

Вариант теории упрочнения, учитывающий зависимость параметров уравнений состояния от напряжения и температуры

Н. К. Кучер

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Предложена методика конкретизации определяющих соотношений теории упрочнения, учитывающей поврежденность материала. Предполагается, что параметры уравнения ползучести и эволюционного соотношения поврежденности являются функциями напряжения и температуры. Эффективность подхода проиллюстрирована при описании кривых ползучести сталей 20Х13 и ЭП44 в достаточно широком диапазоне изменения напряжений.

Ключевые слова: процессы ползучести, определяющие уравнения, модель длительного разрушения, поврежденность материала.

Введение. Одна из наиболее актуальных проблем современной техники – деформирование и разрушение материалов при длительном воздействии нагрузок в условиях высоких температур. При таких режимах нагружения в конструкциях наблюдаются явления статической и циклической ползучести, а также могут иметь место релаксация напряжений и старение материала, малоцикловая и многоцикловая усталость. Кроме того, значительно усиливается воздействие скорости нагружения на распределение напряжений в пространстве и времени, прогрессирует деградация структуры материала и т.д.

В настоящее время накоплен большой объем экспериментальных данных о высокотемпературном деформировании и разрушении материалов. В [1–17] представлено феноменологическое описание указанных явлений с использованием широкого класса материалов и режимов нагружения. Полученные экспериментальные данные способствовали более глубокому пониманию процессов деформирования в конструкциях, позволили обнаружить особенности деформирования материалов при повышенных температурах, а также объяснить многие новые эффекты. Они являются исходной информацией для построения определяющих уравнений неупругих сред и моделей длительного разрушения.

Развитие механики деформируемого твердого тела происходит по пути постепенного усложнения и уточнения определяющих соотношений по мере накопления экспериментальных данных.

Основные гипотезы и предположения. Реакция среды на внешнее воздействие задается соответствующими уравнениями состояния. Структура таких уравнений определяется из анализа экспериментальных данных. Результаты многочисленных экспериментов свидетельствуют, что для описания высокотемпературных процессов ползучести справедлива гипотеза о механическом состоянии твердого тела [1, 13]. Согласно последней скорость ползучести $\dot{\varepsilon}^c$ в любой момент времени t при постоянной температуре T определяется мгновенными значениями напряжения σ и деформации ε^c , а

предыстория изменения этих параметров не оказывает влияния на процесс деформирования. В действительности на изменение скорости деформации оказывают влияние истории напряжений и температуры, что учитывается в уравнениях состояния набором некоторых внутренних (скрытые, обобщенные) параметров q_i . Тогда определяющее уравнение ползучести записывается в виде

$$F(\sigma, \varepsilon^c, \dot{\varepsilon}^c, T, q_i) = 0 \quad (i=1, 2, \dots). \quad (1)$$

Для каждой внутренней переменной q_i определяется соответствующее эволюционное уравнение. В качестве внутренних переменных могут использоваться соотношения между скоростями ползучести на установившемся и ускоренном участках, изменения деформации упругой разгрузки или мгновенного модуля ползучести, а также различные физические параметры среды (микротвердость, состояние поверхности, электрические или оптические характеристики и т.п.).

В качестве внутренней переменной для задач ползучести наибольшее распространение получил параметр поврежденности ω . Величина поврежденности ω (точнее ее дополнительная часть $1-\omega$) впервые была введена Л. М. Качановым и названа сплошностью среды [18]. Полагают, что функция поврежденности ω принимает значения в диапазоне $[0, 1]$. Для исходного неповрежденного материала она равна нулю, в момент разрушения – единице. В этом случае уравнения состояния задаются системой уравнений

$$\dot{\varepsilon}^c = f_1(\sigma, \varepsilon^c, T, \omega), \quad (2)$$

$$\dot{\omega} = f_2(\sigma, \varepsilon^c, T, \omega), \quad (3)$$

где функция f_1 конкретизируется по результатам испытаний образцов на ползучесть при $\sigma = \text{const}$, f_2 – по кривым длительной прочности материала.

