_{iI\max}^4 + K_{iII\max}^4 - K_{\mathrm{th}}^4);\end{gathered} \tag{2}$$

E — модуль пружності; α_0 — константа матеріалу, яка визначається із експерименту; $K_{iI\max}$, $K_{iII\max}$ — максимальне значення коефіцієнтів інтенсивності напружень біля вершини тріщини вздовж дотичної до лінії її розміщення; K_{fc} — критичне значення K_I при циклічному навантаженні; $R_i = K_{i\min I}K_{i\max I}^{-1}$; $K_{i\min I}$ — найбільше значення мінімальних значень K_I в циклі; K_{th} — значення K_I, при якому тріщина не поширюється [6, 7].

Вплив форми блока навантаження, перпендикулярного до лінії розміщення тріщини. Якщо навантаження F перпендикулярне до лінії розміщення тріщини, то система рівнянь (1) зведеться до такого рівняння:

$$\frac{dl}{dN_1} = W_c E(K_{fc}^2 - \pi l F_{s\max}^2)^{-1}; \tag{3}$$

при початкових і кінцевих умовах

$$N_1 = 0, \qquad l(0) = l_0; \qquad N_1 = N_1^*, \qquad l(N_1^*) = l_*, \qquad l_* = \pi^{-1}K_{fc}^2 F_{\max}^{-2}. \tag{4}$$

Тут $F_{s\max}$ — максимальне значення навантаження $F(t)$ в блоці; W_c — робота пластичних деформацій в зоні передруйнування біля вершини тріщини за один блок, яка визначається так [6]:

$$W_c = 0{,}25\alpha_0\pi^2 l^2 E^{-2}\sigma_t^{-1}\sum_{s=1}^{n}(1-R_s)^4(F_{s\max}^4 - F_{\mathrm{th}}^4). \tag{5}$$

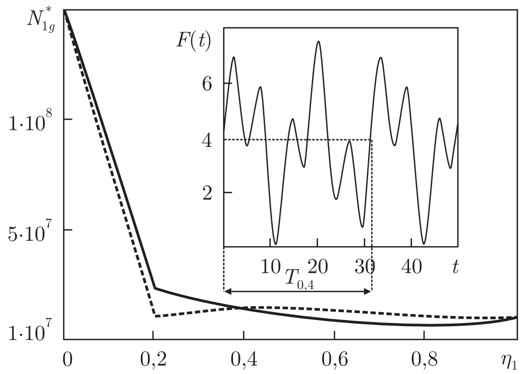

Рис. 1. Графічне порівняння залежностей $N^*_{1g} \sim \eta_1$ з урахуванням (суцільна лінія) і неврахуванням (штрихова лінія) форми циклу

Тут n — кількість ділянок у блочному навантаженні $F(t)$ зі своїм максимумом $F_{s\max}$ і мінімумом $F_{s\min}$; $R_s = F_{s\min}F^{-1}_{s\max}$; F_{th} — величина зовнішнього навантаження, при якому не буде розкриття тріщини ($K_{\text{th}} = F_{\text{th}}\sqrt{\pi l}$). Як приклад, розглянемо задачу, коли пластина із тріщиною піддана дії двочастотного ω_1, ω_2 навантаження

$$F(t) = b[1 + \sin(0{,}5t\omega_1(1 + \eta_1))\cos(0{,}5t\omega_1(1 - \eta_1))], \tag{6}$$

де $0 \leqslant \omega_2\omega_1^{-1} = \eta_1 \leqslant 1$. Тут, приймаючи для простоти обчислень $F_{\text{th}} = 0$, W_c визначаємо так. Для кожного значення $\eta_1 = 0$; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1 будуємо залежність $F(t)$, визначаємо період і форму зміни циклу. Розбиваємо кожен цикл з періодами T_i ($i = 0$;0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1) на n ділянок з піками зміни $F(t)$ (див. рис. 1) і для кожної ділянки визначаємо $F_{i\max}$ і $F_{i\min}$.

