

УДК 004.94: 532.59

Р.И. ДЕМЧЕНКО, П.В. ДИКИЙ

**ОБ УРАВНЕНИЯХ ТИПА БУССИНЕСКА ПОЛНОСТЬЮ НЕЛИНЕЙНЫХ И
ОДНОГО ПОРЯДКА ДИСПЕРСИИ: ВЫВОД И СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ**

Abstract: Alternative derivation of Boussinesq-type one-layer and two-layer nonlinear model of $O(\mu^2)$ order (μ is dispersion parameter) written with terms of gradient of velocity potential is presented. The last is being determined on the fluid layers surface defined by free parameters. Both linear dispersion and nonlinear characteristics comparisons for Boussinesq-type models of the order $O(\mu^2)$ written with terms of the velocity vector equal to potential gradient defined on the arbitrary surface of the water layer, and with terms of the average velocity were fulfilled.

Key words: Boussinesq-type model, velocity potential, dispersion, two-layer models, free parameter.

Аноація: У даній роботі наведено альтернативне отримання одношарової та двошарової нелінійної моделі типу Бусінеска порядку $O(\mu^2)$ (μ -параметр дисперсії) у термінах градієнта від заданого потенціалу швидкості на поверхнях шару рідини, що визначається довільними параметрами. Проведено порівняння лінійних дисперсійних та нелінійних характеристик з моделями типу Бусінеска порядку $O(\mu^2)$, записаними у термінах компонент вектора швидкості, що дорівнює градієнту потенціала, який задається на довільних поверхнях шару води, а також у термінах середньої швидкості.

Ключові слова: модель типу Бусінеска, потенціал швидкості, дисперсія, двошарові моделі, вільні параметри.

Аноація: В настоящей работе дан альтернативный вывод однослойной и двухслойной нелинейной модели типа Буссинека порядка $O(\mu^2)$ (μ -параметр дисперсии) в терминах градиента от задаваемого потенциала скорости на поверхностях слоя жидкости, определяемых свободными параметрами. Проведено сравнение линейных дисперсионных и нелинейных характеристик с моделями типа Буссинека порядка $O(\mu^2)$, записанными в терминах компонент вектора скорости, равного градиенту потенциала, заданного на произвольных поверхностях слоя воды, а также в терминах средней скорости.

Ключевые слова: модель типа Буссинека, потенциал скорости, дисперсия, двухслойные модели, свободные параметры.

1. Введение

Уравнения двумерных нелинейно-дисперсионных процессов типа Буссинека за последнее десятилетие стали основным инструментом моделирования трансформации волн в прибрежной зоне моря. Предположение о соотношении между параметрами нелинейности и дисперсии

$\varepsilon = \frac{a}{h_0}, \mu = \frac{h_0}{\lambda_0}$, где h_0, a, λ_0 – соответственно характерные глубина воды, амплитуда и длина

поверхностной волны, отображено в разных формах уравнений типа Буссинека с разным порядком точности относительно обоих параметров. Такие уравнения для $\mu \leq 1$ являются асимптотически эквивалентными, но для более коротких волн характеристики уравнений типа Буссинека имеют значительные отличия [1–3]. Точность этих характеристик, одной из которых есть фазовая скорость, определяющая основные процессы трансформации волны, зависит от точности линейного дисперсионного соотношения [1]. Как отмечено Мадсенем [4], Перегрином в 1967 г. было получено “условное”, осредненное по глубине, уравнение Буссинека с ограниченной областью применения $\Omega(kh): kh < 0,3$, где k – волновое число, h – глубина воды, что связано со слабым описанием дисперсионных процессов. В последнее десятилетие ограничение точности

моделей типа Буссинеска было преодолено для более глубокой воды, основываясь на работах [5] и [6] с предположением о слабо-нелинейном соотношении $\varepsilon = O(\mu^2)$ и соответствующим ограничением для линейных характеристик: $kh < 1,5$ и $kh < 3$. Подход Нвогу [6], где определяется скорость на произвольном сечении слоя воды, использован в работе Вея [7] с сохранением в уравнении типа Буссинеска членов порядка $O(\mu^2)$ и произвольного порядка ε . Согласно [4], в 1953 г. Серре получил альтернативное одномерное уравнение Буссинеска для $h = const$ относительно горизонтальной скорости, осредненной по глубине. Уравнение имеет порядок $O(\mu^2)$ и является полно-нелинейным, т.е. без ограничений на порядок параметра ε . В последующие десятилетия аналогичные уравнения были получены Су и Гарднером [4] для однородной глубины. В одномерном и двухмерном случае для переменной глубины уравнение такого типа представлено в [8, 9]. При этом область моделирования таких уравнений $kh \leq 1,5$.