Возможность использования скалярного параметра ω вытекает из гипотезы об изотропном изменении свойств повреждающейся среды. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что для оценки поврежденности должны привлекаться векторные или тензорные меры [13, 14, 19]. Тем не менее такой параметр широко используется в инженерных расчетах, что позволяет точнее и более полно описывать высокотемпературные процессы деформирования и разрушения.

Наиболее известные варианты уравнений поврежденности предложены в работах [1, 10, 14–18, 20]. Такие эволюционные уравнения можно обобщить следующим образом:

$$\frac{d\omega}{dt} = D \frac{\sigma^k}{(1-\omega^r)^k} \frac{\omega^\beta}{(1-\omega)^q}, \quad (4)$$

где D, k, r, q, β – некоторые постоянные величины, определяемые экспериментально.

Полагая в (4) $r = 1$, $q = \beta = 0$, получаем уравнение Качанова, $r = 1$, $q = 0$ – уравнение Работнова, $r = 1$, $\beta = 0$ – соотношение Леметра и Пламтри, $q = \beta = 0$ – уравнение Шестерикова. Отличительной особенностью рассматриваемых эволюционных уравнений является постоянство используемых параметров для всего диапазона напряжений при изотермических условиях нагружения. Модели с такими уравнениями поврежденности описывают деформирование и разрушение материалов на основе гипотезы о линейном суммировании повреждений, что несколько сужает область их применимости.

Возможности эволюционных уравнений, которые содержат три и более параметров, могут быть расширены при предположении зависимости одного из них от напряжения. Такие исследования выполнены в [7] при использовании энергетического критерия длительного рассеянного разрушения.

Согласно теории упрочнения в качестве соотношения (2) может быть принято выражение

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = B \left(\frac{\sigma}{1 - \omega} \right)^n (\varepsilon^c)^{-\alpha} \exp(\delta \varepsilon^c), \quad (5)$$

где B , n , α , δ – некоторые постоянные характеристики материала, определяемые из аппроксимации кривых ползучести.

Подход, использующий представления (4), (5), позволяет описать высокотемпературную ползучесть многих материалов, благодаря чему рекомендован для внедрения в инженерную практику [10, 12]. Однако, как показывают исследования, существует обширный класс материалов, для которых указанный подход либо приводит к значительным погрешностям, либо эффективен в достаточно узком диапазоне напряжений. Полученное решение должно рассматриваться как первое приближение при решении задач ползучести для изотермических режимов нагружения. В общем случае трудно предположить, что четыре постоянных параметра в соотношении (5), определенные из аппроксимации одной кривой ползучести, позволят описать с достаточной степенью точности весь “веер” кривых ползучести. Аналогичное замечание можно сделать также относительно уравнений поврежденности (4). Данные многочисленных испытаний [1–5, 21] свидетельствуют, что при аппроксимации зависимостей длительной прочности для достаточно широкого диапазона напряжений нельзя ограничиться только одной линейной аппроксимацией.

Учитывая вышеизложенное, высокотемпературные процессы ползучести предлагается описывать с помощью варианта теории упрочнения (4), (5), постулируя зависимость всех используемых параметров от напряжения и температуры. Значения этих параметров для фиксированного напряжения должны определяться из каждой кривой ползучести. Выбор уравнения поврежденности определяет, являются ли эти параметры функциями или функциями напряжения и температуры.

Методика конкретизации определяющих соотношений. Для описания зависимостей длительной прочности материалов воспользуемся уравнением поврежденности Леметра и Пламтри [20]:

$$\frac{d\omega}{dt} = D \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^k \frac{1}{(1-\omega)^q} = D \frac{\sigma^k}{(1-\omega)^s}, \quad (6)$$

где $s = k + q$.