Тоді, інтегруючи (3) з урахуванням (4)–(6), отримаємо:

$$N^*_1 = A\left[-K^2_{fc}l^{-1}_* + K^2_{fc}l^{-1}_0 - F^2_{s\max}\pi\ln\frac{l_*}{l_0}\right],$$
$$A = 24\sigma_t^2\pi^{-1}\left[\sum_{s=1}^{N_2}(F_{s\max} - F_{s\min})^4\right]^{-1}. \tag{7}$$

Для числового аналізу формули (7) задамо параметри зовнішнього навантаження, довжини початкової тріщини і характеристики матеріалу так: $l_0 = 0{,}01m$, $K_{fc} = 85$ MPa $\cdot \sqrt{m}$. На основі цього і формули (7) побудована (рис. 1) залежність N^*_{1g} від η_1 (суцільна лінія) ($N^*_{1g} = N^*_1 b(7{,}64\sigma_t^2)^{-1}$). Як бачимо, зі збільшенням відношення частот довговічність знижується, що підтверджують експерименти [3]. Тут також побудовано (штрихова лінія) залежність N^*_{1g} від η_1, коли не враховувати реальну форму циклу (синусоїдальна зміна $F(t)$ із одним піком $F_{\max}$ в циклі), що може призвести (для деяких η_1) до значних похибок для N^*_{1g}.

Вплив структури напрямків навантаження в блоці. Розглянемо випадок, коли згадана вище пластина з тріщиною довжиною $2l_0$ навантажена на нескінченності рівнорозподіленими нормальними $F_1(t)$ і зсувними $F_2(t)$ зусиллями (див. рис. 2), дія яких почергово змінюється (блочне навантаження з блоком $F_1 + F_2$). В межах одного блока ($0 \leqslant t \leqslant 2\pi\omega^{-1}$) зміну цих зусиль можна зобразити так:

$$F_1(t) = p[1 - H(t - \pi\omega^{-1})][1 + \sin 2\omega t],$$
$$F_2(t) = \tau H(t - \pi\omega^{-1})[1 + \sin(2\omega t + \pi)]. \tag{8}$$

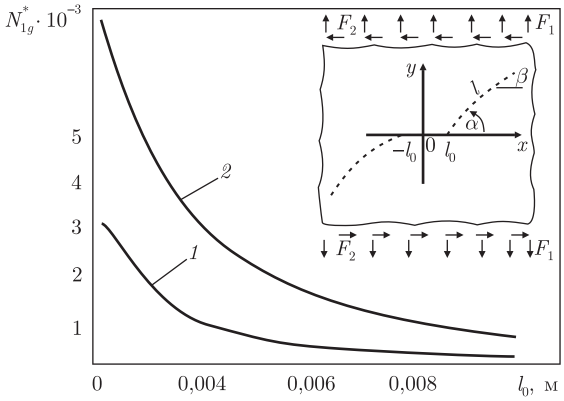

Рис. 2. Порівняння залежностей $N_1^* \sim l_0$ для синхронної (крива *2*) і несинхронної (крива *1*) дії зусиль $F_1(t)$, $F_2(t)$

Тут p, τ — амплітуди навантажень; $H(x)$ — функція Хевісайда; ω — кругова частота навантаження. Задача полягає у визначенні кількості $N_1 = N_1^*$ блоків навантаження, після досягнення якого пластина зруйнується.

Розв'язок такої задачі здійснюємо за допомогою математичної задачі (1). В даному випадку

$$W_c = 0{,}25\alpha_0 E^{-2}\sigma_t^{-1}[K^4_{IP\max}(l,\theta_*) + K^4_{I\tau\max}(l,\theta_*) - K^4_{\rm th}], \tag{9}$$