Уравнения типа Буссинеска с улучшенной линейной дисперсией с помощью повышения порядка производных в уравнении момента движения представлены в работе [4] в терминах средней скорости для $\varepsilon = O(\mu)$, а также скорости, задаваемой на произвольной поверхности слоя жидкости, при сохранении любого порядка параметра ε . В работе [10] метод [4] использован для уравнения типа Серре. Дальнейшее увеличение области глубокой воды для моделей типа Буссинеска проводилось с помощью сохранения старших производных, соответствующих более высокому порядку дисперсии. Так, в [11], отбрасывая слабо-нелинейное предположение и оставляя члены порядка $O(\mu^4)$, была удвоена точность линейной дисперсии до $kh = 6$. В работах [12, 13] при использовании численных аппроксимаций высокого порядка для различных уровней свободной поверхности показано расширение области до $kh < 40$ для линейных и нелинейных характеристик. Линеттом и Лиу [14] была разработана многослойная модель типа Буссинеска порядка $O(\mu^2)$, основанная на подходе Нвогу [6] для каждого слоя воды, определяющегося свободными параметрами. Точность этой модели зависит от количества слоев и может быть расширена до значительных величин kh .

В настоящей работе дан альтернативный работам [14] и [15] вывод однослойной и двухслойной полностью нелинейной модели порядка $O(\mu^2)$, а также проведено сравнение линейных дисперсионных и нелинейных характеристик с полученными ранее в [10, 14–16]. Кроме того, показано взаимно однозначное соответствие между полученной моделью и моделями [14, 15].

2.1. Однослойная модель порядка $O(\mu^2)$ и любого порядка параметра нелинейности ε в терминах градиента от задаваемого потенциала скорости на поверхности сечения $z = z_{\alpha_i}$ слоя жидкости

Пусть плоскость горизонтальных координат xoy совпадает с невозмущенной поверхностью воды, ось z направлена вверх. Запишем уравнения движения и неразрывности Эйлера для идеальной жидкости:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} + w \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) w + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \vec{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Здесь $\vec{u} = (u, v)$, w – соответственно горизонтальные и вертикальная компоненты скорости жидкости, $\rho = const$ – плотность жидкости, p – давление, g – ускорение свободного падения, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$.

Условия на дне $z = -h(x, y, t)$, где h – глубина жидкости, и на свободной поверхности $z = \zeta(x, y, t)$ запишутся в виде

$$h_t + (\vec{u} \nabla) h + w = 0, \quad z = -h, \quad (4)$$

$$\zeta_t + (\vec{u} \nabla) \zeta - w = 0, \quad z = \zeta. \quad (5)$$

Аппроксимация уравнений (1) – (3) с помощью разложения искомых функций по степеням вертикальной координаты z с учетом параметров нелинейности ε и дисперсии μ приводит уравнения Эйлера к уравнениям типа Буссинеска.

Предполагая потенциальность движения жидкости

$$u = \varphi_x, \quad v = \varphi_y, \quad w = \varphi_z, \quad (6)$$

дадим альтернативный вывод однослойной и двухслойной модели типа Буссинеска в терминах скоростей, равных градиенту от задаваемого потенциала скорости $\tilde{u} = \nabla \tilde{\varphi} = \nabla[\varphi(x, y, z_{\alpha_1}, t)]$ на произвольной поверхности слоя жидкости. Покажем взаимно однозначное соответствие таких моделей с моделями, записанными в терминах скоростей $\hat{u} = [\nabla \varphi(x, y, z, t)]_{z=z_{\alpha_1}}$ на этих поверхностях слоя жидкости. Дисперсионные соотношения однослойных моделей в терминах компонент скорости $\hat{u}(x, y, t)$ содержат один свободный параметр α_1 , соответствующий выбору сечения с поверхностью $z = z_{\alpha_1}$ и скорости $\hat{u}(x, y, t)$, через которую в дальнейшем определяются искомые скорости потенциального движения рассматриваемого слоя жидкости. К таким моделям относятся модели [4, 6, 7, 15, 16]. В работе [11] для определения поля скоростей используются два свободных параметра, связанные с поверхностями $z_{\alpha_{11}}, z_{\alpha_{12}}$.

Так как движение жидкости потенциальное, уравнения (1) – (5), с учетом (6), примут следующий вид:

$$\mu^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) + \varphi_{zz} = 0, \quad -h < z < \zeta, \quad (7)$$

$$\frac{\mu^2}{\varepsilon} h_t + \mu^2(\varphi_x h_x + \varphi_y h_y) + \varphi_z = 0, \quad z = -h, \quad (8)$$

$$\mu^2 \zeta_t + \varepsilon \mu^2 (\varphi_x \zeta_x + \varphi_y \zeta_y) - \varphi_z = 0, \quad z = \varepsilon \zeta, \quad (9)$$

$$\mu^2 \varphi_t + \mu^2 \zeta + \frac{1}{2} \varepsilon \mu^2 [(\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2] + \frac{1}{2} \varepsilon (\varphi_z)^2 = 0, \quad z = \varepsilon \zeta. \quad (10)$$

Здесь

$$x = \frac{x'}{\lambda_0}, \quad y = \frac{y'}{\lambda_0}, \quad z = \frac{z'}{h_0}, \quad t = \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda_0} t',$$

$$h = \frac{h'}{h_0}, \quad \zeta = \frac{\zeta'}{a_0}, \quad \varphi = \frac{h_0}{a_0 \lambda_0 \sqrt{gh_0}} \varphi',$$

где $x', y', z', t', h', \zeta', \varphi'$ – размерные переменные, а масштабные коэффициенты показаны на рис. 1.