Ограничиваясь рассмотрением только изотермических процессов, заметим, что $D = D(\sigma)$, $k = k(\sigma)$, $q = q(\sigma)$. При постоянном напряжении соотношение (6) интегрируется в квадратурах, и его решение имеет вид

$$\omega(t) = 1 - [1 - (1+s)D\sigma^k t]^{1/(1+s)}. \quad (7)$$

В момент разрушения $t = t_R$ функция поврежденности равна единице, откуда следует

$$t_R = \frac{1}{(1+s)D\sigma^k}. \quad (8)$$

Логарифмируя последнее соотношение, получаем уравнение длительной прочности в логарифмической системе координат:

$$-\ln(t_R) = k \ln(\sigma) + \ln(1+s)D. \quad (9)$$

Как отмечалось в [1], для всех известных материалов последнее слагаемое в (9) зависит только от температуры и не зависит от напряжения, что облегчает определение параметров уравнений состояния. Следовательно, произведение $(1+s)D$ является постоянной величиной при изотермических процессах деформирования. Полагая, что параметр k является линейной функцией от логарифма напряжения, получаем

$$\ln(t_R) = a_1(\ln \sigma)^2 + a_2 \ln \sigma + a_3, \quad (10)$$

где a_1, a_2, a_3 – постоянные параметры материала.

Соотношение (10) позволяет более точно аппроксимировать зависимости длительной прочности материалов. Для этой цели могут быть использованы также аппроксимации в форме сглаживающих кубических сплайнов [22].

Главный критерий при выборе аппроксимирующей функции – минимальное значение суммы квадратов отклонений.

Значение функции $q(\sigma)$ может быть вычислено с помощью энергетического критерия длительного рассеянного разрушения [7], который записывается в виде

$$\int_0^1 \omega(\tau) d\tau \int_0^{\varepsilon_B} \varphi_0(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{\varepsilon_\sigma}^{\varepsilon_B} [\varphi_0(\varepsilon) - \sigma] d\varepsilon, \quad (11)$$

где $\varphi_0(\varepsilon)$ определяет мгновенную диаграмму деформирования; $\varepsilon_B, \varepsilon_\sigma$ – деформации, соответствующие пределу прочности материала и заданному

значению напряжения σ на диаграмме мгновенного деформирования; $\tau = t/t_R$ – безразмерное время.

Решение соотношения (11) определяется выражением [7]

$$q(\sigma) = \frac{\int_0^{\varepsilon_n} \varphi_0(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_n} [\varphi_0(\varepsilon) d\varepsilon - \sigma] d\varepsilon} - [2 + k(\sigma)]. \quad (12)$$

Таким образом, экспериментальные зависимости длительной прочности материала и критерий длительного рассеянного разрушения позволяют полностью определить все параметры функции поврежденности ω .

Проанализируем возможности уравнения (5) при описании неустановившихся участков кривой ползучести, когда $\varepsilon^c \ll 1$. Заметим, что $B = B(\sigma)$, $n = n(\sigma)$, $\alpha = \alpha(\sigma)$, $\delta = \delta(\sigma)$. Подставляя соотношение $\exp(\delta\varepsilon^c) \approx 1 + \delta\varepsilon^c$ в (5) и ограничиваясь при этом величинами первого порядка малости, получаем

$$\varepsilon^c \approx [B(1 + \alpha)\sigma^n t]^{1/(1+\alpha)}. \quad (13)$$

После логарифмирования имеем

$$\lg(\varepsilon^c) \approx \frac{1}{1+\alpha} [\lg(t) + \lg[(1 + \alpha)B\sigma^n]]. \quad (14)$$

Из соотношения (14) следует, что, рассматривая зависимость деформации ε^c от времени t в логарифмической системе координат для начального участка каждой кривой ползучести, можно определить величины $\alpha(\sigma)$ и $B(\sigma)\sigma^n$. Для вычисления остальных параметров можно воспользоваться численным методом последовательных приближений [10, 23], однако авторы поступили несколько иначе.

Как известно [16], полученные из экспериментов кривые ползучести с достаточной степенью точности могут быть аппроксимированы с помощью сглаживающих кубических сплайнов. При этом легко могут быть вычислены также производные функций, т.е. $\dot{\varepsilon}^c$ в любой точке кривой ползучести.

