

Исследование ползучести пластин сложной формы методом R -функций

А. Н. Склепус, Н. Г. Склепус

Национальный технический университет “Харьковский политехнический институт”, Харьков, Украина

На основании вариационного принципа Лагранжа, теории R -функций, метода Рунге в сочетании с методом Рунге-Кутты-Мерсона для интегрирования начальных задач по времени разработан метод расчета на ползучесть и длительную прочность пластинчатых элементов конструкций. Достоверность предложенных структурных формул для решения краевых задач и созданного программного обеспечения обоснована практической сходимостью полученных результатов при увеличении количества координатных функций, повышении точности вычисления элементов матрицы Рунге и точности интегрирования по времени и хорошим их согласованием с известными численными данными. Исследована ползучесть и повреждаемость пластин при изгибе в зависимости от условий закрепления и формы пластины.

Ключевые слова: интегрирование начальных задач, метод расчета, краевые задачи, программное обеспечение.

Многие элементы таких современных энергетических установок, как реакторы, турбогенераторы, теплообменные аппараты, высокотемпературные газовые генераторы и другие, работают в условиях, когда имеет место ползучесть конструкционных материалов. Развиваясь в конструкциях во времени, необратимые деформации ползучести сопровождаются деградацией внутренней структуры материала и накоплением повреждений, которые приводят к разрушению. Актуальные проблемы механики деформированных тел решаются путем создания методов расчета длительной прочности, надежности и долговечности конструкций и тесно связаны с решением задач ползучести. Большинство существующих методов расчета на ползучесть пластин сложной геометрической формы основано на применении дискретных численных методов, например метод конечных элементов, метод конечных разностей и др. Современное развитие теории R -функций позволяет проводить расчеты на ползучесть на основе аналитического представления решений краевых задач в виде структурных формул.

Полагаем, что пластина толщины h произвольной формы Ω находится под действием поперечной нагрузки $q(x_1, x_2, t)$ при постоянной температуре.

Проблема исследования напряженно-деформированного состояния пластин, в частности, при ползучести может быть сформулирована как задача нахождения стационарного значения функционала Лагранжа, заданного на кинематически возможных скоростях перемещений:

$$I = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (D_{11} \dot{w}_{,11}^2 + D_{22} \dot{w}_{,22}^2 + 2D_{33} \dot{w}_{,11} \dot{w}_{,22} + D_{44} \dot{w}_{,12}^2 +$$

$$+ \dot{M}_{11}^c \dot{w}_{,11} + \dot{M}_{22}^c \dot{w}_{,22} + 2\dot{M}_{12}^c \dot{w}_{,12}) dx_1 dx_2 - \int_{\Omega} \dot{q} \dot{w} dx_1 dx_2. \quad (1)$$

В функционале (1) введены следующие обозначения: \dot{w} – скорость прогиба;

$$D_{11} = D_{22} = \int_{(h)} \frac{Ez^2}{(1-\nu^2)} dz; \quad D_{33} = \int_{(h)} \frac{Ez^2 \nu}{(1-\nu^2)} dz; \quad D_{44} = \int_{(h)} \frac{2Ez^2}{(1+\nu)} dz; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{11}^c &= \int_{(h)} \frac{Ez}{(1-\nu^2)} (\dot{p}_{11} + \nu \dot{p}_{22}) dz; & \dot{M}_{22}^c &= \int_{(h)} \frac{Ez}{(1-\nu^2)} (\dot{p}_{22} + \nu \dot{p}_{11}) dz; \\ \dot{M}_{12}^c &= 2 \int_{(h)} Gz \dot{p}_{12} dz, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\dot{p}_{11}, \dot{p}_{22}, \dot{p}_{12}$ – скорости деформаций ползучести; E – модуль упругости; G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона. Точка над символом обозначает производную по времени, запятая в нижнем правом индексе – дифференцирование по соответствующей координате.

Рассмотрим граничные условия для некоторых типов закрепления пластины.

1. Жесткая заделка:

$$\dot{w} = 0; \quad (4)$$

$$\dot{w}_{,n} = 0. \quad (5)$$

2. Шарнирное опирание:

$$\dot{w} = 0; \quad (6)$$

$$(-D_{11} \dot{w}_{,nn} - D_{11} \dot{w}_{,\tau\tau}) = M_{nn}^c, \quad (7)$$

где M_{nn}^c определяется формулой

$$\dot{M}_{nn}^c = \dot{M}_{11}^c n_1^2 + 2\dot{M}_{12}^c n_1 n_2 + \dot{M}_{22}^c n_2^2. \quad (8)$$

Для функционала (1) статические граничные условия являются естественными.

Поскольку функционал (1) сформулирован для скоростей искомых функций, а необходимо найти значения самих функций в произвольный момент времени, в алгоритм решения задачи ползучести кроме процедуры решения краевых задач, сформулированных для скоростей, должна быть включена процедура интегрирования задачи по времени.