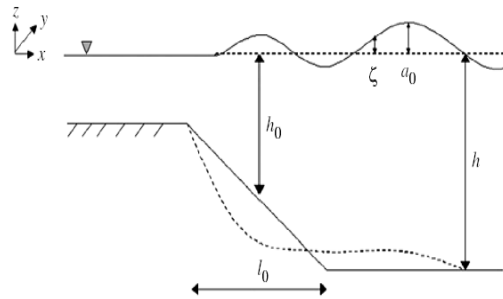


Рис. 1. Схема для однослойной модели жидкости

Интегрируя (7) по области $-h < z < \varepsilon \zeta$, с учетом (8), (9), получим уравнение неразрывности в следующем виде:

$$\zeta_t + \frac{1}{\varepsilon} h_t + \nabla \cdot \int_{-h}^{\varepsilon \zeta} \nabla \varphi dz = 0. \quad (11)$$

Решение будем искать в виде ряда

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (h+z)^n \varphi_n(x, y, t). \quad (12)$$

Подставляя (12) в условие на дне (8), с точностью до членов порядка $O(\mu^4)$, будем иметь

$$\varphi_1 = \mu^2 \nabla h \cdot \nabla \varphi_0 - \frac{\mu^2}{\varepsilon} h_t + O(\mu^4). \quad (13)$$

После подстановки (12) в уравнение неразрывности (7) получим рекуррентные соотношения, позволяющие записать потенциал скорости в виде

$$\varphi = \varphi_0 - \mu^2 \left\{ [\nabla h \cdot \nabla \varphi_0 + \frac{1}{\varepsilon} h_t](z+h) + \frac{1}{2} \nabla^2 \varphi_0 (z+h)^2 \right\} + O(\mu^4). \quad (14)$$

Здесь

$$\varphi_0 = \varphi(x, y, -h, t). \quad (15)$$

Пусть

$$\tilde{\varphi} = \varphi(x, y, z_{\alpha_1}, t). \quad (16)$$

Так как $\varphi_0 = \tilde{\varphi} + O(\mu^2)$, то, инвертируя соотношение (14) относительно функции φ_0 , с учетом (16), приведем разложение (14) к виду

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \mu^2 \{ [Ah - (z+h)]\tilde{F}_1 + [Bh^2 - (z+h)^2]\tilde{F}_2 \} + O(\mu^4), \quad (17)$$

$$\text{где} \quad Ah = h + z_{\alpha_1}, \quad z_{\alpha_1} = \frac{z_{\alpha_1}'}{h_0}, \quad z_{\alpha_1}' = \alpha_1 h' + \beta_1 \zeta', \quad B = A^2, \quad (18)$$

$$\tilde{F}_1 = \nabla h \cdot \nabla \tilde{\varphi} + \frac{1}{\varepsilon} h_t, \quad \tilde{F}_2 = \frac{1}{2} \nabla^2 \tilde{\varphi}. \quad (19)$$

Здесь функции A, B соответствуют обозначениям, принятым в [8], α_1, β_1 – произвольные параметры, которые в дальнейшем будут определены из сравнения линейных дисперсионных и нелинейных характеристик с соответствующими характеристиками согласно волновой теории Стокса.

Подставляя выражение для потенциала (17) в уравнение Бернулли (10) на свободной поверхности $z = \varepsilon \zeta$ и беря горизонтальный оператор градиента от обеих частей (10), приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} & \nabla \tilde{\varphi}_t + \nabla \zeta + \varepsilon \nabla \tilde{\varphi} \nabla (\nabla \tilde{\varphi}) - \mu^2 \nabla [H\tilde{F}_1 + H^2\tilde{F}_2] - \mu^2 \nabla \{ h_t [\tilde{F}_1 + 2H\tilde{F}_2] \} + \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon \mu^2 \nabla [\tilde{F}_1 + 2H\tilde{F}_2]^2 - \varepsilon \mu^2 \nabla \{ \nabla \tilde{\varphi} [H\nabla \tilde{F}_1 + H^2\nabla \tilde{F}_2 + \tilde{F}_1 \nabla h + 2H\tilde{F}_2 \nabla h] \} + \\ & + \mu^2 \nabla \{ [Ah\tilde{F}_1 + Bh^2\tilde{F}_2]_t \} + \varepsilon \mu^2 \nabla \{ \nabla \tilde{\varphi} \cdot \nabla [Ah\tilde{F}_1 + Bh^2\tilde{F}_2] \} = O(\mu^4). \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнения (11), (20), с учетом (17), представляют собой замкнутую систему относительно функций $\nabla \tilde{\varphi}(x, y, t)$, $\zeta(x, y, t)$, определяющих искомым потенциал скорости движения однослойной жидкости в приближении $O(\mu^2)$. Линейный анализ Фурье для уравнения (11), с учетом (17), и уравнения (20) дает дисперсионное соотношение вида

$$\frac{\omega^2}{gk^2 h} = \frac{1 - [\frac{1}{2}(\alpha_1^2 + 2\alpha_1) + \frac{1}{3}](kh)^2}{1 - \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + 2\alpha_1)(kh)^2}. \quad (21)$$