Минимизируя сумму квадратов отклонений в реперных точках, согласно методу наименьших квадратов получаем систему двух нелинейных уравнений, которые и определяют искомые параметры. Пусть ε_i^c , $\dot{\varepsilon}_i^c$ – деформация и скорость деформации в реперных точках экспериментальной кривой ползучести,

$$S = \sum_{i=1}^p \left[\dot{\varepsilon}_i^c - B \left(\frac{\sigma}{1 - \omega_i} \right)^n (\varepsilon_i^c)^{-\alpha} \exp(\delta\varepsilon_i^c) \right]^2 - \quad (15)$$

сумма среднеквадратичных отклонений, p – количество реперных точек. Вычисляя частные производные по параметрам n и δ и приравнявая их к нулю, получаем

$$\sum_{i=1}^p \left[\dot{\varepsilon}_i^c - B \left(\frac{\sigma}{1 - \omega_i} \right)^n (\varepsilon_i^c)^{-\alpha} \exp(\delta \varepsilon_i^c) \right] \frac{(\varepsilon_i^c)^{1-\alpha} \exp(\delta \varepsilon_i^c)}{(1 - \omega_i)^n} = 0; \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^p \left[\dot{\varepsilon}_i^c - B \left(\frac{\sigma}{1 - \omega_i} \right)^n (\varepsilon_i^c)^{-\alpha} \exp(\delta \varepsilon_i^c) \right] \frac{\ln(1 - \omega_i)}{(1 - \omega_i)^n} (\varepsilon_i^c)^{-\alpha} \exp(\delta \varepsilon_i^c) = 0. \quad (17)$$

При этом учитываем, что значение $B\sigma^n$ является постоянным и определено из анализа начального участка кривой ползучести. Разрешая уравнения (16), (17), находим величины $n(\sigma)$ и $\delta(\sigma)$.

Таким образом, с помощью вышеизложенной методики можно определить все значения параметров эволюционного уравнения (6) и соотношения ползучести (5) для некоторых фиксированных напряжений. Аппроксимируя полученные зависимости посредством сглаживающих сплайнов, находим все функции, входящие в определяющее уравнение.

Данный подход легко может быть использован для конкретизации уравнений состояния при неизотермическом нагружении. В этом случае определяются значения параметров уравнений состояния для некоторых фиксированных значений температуры из исследуемого диапазона, которые аппроксимируются путем сглаживающей сплайновой аппроксимации поверхностей [22].

Соответствие уравнений состояния экспериментальным данным. Для иллюстрации применимости предложенных определяющих уравнений к описанию деформирования материалов использовались результаты испытаний на ползучесть до разрушения сталей 20X13 [10] и ЭП44 [6].

На рис. 1, 2 приведены результаты расчетов кривых ползучести на основании соотношений (5), (6). Там же точками нанесены экспериментальные значения деформаций ползучести. Ввиду отсутствия информации о мгновенных кривых деформирования сталей 20X13 и ЭП44 в расчетах использовалась модель, для которой $q = 1$. Результаты расчетов при использовании упрощенной модели с постоянными характеристиками уравнения состояния показаны на рис. 1, 2 штриховыми линиями.

На рис. 2 приведены результаты расчетов кривых ползучести стали ЭП44 при температуре 595°C для значительно больших долговечностей, чем для стали 20X13. Аппроксимацию зависимостей длительной прочности указанных сталей иллюстрирует рис. 3. Как видно, нелинейная зависимость $\ln(t_R)$ от $\ln \sigma$ достаточно хорошо описывается квадратичной функцией. При этом необходимо рассматривать данную аппроксимацию только в пределах исследуемого диапазона напряжений или при незначительном выходе за его пределы.

Выполненные расчеты показывают, что настоящий подход позволяет более точно описывать механическое поведение исследуемых материалов при высокотемпературной ползучести и прогнозировать их долговечность.