Суть предложенного метода состоит в решении систем дифференциальных уравнений с правой частью, получаемой из решения задачи о ста-

онарном значении функционала (1). Для интегрирования по времени используется схема Рунге-Кутты–Мерсона (РКМ) с автоматическим выбором шага [1]. Реализованный в работе метод является модификацией метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности, который позволяет принимать решение об изменении шага интегрирования в зависимости от получаемой погрешности.

Предположим, что в начальный момент времени присутствуют только упругие деформации. Тогда начальные условия для искомых функций в момент времени $t=0$ находятся из решения линейной задачи упругого деформирования пластины.

Краевые задачи в начальный момент времени и на каждом временном шаге решаются вариационно-структурным методом.

Конструктивные возможности теории R -функций позволяют построить структуру решения краевой задачи [2] в виде формулы

$$u = B(\Phi, \omega_i, \varphi_j), \quad (9)$$

где Φ – неопределенная компонента структуры; функции ω_i относятся к описанию участков границ области $\partial\Omega_i$, на которых сформулированы краевые условия задачи; φ_j – известные нагружающие функции, задаваемые при постановке задачи. Структура решения точно удовлетворяет краевым условиям задачи независимо от выбора неопределенной компоненты Φ . При дискретизации функционала неопределенная компонента структуры решения Φ выбирается в виде степенного полинома

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_{k,l=0}^N C_{kl} x_1^k x_2^l. \quad (10)$$

Таким образом, исходная задача сводится к нахождению неопределенных коэффициентов C_{kl} . Для этого авторы применяют метод Ритца.

Чтобы протестировать предложенный метод, рассмотрим задачу об изгибе жестко защемленной квадратной пластины со стороной $a = 8 \cdot 10^{-2}$ м, толщиной $h = 3 \cdot 10^{-3}$ м под действием постоянной поперечной равномерно распределенной нагрузки $q = 0,3$ МПа, которая была комплексно исследована методом Власова–Канторовича [3]. Определяющие уравнения ползучести и повреждаемости имеют вид

$$\dot{\rho}_{kl} = \frac{3}{2} A \sigma_i^{n-1} \frac{S_{kl}}{(1-d^r)^m}; \quad \dot{d} = B \frac{\sigma_i^\chi}{(1-d^r)^\phi}, \quad (11)$$

где $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} S_{kl} S_{kl}}$ – интенсивность напряжений; $S_{kl} = \sigma_{kl} - \frac{1}{3}(\sigma_{mm})\delta_{kl}$ – компоненты девиатора напряжений; $A, B, n, m, \chi, \phi, r$ – параметры материала.

Для алюминиевого сплава Д16АТ при температуре 300°С установлены следующие параметры: $A = 0,335 \cdot 10^{-7}$ МПа⁻ⁿ/ч; $B = 1,9 \cdot 10^{-7}$ МПа^{-m}/ч; $n = m = \chi = \phi = 3$; $r = 1,4$. Упругие постоянные: $E = 65$ ГПа, $\nu = 0,3$.

Один из основных вопросов, возникающих при применении теории R -функций для решения различных краевых задач, связан с необходимостью построения структур решения. Структура решения, удовлетворяющая условиям (4), (5), имеет вид

$$\dot{w} = \omega^2 \Phi. \quad (12)$$

В таблице для двух моментов времени t приведены данные для прогиба и изгибающих моментов посередине жестко заземленной стороны пластины и в центре в зависимости от количества координатных функций в структурной формуле (12). Количество координатных функций 10 соответствует степени полинома $N = 6$, 15 – $N = 8$, 21 – $N = 10$. При вычислении коэффициентов матриц Рунге число узлов интегрирования во всех случаях равнялось 196.

Данные о стабилизации решений при разном количестве координатных функций

Количество координатных функций	t , ч	$w/h \cdot 10^2$	$M_{11}^{\max} \cdot 10^5$, Н·м	$M_{11}^c \cdot 10^5$, Н·м
10	0	3,225	-9,856	5,008
	50	93,300	-4,502	3,452
15	0	3,226	-9,929	5,172
	50	101,400	-4,528	3,407
21	0	3,226	-9,933	5,165
	50	101,800	-4,496	3,411

Анализ данных таблицы свидетельствует о хорошей сходимости приближенных решений. Кроме того, на рис. 1 показан рост максимальных прогибов во времени в центре пластины и изменение во времени изгибающих моментов посередине жестко закрепленной стороны (кривые 1) и в центре пластины (кривые 2). Данные, полученные методом Власова–Канторовича и методом R -функций свидетельствуют о достаточно хорошем их соответствии.