Значение свободного параметра $\alpha_1 = -0,531$ соответствует оптимальному приближению соотношения (21) к линейному дисперсионному соотношению Стокса $\omega^2 / ghk^2 = \text{th}(kh) / kh$. На рис. 2 это приближение обозначено кривой (—). Случаи $\alpha_1 = -1$ и $\alpha_1 = 0$ соответствуют кривым (···) и (— — —). Отметим, что дисперсионное соотношение (21) совпадает с полученным ранее в работах для однослойных моделей, записанных в терминах скорости $\hat{u}(x, y, t)$ на произвольной поверхности слоя жидкости [6, 7, 11, 15, 16], где параметр α_1 равен числу Нвогу.

2.2. Однослойная модель в терминах средней скорости \bar{u}

Определим среднюю скорость в слое жидкости $-h < z < \varepsilon\zeta$ как

$$\bar{u} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\varepsilon\zeta} \nabla \phi dz, \quad (22)$$

где
$$H = h + \varepsilon\zeta. \quad (23)$$

Тогда уравнение неразрывности (11) переписывается в виде

$$\zeta_t + \frac{1}{\varepsilon} h_t + \nabla(H\bar{u}) = 0. \quad (24)$$

Принимая во внимание (22), инвертируем горизонтальный градиент от обеих частей (17):

$$\nabla \tilde{\phi} = \bar{u} + \mu^2 \left\{ \bar{F}_1 \nabla h + H \bar{F}_2 \nabla h + \frac{H}{2} \nabla \bar{F}_1 + \frac{H^2}{3} \nabla \bar{F}_2 \right\} - \mu^2 \nabla \{ A h \bar{F}_1 + B h^2 \bar{F}_2 \}. \quad (25)$$

Здесь

$$\bar{F}_1 = \nabla h \cdot \bar{u} + \frac{1}{\varepsilon} h_t, \quad \bar{F}_2 = \frac{1}{2} \nabla \bar{u}. \quad (26)$$

В случае $z_{\alpha} = -h$, $A, B = 0$ и соотношение (25) для $\nabla \tilde{\phi}$ совпадает с приведенным в [17].

Подставляя в полученное уравнение движения (20) значение $\nabla \tilde{\phi}$, выраженное через среднюю скорость \bar{u} из (25), мы приходим к уравнению следующего вида:

$$\begin{aligned} & \bar{u}_t + \mu^2 \left\{ \bar{F}_1 \nabla h + H \bar{F}_2 \nabla h + \frac{H}{2} \nabla \bar{F}_1 + \frac{H^2}{3} \nabla \bar{F}_2 \right\}_t + \nabla \zeta - \mu^2 \nabla \{ H[\bar{F}_1 + H \bar{F}_2] + h_t[\bar{F}_1 + 2H \bar{F}_2] \} + \\ & + \varepsilon \bar{u} \nabla \bar{u} + \varepsilon \nabla \left\{ \bar{u} [\bar{F}_1 \nabla h + H \bar{F}_2 \nabla h + \frac{H}{2} \nabla \bar{F}_1 + \frac{H^2}{3} \nabla \bar{F}_2] \right\} + \frac{1}{2} \varepsilon \mu^2 \nabla [\bar{F}_1 + 2H \bar{F}_2]^2 - \\ & - \varepsilon \mu^2 \nabla \{ \bar{u} [H \nabla \bar{F}_1 + H^2 \nabla \bar{F}_2 + \bar{F}_1 \nabla h + 2h \bar{F}_2 \nabla h] \} = O(\mu^4). \end{aligned} \quad (27)$$

Уравнение (27) может быть переформировано к виду уравнения Серре, представленного в [9]:

$$\bar{u}_t + \varepsilon (\bar{u} \nabla) \bar{u} + g \nabla \zeta - \mu^2 D = O(\mu^4), \quad (28)$$

где
$$D = \frac{1}{H} \nabla \left[\frac{H^3}{3} R + \frac{H^2}{2} Q \right] - \nabla h \left(\frac{H}{2} R + Q \right),$$

$$R = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \bar{u} + \varepsilon ((\bar{u} \nabla) \nabla \bar{u} - (\nabla \bar{u})^2), \quad Q = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \nabla h + \varepsilon (\bar{u} \nabla) (\bar{u} \nabla h).$$

Линейное дисперсионное соотношение для системы уравнений (24), (27)

$$\frac{\omega^2}{gk^2 h} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3} (kh)^2} \quad (29)$$

соответствует кривой (•••) на рис. 2.