де $K_{IP\max}(l,\theta_*)$, $K_{I\tau\max}(l,\theta_*)$ — коефіцієнти інтенсивності напружень, відповідно, від зусиль $F_1(t)$, $F_2(t)$. Тут θ_* шукаємо на основі другого рівняння (1), що у випадку малих значень l і $p = \tau$ дасть $\theta_* = \alpha \approx 60^\circ$, а при великих і $p = \tau$ — $\theta_* = \beta \approx 27^\circ$ (див. рис. 2). Коефіцієнти інтенсивності напружень $K_{IP\max}(l,\theta_*)$, $K_{I\tau\max}(l,\theta_*)$ визначаємо за інтерполяційною формулою через їх граничні випадки для малих і великих значень втомної тріщини l, що запропонована в роботі [8]. В зв'язку з цим для обчислення $K_{IP\max}(l,\theta_*)$, $K_{I\tau\max}(l,\theta_*)$ отримаємо формули

$$\begin{aligned} &K_{IP\max}(l,\theta_*) \approx p\sqrt{\pi l}\sqrt{0{,}50\lambda + 0{,}69},\\ &K_{I\tau\max}(l,\theta_*) \approx \tau\sqrt{\pi l}\sqrt{1{,}42\lambda + 0{,}56}, \qquad \lambda = l_0 l^{-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

На основі співвідношень (9) і (10) і приймаючи $K_{\rm th} = 0$, математичну задачу (1) для даного випадку запишемо так:

$$\frac{dl}{dN_1} = \frac{p^4\pi^2 l^2\alpha_0(2{,}27\lambda^2 + 1{,}28\lambda + 0{,}79)}{4E\sigma_t[K^2_{fc} - p^2\pi l(1{,}92\lambda + 1{,}25)]}, \tag{11}$$

$N_1 = 0$, $l(0) = 0$; $N_1 = N_1^*$, $l(N_1^*) = l_*$, $l_* = (K^2_{fc} - 1{,}92p^2\pi l_0)/1{,}25\pi p^2$.

Інтегруючи рівняння (11) при відповідних початкових і кінцевих умовах, для визначення залишкової довговічності пластини $N_1 = N_1^*$ отримаємо таку формулу:

$$\begin{aligned} &N_1^* = 4\pi\alpha_0^{-1}p^{-2}E^{-1}\sigma_t^{-1}\int\limits_0^1 \frac{1{,}25(1-\lambda)}{(2{,}27\lambda_0^2 + 1{,}28\lambda\lambda_0 + 0{,}79\lambda^2)}d\lambda,\\ &\lambda = l l_*^{-1}, \qquad \lambda_0 = \frac{1{,}25}{\xi l_0^{-1} - 1{,}92}, \qquad \xi = \frac{K^2_{fc}}{\pi p^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

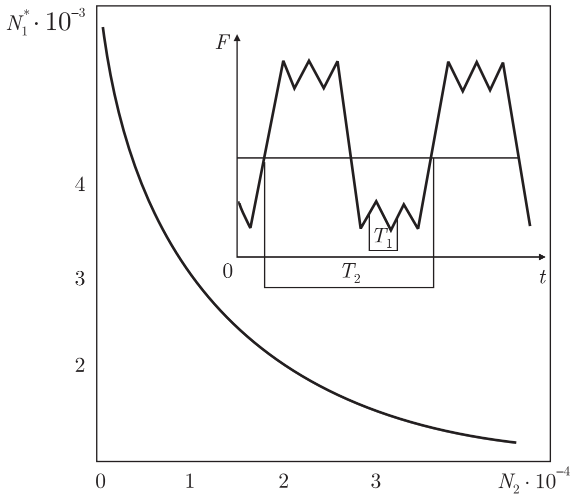

Рис. 3. Залежність залишкової довговічності N_1^* пластини від частоти N_2

Розглянемо тепер інший випадок цієї задачі, коли сили $F_1(t)$, $F_2(t)$ змінюються з часом синхронно. Проводячи, аналогічно попередньому, міркування і обчислення, залишкову довговічність пластини $N_1 = N_1^*$ будемо визначати так:

$$N_1^* = \int\limits_{0{,}71 l_0}^{l_*} 4E\sigma_t p^{-4}\pi^{-2}\alpha_0^{-1} l^{-2}[K_{fc}^2 - p^2\pi l]dl, \qquad l_* = \pi^{-1}p^{-2}K_{fc}^2. \tag{13}$$

Проінтегрувавши (13), отримаємо

$$N_1^* = 4\pi^{-1}\alpha_0^{-1}p^{-2}E\sigma_t(1{,}41\xi l_0^{-1} - 1 + \ln 0{,}71 l_0\xi^{-1}). \tag{14}$$

На рис. 2 за формулами (13) і (14) побудовані (відповідно, криві *1* і *2*) графічні залежності $N_1^* \sim l_0$. Як видно із рис. 2, одночасна дія зусиль $F_1(t)$, $F_2(t)$ збільшує довговічність пластини порівняно з їх почерговою дією.