Рассмотрим пластину размера $a \times a$, выполненную из титана (IM1834) [4]. Характер нагрузки показан на рис. 2, причем $a_1 = 0,2a$, величина равномерной поперечной нагрузки $q = 100$ МПа. В данном примере исследуется влияние способа закрепления пластины на ползучесть. Рассматриваются два варианта закрепления:

- 1) пластина жестко закреплена на круговых и шарнирно оперта на прямых гранях;
- 2) пластина жестко заземлена на прямых и шарнирно оперта на круговых гранях.

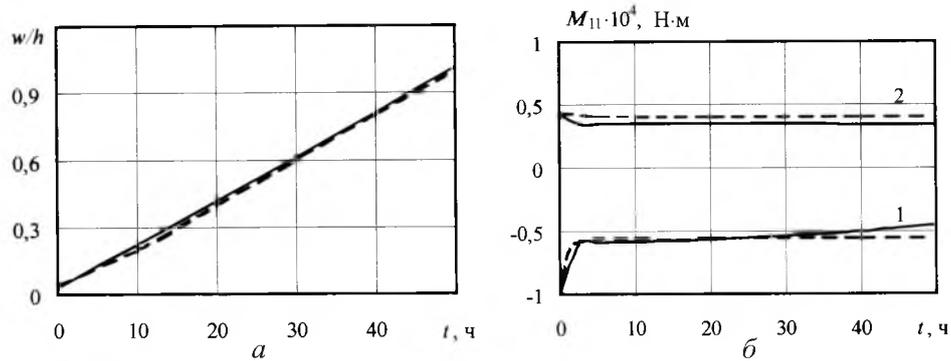


Рис. 1. Рост максимальных прогибов во времени (а) и зависимость изгибающих моментов от времени (б) в квадратной пластине. (Сплошные линии – метод R -функций, штриховые – метод Власова–Канторовича.)

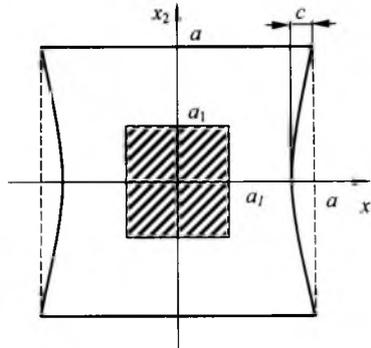


Рис. 2. Пластина сложной формы под действием локально распределенной нагрузки (заштрихованная площадка).

Определяющие соотношения для титана при температуре 650°C следующие [4]:

$$\dot{p}_{kl} = \frac{3}{2} A \sigma_i^{n-1} \frac{S_{kl}}{(1-d)^n}, \quad \dot{d} = \frac{B \sigma_i^m}{(1-d)^\phi}, \quad (13)$$

где $A = 5,623 \cdot 10^{-18}$ МПа $^{-n}$ /ч; $n = 5,911$; $B = 1,921 \cdot 10^{-16}$ МПа $^{-m}$ /ч; $m = 5,416$; $\phi = 4,8$; $\alpha = 0$; $E = 89,5$ ГПа; $\nu = 0,3$.

Для моделирования применена R -функция ω , приведенная к параметрическому виду заданием значений a и c (рис. 2):

$$\omega(x_1, x_2) = \omega_1 \wedge_0 \omega_2 \wedge_0 \omega_3, \quad (14)$$

где \wedge_0 – операция R -конъюнкция [2]:

$$f_1 \wedge_0 f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2}; \quad \omega_1 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_2^2);$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2r}((x_1 + d_1)^2 + x_2^2 - r^2); \quad \omega_3 = \frac{1}{2r}((x_1 - d_1)^2 + x_2^2 - r^2);$$

$$r = \frac{1}{2c}(c^2 + a^2); \quad d_1 = a + r - c.$$

В расчетах принимаем $a = 0,04$ м; $c = 0,002$ м; толщина $h = 0,01$ м.

Для данной задачи использовалась структурная формула, удовлетворяющая главным граничным условиям (4)–(6):

$$\dot{w} = \omega_{10}^2 \omega_{20} \Phi,$$

где $\omega_{10} = 0$ – уравнение жестко заземленной границы пластины; $\omega_{20} = 0$ – уравнение шарнирно опертого участка границы.

Для закрепления пластин 1 и 2 (рис. 3) соответственно имеем

$$\omega_{10} = \omega_2 \wedge_0 \omega_3, \quad \omega_{20} = \omega_1;$$

$$\omega_{10} = \omega_1, \quad \omega_{20} = \omega_2 \wedge_0 \omega_3.$$

Результаты получены с использованием 21 координатной функции в формуле (15), количество узлов интегрирования по области равнялось 256, по толщине – 8.