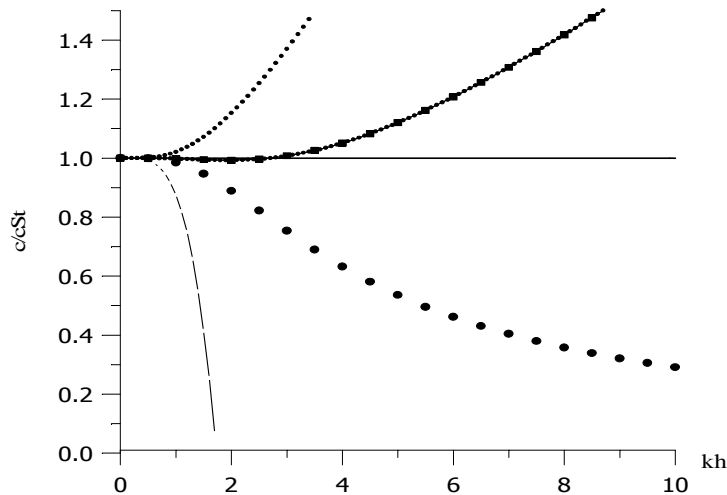


Рис. 2. Отношение фазовых скоростей c / c^{Stokes} для однослойных моделей. Кривая (—) – (21), (\cdots) – $\alpha_1 = -1$, (---) – $\alpha_1 = 0$, ($\bullet \bullet \bullet$) – (29), ($\blacksquare \blacksquare \blacksquare$) – (30)

Таким образом, переход от $\nabla \tilde{\varphi}$ к искомым функциям в терминах средней скорости \bar{u} не приводит к сохранению свободных параметров α_1, β_1 (определяющих поверхность $z = z_{\alpha_1}$) в уравнении неразрывности (24) и уравнении движения (27) и, следовательно, к улучшению с помощью этих параметров дисперсии для модели однослойной жидкости, записанной в терминах \bar{u} . Поэтому соотношения (17), (25) могут быть использованы для вычисления скорости $\bar{u} = \nabla \varphi$ только через значение потенциала на заданной поверхности $z_{\alpha_1} = -h$.

В работе [10] показано применение метода [4], повышающего порядок производных в уравнениях (24), (28), что приводит к дисперсионному соотношению вида

$$\frac{\omega^2}{gk^2h} = \frac{1 + \alpha(kh)^2}{1 + (\alpha + \frac{1}{3})(kh)^2} \quad (30)$$

При $\alpha = 0$ дисперсионное соотношение (30) совпадает с (29). В (30) произвольный параметр α не связан с какой-либо поверхностью, однако для $\alpha = -\frac{1}{2}(\alpha_1^2 + 2\alpha_1) - \frac{1}{3}$ дисперсионное соотношение (30) совпадает с (21). При этом $\alpha = 0,0567$ (кривая ($\blacksquare \blacksquare \blacksquare$), рис. 2) для $\alpha_1 = -0,531$ (кривая (—), рис. 2).

2.3. Однослойная модель в терминах скорости \hat{u} , определенной на произвольной поверхности $z = z_{\alpha_1}$

Пусть

$$\hat{u} = [\nabla \varphi] \Big|_{z=z_{\alpha_1}} \quad (31)$$

Тогда, взяв горизонтальный градиент от обеих частей соотношения (17) и инвертируя его относительно $\nabla\tilde{\varphi}$, с учетом (31), получим

$$\nabla\tilde{\varphi} = \hat{u} + \mu^2 \nabla h \hat{F}_1 - \mu^2 \{A \nabla h [\hat{F}_1 + 2(A-1)h\hat{F}_2] + \nabla A h [\hat{F}_1 + 2A h \hat{F}_2]\} + O(\mu^4), \quad (32)$$

$$\text{где} \quad \hat{F}_1 = \nabla h \cdot \hat{u} + \frac{1}{\varepsilon} h_t, \quad \hat{F}_2 = \frac{1}{2} \nabla \hat{u}. \quad (33)$$

Подстановка в уравнение (20) функции $\nabla\tilde{\varphi}$, выраженной через скорость \hat{u} , приводит к аналогичным уравнениям движения и сохранения массы для однослойных моделей, полученных в работах [4], [11], [16]. При этом линейные приближения уравнений (11), (20) совпадают с линейными приближениями этих моделей (при сохранении одинакового порядка $O(\mu^2)$) и, следовательно, (21) (кривая (—), рис. 2) совпадает с полученным ранее линейным дисперсионным соотношением в [4, 11, 16]. Как отмечено Мадсенем и Шаффером в [4], точность линейных дисперсионных характеристик для больших волновых чисел очень чувствительна к выбору скорости в качестве переменной и порядку пространственных и временных производных уравнений модели. В данном случае переход к средней скорости в уравнении неразрывности и уравнении движения приводит в области $0 < kh < 3$ к большей погрешности (рис. 2, кривая (•••)), чем для уравнений, искомая скорость которых есть функция, записанная на некоторой поверхности z_{α_i} (рис. 2, кривая (—)). Однако повышение производных модели Серре с помощью метода [13] позволяет улучшить дисперсионное соотношение, что приводит к совпадению соответствующих кривых (—) и (■ ■ ■) на рис. 2.