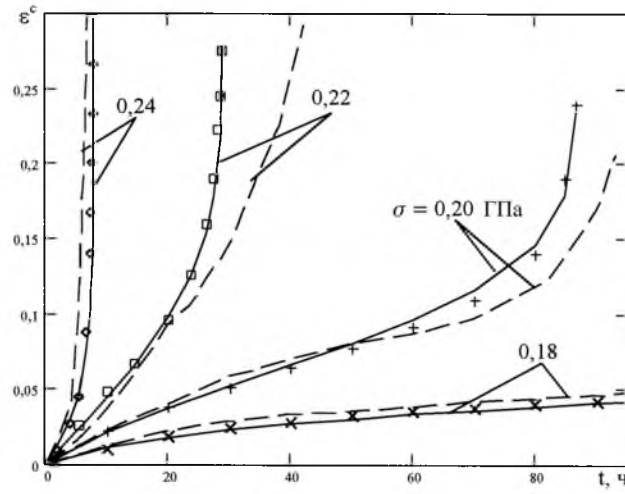


Рис. 1. Экспериментальные (точки) и расчетные (сплошные и штриховые линии) кривые ползучести стали 20X13 при температуре 600°C.

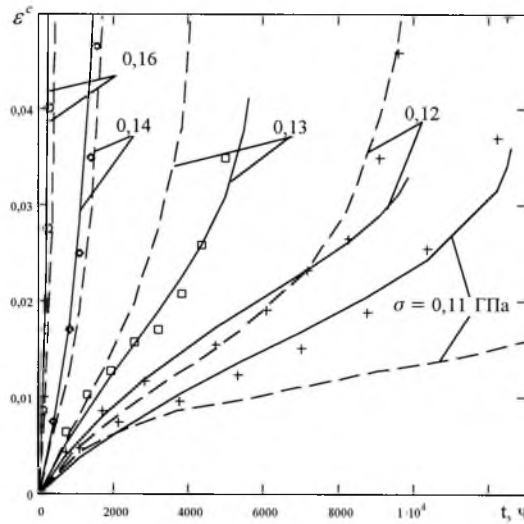


Рис. 2. Экспериментальные (точки) и расчетные (сплошные и штриховые линии) кривые ползучести стали ЭП44 при температуре 595°C.

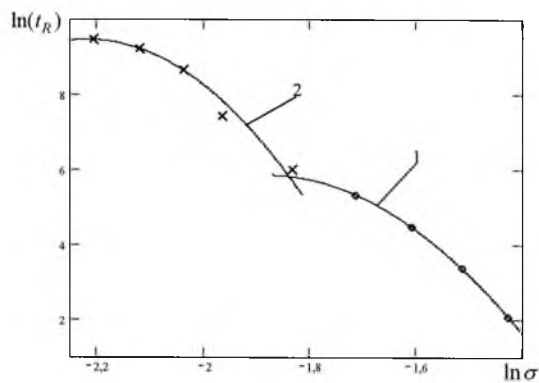


Рис. 3. Аппроксимация зависимостей длительной прочности сталей 20X13 (1) и ЭП44 (2).

Для аппроксимации зависимостей параметров $\alpha(\sigma)$, $B(\sigma)$, $n(\sigma)$, $\delta(\sigma)$ от напряжений использовались сглаживающие кубические сплайны [22].

Заключение. Предложенный вариант теории упрочнения, учитывающий зависимость параметров уравнений состояния от напряжения и температуры, позволяет описать деформирование наиболее широкого класса материалов. Он одинаково эффективен при анализе процессов деформирования как при кратковременной, так и длительной ползучести. Использование функции поврежденности с такими характеристиками дает возможность с необходимой степенью точности аппроксимировать нелинейные соотношения длительной прочности материалов. Гипотеза о зависимости параметров эволюционных уравнений от напряжения автоматически переводит рассматриваемую модель в более общий класс нелинейных моделей накопления повреждений, что существенно расширяет область их использования. С помощью предложенной методики конкретизации определяющих соотношений можно оценить области применимости других, более простых моделей деформированного твердого тела, когда один или несколько параметров являются константами материала. Кроме того, она может легко использоваться при анализе неизотермических процессов деформирования.

Резюме

Запропоновано методику конкретизації визначальних співвідношень теорії зміцнення, яка враховує пошкоджувальність матеріалу. Припускається, що параметри рівняння повзучості й еволюційного співвідношення пошкоджуваності є функціями напруження і температури. Ефективність підходу проілюстровано при опису кривих повзучості сталей 20Х13 і ЕП44 в достатньо широкому діапазоні зміни напружень.