Блочне навантаження при вібрації. В багатьох випадках інженерної практики поряд з високоамплітудним навантаженням елементи конструкцій піддаються дії високочастотних і низькоамплітудних вібраційних навантажень [3, 4]. Деякі дослідники вважають, що вплив вібрації в зв'язку з малою її амплітудою є незначним і ним можна нехтувати. Це, можливо, було б так, якби це не відбувалося на фоні високоамплітудного навантаження. В даному випадку таке нехтування може призвести до значних помилок, які підуть не в запас довговічності, а в небезпеку непередбачуваного руйнування. Запропонований тут підхід дає змогу розв'язувати такі задачі, моделюючи сумісну дію високоамплітудного навантаження з вібрацією, як блочне навантаження. Продемонструємо це на прикладі наступної задачі.

Нехай нескінченна пластина з системою періодичних вздовж однієї прямої тріщин довжиною $2l_0$ і віддалями між їх центрами $2h$ піддана дії блочного навантаження $F(t)$ (рис. 3), яке направлено перпендикулярно до лінії розміщення тріщин і описується так:

$$F(t) = a_1 + b_1 \sin\omega_1 t + b_2 \sin\omega_2 t, \tag{15}$$

де ω_1 — кругова частота низькочастотної і високоамплітудної складової (основне навантаження з амплітудою b_1 і періодом T_2) навантаження; ω_2 — кругова частота високочастотної і низькоамплітудної (вібрація з амплітудою b_2 і періодом зміни T_1) складової навантаження ($N_2 = \omega_2\omega_1^{-1}$, $\omega_2 \gg \omega_1$,$b_1 \gg b_2$); a_1 — середнє значення навантаження в циклі. Задача полягає у визначенні такої кількості блоків навантаження $N_1 = N_1^*$, після досягнення якої тріщини досягнуть критичної довжини $l = l_*$ і пластина зруйнується. Розв'язок такої задачі здійснюємо з допомогою аналогічних для співвідношень (1), тобто

$$\frac{dl}{dN_1} = W_c E(K_{fc}^2 - \pi l(a_1 + b_1 + b_2)^2 f_1^2(\varepsilon_1))^{-1}; \tag{16}$$

з початковими і кінцевими умовами

$$\begin{aligned} &N_1 = 0, \qquad l(0) = l_0, \\ &N_1 = N_1^*, \qquad l(N_1^*) = l_*, l_* = \pi^{-1} K_{fc}^2 (a_1 + b_1 + b_2)^{-2} f_1^{-2}(\varepsilon_1). \end{aligned} \tag{17}$$

Тут величина $f_1(\varepsilon_1)$ визначається на основі [7] так:

$$f_1(\varepsilon_1) = 2[(1 - \varepsilon_1)[4 + (\pi^2 - 4)\varepsilon_1]]^{-0,5}, \qquad \varepsilon_1 = lb^{-1}. \tag{18}$$

Роботу пластичних деформацій в зоні передруйнування біля вершин тріщин W_c визначаємо, аналогічно попередньому, так:

$$\begin{aligned} &W_c = 4\alpha_0\pi^2 l^2 E^{-2}\sigma_t^{-1} f_1^4(\varepsilon_1)[1 + N_2(1 - R)^4][(a_1 + b_1 + b_2)^4 - F_{\mathrm{th}}^4], \\ &R = 2(b_1 + b_2)(a_1 + b_1 + b_2)^{-1}. \end{aligned} \tag{19}$$