2.4. Радиационные напряжения

Согласно [18], радиационные напряжения, полученные в результате интегрирования по глубине горизонтального и вертикального моментов движения Эйлера (1), (2), с учетом уравнения неразрывности (3), условий на дне (4) и свободной поверхности (5), запишутся так:

$$S_{ij} = \int_{-h}^{\bar{\zeta}} [\rho u_i u_j + \bar{p} \delta_{ij}] dz + [-\frac{1}{2} \rho g (h + \bar{\zeta})^2 + \frac{1}{2} \rho g (\bar{\zeta}')^2] \delta_{ij}, \quad (34)$$

$$\text{где} \quad \bar{p} = \rho g (\bar{\zeta} - z) - \rho w^2 + \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\bar{\zeta}} \rho u w dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_z^{\bar{\zeta}} \rho v w dz \quad (35)$$

– среднее по пространству давление (атмосферное давление на свободной поверхности жидкости предполагается равным нулю). Здесь $\zeta = \bar{\zeta} + \zeta'$, $\bar{\zeta}$ – среднее отклонение, вызванное наличием волн и течений, и ζ' – отклонение от среднего уровня, $u_1 = u$, $u_2 = v$, $i, j = 1, 2$. Черта сверху в (34) означает осреднение по времени.

Принимая во внимание полученные соотношения (17), (25) и (32), радиационные напряжения можем записать соответственно в терминах $\nabla\tilde{\varphi}$, \bar{u} и \hat{u} . Так, в терминах $\nabla\tilde{\varphi}$ радиационные напряжения будут иметь вид с точностью до членов порядка $O(\mu^4)$:

$$S_{11} = \overline{\rho(\tilde{\varphi}_x)^2 \bar{H}} - 2\rho\tilde{\varphi}_x \left\{ \overline{[\tilde{F}_1 h_x - (Ah\tilde{F}_1 + Bh^2\tilde{F}_2)_x] \bar{H}} + [\tilde{F}_{1x} + h_x \Delta\tilde{\varphi}] \frac{1}{2} \bar{H}^2 + \frac{1}{6} \Delta\tilde{\varphi}_x \bar{H}^3 \right\} - \rho R_{xy} - \frac{1}{2} \rho g (\zeta')^2, \quad (36)$$

$$\text{где } R_{xy} = \left\{ \overline{\Delta\tilde{\varphi}[\tilde{F}_1 \bar{H} + \Delta\tilde{\varphi} \frac{1}{2} \bar{H}^2]} + \tilde{\varphi}_x [\tilde{F}_1 \bar{H} + \Delta\tilde{\varphi} \frac{1}{2} \bar{H}^2]_x + \tilde{\varphi}_y [\tilde{F}_1 \bar{H} + \Delta\tilde{\varphi} \frac{1}{2} \bar{H}^2]_y \right\}. \quad (37)$$

S_{22} получается перестановкой x, y .

$$S_{12} = \rho \left\{ \overline{\tilde{\varphi}_x \tilde{\varphi}_y - \tilde{\varphi}_x [\tilde{F}_1 h_y - (Ah\tilde{F}_1 + Bh^2\tilde{F}_2)_y]} - \tilde{\varphi}_y [\tilde{F}_1 h_x - (Ah\tilde{F}_1 + Bh^2\tilde{F}_2)_x] \right\} \bar{H} - \rho \left\{ \overline{[\tilde{\varphi}_x (\tilde{F}_{1y} + \Delta\tilde{\varphi} h_y) + \tilde{\varphi}_y (\tilde{F}_{1x} + \Delta\tilde{\varphi} h_x)]} \frac{1}{2} \bar{H}^2 + (\tilde{\varphi}_x \Delta\tilde{\varphi}_y + \tilde{\varphi}_y \Delta\tilde{\varphi}_x) \frac{1}{6} \bar{H}^3 \right\}, \quad (38)$$

$$S_{21} = S_{12}.$$

(В (36) – (38) черта сверху означает осреднение по времени).

В терминах средней скорости \bar{u} полученные компоненты радиационного напряжения переписутся с учетом (25), (26) для $z_{\alpha_1} = -h$. В терминах скорости \hat{u} – с учетом (32), (33). При этом

$$\tilde{\varphi}_x = \bar{u} + \mu^2 \bar{G}^{(x)}, \quad \tilde{\varphi}_y = \bar{v} + \mu^2 \bar{G}^{(y)}, \quad (39)$$

$$\tilde{\varphi}_x = \hat{u} + \mu^2 \hat{G}^{(x)}, \quad \tilde{\varphi}_y = \hat{v} + \mu^2 \hat{G}^{(y)}, \quad (40)$$

где $\bar{G}^{(x)}, \bar{G}^{(y)}, \hat{G}^{(x)}, \hat{G}^{(y)}$ – непрерывные функции, определяемые соответственно из (25), (26) и (32), (33).