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
2. *Работнов Ю. Н., Милейко С. Т.* Кратковременная ползучесть. – М.: Наука, 1970. – 222 с.
3. *Писаренко Г. С., Руденко В. П., Третьяченко Г. П., Троценко В. Т.* Прочность материалов при высоких температурах. – Киев: Наук. думка, 1966. – 795 с.
4. *Прочность материалов и элементов конструкций в экстремальных условиях: В 2 т. / Под ред. Г. С. Писаренко.* – Киев: Наук. думка, 1980. – Т. 1. – 536 с; Т. 2. – 771 с.
5. *Гольденблат И. И., Бажанов В. Л., Копнов В. А.* Длительная прочность в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1977. – 248 с.
6. *Лепин Г. Ф.* Ползучесть материалов и критерии жаропрочности. – М.: Металлургия, 1976. – 344 с.
7. *Годуб В. П., Погребняк А. Д.* Высокотемпературное разрушение материалов при циклическом нагружении. – Киев: Наук. думка, 1994. – 228 с.
8. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: Мир, 1969. – Т. 2. – 864 с.

9. *Миллер К.* Ползучесть и разрушение: Пер. с англ. – М.: Металлургия, 1986. – 120 с.
10. *Закономерности ползучести и длительной прочности.* Справочник / Под. общ. ред. С. А. Шестерикова. – М.: Машиностроение, 1983. – 102 с.
11. *Либерман Л. Я., Пейсихис М. И.* Свойства сталей и сплавов, применяемых в котлотурбостроении: В 3 ч. – Л.: ЦКТИ, 1966. – Вып. 16. – 643 с.
12. *Трощенко В. Т., Красовский А. Я., Покровский В. В. и др.* Сопротивление материалов деформированию и разрушению. Справ. пособие: В 2 ч. / Отв. ред. В. Т. Трощенко. – Киев: Наук. думка, 1993. – 992 с.
13. *Работнов Ю. Н.* Теория ползучести. Механика в СССР за 50 лет. В 3 т. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1972. – С. 119 – 154.
14. *Шестериков С. А., Локощенко А. М.* Ползучесть и длительная прочность металлов // Итоги науки и техники. Сер.: Механика деформируемого твердого тела. – М.: ВИНТИ, 1980. – Т. 13. – С. 3 – 104.
15. *Hult J.* Creep in continue and structures. Top. Appl. Continuum Mech. – Wien; New York, 1974. – P. 137 – 155.
16. *Голуб В. П.* Экспериментальное исследование высокотемпературных процессов ползучести, усталости и поврежденности. I. Методы исследований // Прикл. механика. – 2001. – 37, № 4. – С. 3 – 38.
17. *Голуб В. П.* Экспериментальное исследование высокотемпературных процессов ползучести, усталости и поврежденности. II. Основные закономерности // Там же. – № 5. – С. 3 – 43.
18. *Качанов Л. М.* О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. – 1958. – № 8. – С. 26 – 31.
19. *Новожилов В. В.* О пластическом разрыхлении // Прикл. механика и математика. – 1965. – 29, вып. 4. – С. 681 – 689.
20. *Леметр Дж., Пламтри А.* Применение понятия поврежденности для расчета разрушения в условиях одновременной усталости и ползучести // Теорет. основы инж. расчетов. – 1971. – 101, № 3. – С. 124 – 134.
21. *Ковпак В. И.* Прогнозирование жаропрочности металлических материалов. – Киев: Наук. думка, 1981. – 240 с.
22. *Дьяконов В. П.* MATLAB 6/6.1/6.5+Simulink 4/5 в математике и моделировании. Полное руководство пользователя. – М.: СОЛОН, 2003. – 576 с.
23. *Киселевский В. Н., Косов Б. Д.* Уравнения состояния для процесса ползучести упрочняющегося материала // Пробл. прочности. – 1975. – № 4. – С. 8 – 18.

Поступила 15. 03. 2004