Тоді, інтегруючи (16) з врахуванням (17)–(19), для визначення критичної величини $N_1 = N_1^*$ отримаємо

$$\begin{aligned} &N_1^* = \frac{\sigma_t E N_2^*(a_1 + b_1 + b_2)^{-2}}{4\alpha_0\pi[1 + N_2(1 - R)^4]}, \qquad N_2^* = \int\limits_{\varepsilon_{10}}^{\varepsilon_{1*}} \frac{(\varepsilon_{1*} - \varepsilon_1)\, d\varepsilon_1}{\varepsilon_1^2 f_1^2(\varepsilon_1)(1 - \lambda_{\mathrm{th}}^4)}, \\ &\varepsilon_{10} = l_0 h^{-1}, \qquad \varepsilon_{1*} = l_* h^{-1}, \qquad \lambda_{\mathrm{th}} = F_{\mathrm{th}}(a_1 + b_1 + b_2)^{-1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Як і раніше, для числового аналізу співвідношення (20) приймемо $R = 0{,}9$, $F_{\mathrm{th}} \approx 0$, $\varepsilon_{10} = 0{,}1$, $\varepsilon_{1*} = 0{,}9$, $0{,}25\alpha_0^{-1}\pi^{-1}\sigma_t E(a_1 + b_1 + b_2)^{-2} = 10^6$. Тоді, обчислюючи інтеграл (20), знаходимо кількість блоків навантаження $N_1 = N_1^*$, після досягнення якого тріщини будуть мати критичну довжину $l = l_*$ і пластина зруйнується. На рис. 3 побудована графічна залежність $N_1^* \sim N_2$. Як видно із рис. 3, збільшення частоти вібрації N_2 знижує довговічність пластини.

Таким чином, за допомогою сформульованої розрахункової моделі досліджено вплив структури і форми блоків навантаження на залишковий ресурс пластини. При цьому показано, що неврахування форми і структури блоків навантаження може призвести до значних похибок в бік завищення залишкового ресурсу і, таким чином, небезпеки непередбачуваного руйнування тонкостінних елементів конструкцій.

1. *Schijve S.* Fatigue of Structures and Materials in the State of the Art // Proc. of the ECF14. – 2002. – **3**. – P. 211–262.

2. *Романив О. Н., Ярема С. Я., Никифорчин Г. Н. и др.* Усталость и циклическая трещиностойкость конструкционных материалов // Механика разрушения и прочность материалов. – Киев: Наук. думка, 1988. – 1990. – 680 с.
3. *Труфяков В. И., Ковальчук В. С.* Определение долговечности при двухчастотном нагружении (Обзор) // Пробл. прочности. – 1982. – № 9. – С. 9–15; № 10. – С. 15–20.
4. *Филатов М. Я.* Сопротивление усталости при сложной форме цикла изменения напряжений (Обзор) // Завод. лаборат. – 1968. – **34**, № 3. – С. 331–336.
5. *Андрейків О. Є., Іваницький Я. Л., Терлецька З. О., Кіт М. Б.* Оцінка довговічності труби нафтопроводу з поверхневою тріщиною під двовісним блочним навантаженням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – № 3. – С. 103–108.
6. *Андрейків О. Є., Кіт М. Б.* Залишкова довговічність тонкостінних елементів конструкцій під двовісним навантаженням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – № 1. – С. 11–16.
7. *Андрейкив А. Е.* Пространственные задачи теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1982. – 345 с.
8. *Андрейкив А. Е., Сас Н. Б.* Диаграммы предельных напряжений для пластин с трещинами высокотемпературной ползучести // IV междунар. симпозиум механики разрушения материалов и конструкций. – Польша, 30 мая – 2 июня 2007. – С. 15–18.

Львівський національний університет ім. Івана Франка *Надійшло до редакції 18.04.2011*

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Андрейкив, С. В. Хыль, Ю. Я. Матвиив**

Расчетная модель для определения периода докритического роста трещин в пластинах при блочной нагрузке

Разработан метод для определения остаточного ресурса тонкостенных элементов конструкций с трещинами при блочной нагрузке. Исследовано влияние формы и структуры блоков нагрузки на остаточную долговечность пластины.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **O. Ye. Andreikiv, S. V. Khyl, Yu. Ya. Matviyiv**

A calculation model for the determination of subcritical crack growth periods in plates under block loading

A method is developed for the determination of a residual resource of the construction thin-walled elements with cracks under the block loading. The influence of the form and the structure of loading blocks on the residual resource of a plate is investigated.