3.1. Вывод двухслойной модели типа Буссинеска порядка $O(\mu^2)$ и любого порядка параметра нелинейности ε

Рассмотрим область идеальной несжимаемой жидкости, разделенной поверхностью $z = \eta(x, y, t)$ на два слоя, содержащих соответствующие поверхности $z_{\alpha_1}, z_{\alpha_3} = \kappa_1, \kappa_2$ аналогично двухслойной модели [14] (рис. 3). Переход от размерных переменных к переменным с соответствующими масштабными коэффициентами проведем аналогично [14]:

$$x = \frac{x'}{\lambda_0}, y = \frac{y'}{\lambda_0}, z_n = \frac{z'}{d_n}, n=1,2,$$

$$t = \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda_0} t', h = \frac{h'}{h_0}, \zeta = \frac{\zeta'}{a_0}, z_{\alpha_n} = \frac{z'_{\alpha_n}}{d_n}, \eta = \frac{\eta'}{d_1}, \quad (41)$$

$$\varphi = \frac{h_0}{a_0 \lambda_0 \sqrt{gh_0}} \varphi', \mu_n^2 = \frac{d_n h_0}{\lambda_0^2},$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon_0 c_0} u', v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{\varepsilon_0 c_0} v', \quad (42)$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{d_n}{\varepsilon_0 c_0 \lambda_0} w', c_0 = \sqrt{gh_0}, \varepsilon_1 = \frac{a_0}{d_1}.$$

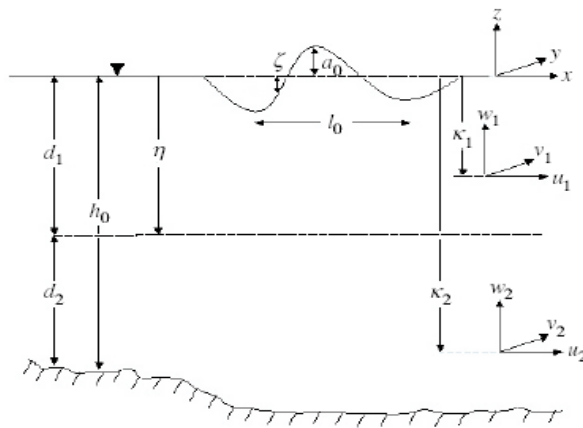


Рис. 3. Схема двухслойной модели жидкости

Тогда уравнения неразрывности и движения, а также условие на свободной границе первого слоя запишутся следующим образом:

$$\mu_n^2 \frac{d_1}{h_0} (\varphi_{xx}^{(1)} + \varphi_{yy}^{(1)}) + \varphi_{zz}^{(1)} = 0, \quad \eta < z_1 < \varepsilon_1 \zeta, \quad (43)$$

$$\zeta_t + \varepsilon_0 (\varphi_x^{(1)} \zeta_x + \varphi_y^{(1)} \zeta_y) = \frac{1}{\mu_1^2} \varphi_z^{(1)}, \quad z_1 = \varepsilon_1 \zeta, \quad (44)$$

$$\varphi_t^{(1)} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 [(\varphi_x^{(1)})^2 + (\varphi_y^{(1)})^2] + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\mu_0^2}{(\mu_1^2)^2} [\varphi_z^{(1)}]^2 + \zeta = 0, \quad z_1 = \varepsilon_1 \zeta. \quad (45)$$

Для второго слоя уравнения неразрывности и движения, условие на дне запишутся

$$\mu_2^2 \frac{d_2}{h_0} (\varphi_{xx}^{(2)} + \varphi_{yy}^{(2)}) + \varphi_{zz}^{(2)} = 0, \quad -\frac{h_0}{d_2} h < z_2 < \frac{d_1}{d_2} \eta, \quad (46)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} h_t + \varphi_x^{(2)} h_x + \varphi_y^{(2)} h_y + \frac{1}{\mu_2^2} \varphi_z^{(2)} = 0, \quad z_2 = -\frac{h_0}{d_2} h. \quad (47)$$

К уравнениям (43) – (44), (46) – (47) добавим условия непрерывности на разделяющей поверхности $z = \eta(x, y, t)$ для горизонтальных и вертикальных компонент скоростей:

$$[\varphi_x^{(1)}, \varphi_y^{(1)}]_{z_1=\eta} = [\varphi_x^{(2)}, \varphi_y^{(2)}]_{z_2=\frac{d_1}{d_2}\eta}, \quad (48)$$

$$[\varphi_{z_1}^{(1)}]_{z_1=\eta} = \frac{d_1}{d_2} [\varphi_{z_2}^{(2)}]_{z_2=\frac{d_1}{d_2}\eta}. \quad (49)$$

Проинтегрируем уравнения неразрывности (43), (46) соответственно по области $\eta < z_1 < \varepsilon_1 \zeta$ и $-\frac{h_0}{d_2} h < z_2 < \frac{d_1}{d_2} \eta$ с учетом граничных условий на дне, свободной поверхности и условия непрерывности (49) для вертикальных компонент на смежной поверхности η . После сложения проинтегрированных уравнений получим уравнение неразрывности для всей рассматриваемой области:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} h_t + \zeta_t + \frac{d_2}{h_0} \nabla \int_{-\frac{h_0}{d_2} h}^{\frac{d_1}{d_2} \eta} \nabla \varphi^{(2)} dz_2 + \frac{d_1}{h_0} \nabla \int_{\eta}^{\varepsilon_1 \zeta} \nabla \varphi^{(1)} dz_1 = 0. \quad (50)$$

Будем искать решение для второго слоя в виде

$$\varphi^{(2)} = \sum_m (z_2 + \frac{h_0}{d_2} h)^m \varphi_m^{(2)}(x, y, t). \quad (51)$$