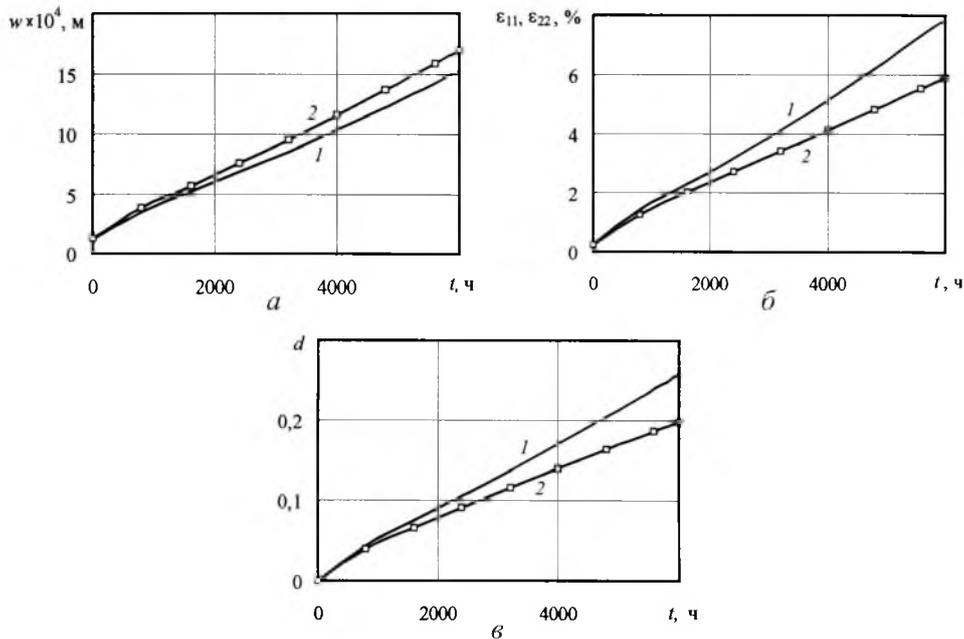


Рис. 3. Рост максимальных прогибов (а), деформаций (б) и повреждаемости (в) в пластинах сложной формы: 1 – пластина 1; 2 – пластина 2.

На рис. 3 представлены результаты расчетов пластин 1 и 2. Из рис. 3,а видно, что пластина 1 является более жесткой конструкцией, чем пластина 2. Анализ результатов расчетов ползучести пластин показал, что деформации и повреждаемость максимальны на поверхности пластин в центре заделки.

Рост деформаций ε_{11} в центре заделки пластины 1 и ε_{22} в центре заделки пластины 2 иллюстрирует рис. 3,б. На рис. 3,в показан рост повреждаемости в соответствующих точках. Сравнение данных, приведенных на рис. 3,б,в, свидетельствует, что в пластине 1 на жестко заземленных круговых гранях деформации и повреждаемость увеличиваются быстрее, чем в пластине 2 на жестко заземленных прямых гранях. Результаты исследования указывают на то, что пластина 1, которая с течением времени становится более жесткой, чем пластина 2, разрушается быстрее.

Метод исследования ползучести пластин реализован в виде комплекса программ на языке C++ и опробован при решении конкретных примеров. Данная методика обладает значительной универсальностью, точностью и позволяет исследовать ползучесть пластин сложной формы.

Резюме

На основе вариационного принципу Лагранжа, теории R -функций, методу Ритца в поєднанні з методом Рунге-Кутта-Мерсона для інтегрування початкових задач за часом розроблено метод розрахунку на повзучість і тривалу міцність пластинчастих елементів конструкцій. Вірогідність запропонованих структурних формул для розв'язання крайових задач і створеного програмного комплексу обґрунтована практичною збіжністю отриманих результатів при збільшенні кількості координатних функцій, підвищенні точності обчислення елементів матриці Рітца і точності інтегрування за часом та добрим їх узгодженням із відомими числовими даними. Досліджено повзучість і пошкоджуваність пластин при згині в залежності від умов закріплення та форми пластин.

1. *Золочевский А. А., Морачковский О. К.* Исследование ползучести тонкостенных оболочек при нестационарном нагружении // Прикл. механика. – 1982. – **17**, № 9. – С. 47 – 50.
2. *Рвачев В. Л., Курна Л. В., Склепус Н. Г., Учишвили Л. Б.* Метод R -функции в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы // Киев: Наук. думка, 1973. – 123 с.
3. *Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., and Sychov A.* Geometrically nonlinear bending of thin-walled shells and plates under creep-damage conditions // Arch. Appl. Mech. – 1997. – **67**. – P. 339 – 352.
4. *Hyde T. H., Xia L., and Becker A. A.* Prediction of creep failure in aeroengine materials under multi-axial stress states // Int. J. Mech. Sci. – 1996. – **38**, No. 4. – P. 385 – 403.

Поступила 12. 06. 2003