Подставляя (51) в граничное условие на дне (47) и уравнение (46), получим с точностью до членов порядка $O(\mu_2^4)$:

$$\varphi^{(2)} = \varphi_0^{(2)} - \mu_2^2 \left\{ F_1^{(2)}(z_2 + \frac{h_0}{d_2} h) + F_2^{(2)}(z_2 + \frac{h_0}{d_2} h)^2 \right\} + O(\mu_2^4), \quad (52)$$

где
$$\varphi_0^{(2)} = \varphi^{(2)}(x, y, -\frac{h_0}{d_2} h, t),$$

$$F_1^{(2)} = \nabla h \cdot \nabla \varphi_0^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon_0} h_t, \quad F_2^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{d_2}{h_0} \nabla^2 \varphi_0^{(2)}. \quad (53)$$

Решение в области $\eta < z_1 < \varepsilon_1 \zeta$ будем искать в следующем виде:

$$\varphi^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} (z_1 - \eta)^m \varphi_m^{(1)}(x, y, t). \quad (54)$$

Подставляя выражение (54) в уравнение неразрывности (43) и принимая во внимание условие непрерывности вертикальных компонент (49), получим искомый потенциал в верхнем слое:

$$\varphi^{(1)} = \varphi_0^{(1)} - \mu_1^2 \{ F_1^{(1)}(z_1 - \eta) + F_2^{(1)}(z_1 - \eta)^2 \} + O(\mu_1^4, \mu_1^2 \mu_2^2), \quad (55)$$

где
$$\varphi_0^{(1)} = \varphi^{(1)}(x, y, \eta, t), \quad (56)$$

$$F_1^{(1)} = \nabla h \cdot \nabla \varphi_0^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon_0} h_t + \frac{d_2}{h_0} H_2 \nabla^2 \varphi_0^{(1)}, \quad F_2^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{d_1}{h_0} \nabla^2 \varphi_0^{(1)}. \quad (57)$$

3.2. Двухслойная модель типа Буссинеска порядка $O(\mu^2)$ и любого порядка параметра нелинейности ε в терминах $\nabla \tilde{\varphi}$

Запишем потенциалы $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$ соответственно на поверхностях $z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}$ аналогично (17):

$$\varphi^{(1)} = \tilde{\varphi}^{(1)} + \mu_1^2 \left\{ [A_1 \eta - (z_1 - \eta)] \tilde{F}_1^{(1)} + [B_1 \eta^2 - (z_1 - \eta)^2 \tilde{F}_2^{(1)}] \right\} + O(\mu_1^4, \mu_2^4), \quad (58)$$

$$\varphi^{(2)} = \tilde{\varphi}^{(2)} + \mu_2^2 \left\{ [A_2 h - (z_2 + \frac{h_0}{d_2} h)] \tilde{F}_1^{(2)} + [B_2 h^2 - (z_2 + \frac{h_0}{d_2} h)^2 \tilde{F}_2^{(2)}] \right\} + O(\mu_2^4), \quad (59)$$

где
$$\tilde{\varphi}^{(1)} = \varphi(x, y, z_{\alpha_1}, t), \quad \tilde{\varphi}^{(2)} = \varphi(x, y, z_{\alpha_2}, t), \quad (60)$$

$$A_1 \eta = z_{\alpha_1} - \eta, \quad A_2 h = z_{\alpha_2} + \frac{h_0}{d_2} h, \quad B_1 = A_1^2, \quad B_2 = A_2^2, \quad (61)$$

$$\tilde{F}_1^{(1)} = \nabla h \cdot \nabla \tilde{\varphi}^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon_0} h_t + \frac{d_2}{h_0} H_2 \nabla^2 \tilde{\varphi}^{(2)}, \quad \tilde{F}_2^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{d_1}{h_0} \nabla^2 \tilde{\varphi}^{(1)}, \quad (62)$$

$$\tilde{F}_1^{(2)} = \nabla h \cdot \nabla \tilde{\varphi}^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon_0} h_t, \quad \tilde{F}_2^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{d_2}{h_0} \nabla^2 \tilde{\varphi}^{(2)}. \quad (63)$$

Из условия непрерывности горизонтальных компонент скорости на разделяющей слою поверхности имеем

$$\begin{aligned} & \nabla \tilde{\varphi}^{(1)} + \mu_1^2 \tilde{F}_1^{(1)} \nabla \eta + \mu_1^2 \nabla [A_1 \eta \tilde{F}_1^{(1)} + B_1 \eta^2 \tilde{F}_2^{(1)}] = \\ & = \nabla \tilde{\varphi}^{(2)} - \mu_1^2 \left\{ \frac{d_2}{d_1} H_2 [\nabla \tilde{F}_1^{(2)} + H_2 \nabla \tilde{F}_1^{(2)}] + \frac{h_0}{d_1} \nabla h [\tilde{F}_1^{(2)} + 2 H_2 \tilde{F}_2^{(2)}] \right\} + \\ & + \mu_1^2 \frac{d_2}{d_1} \nabla [A_2 h \tilde{F}_1^{(2)} + B_2 h^2 \tilde{F}_2^{(2)}] + O(\mu_1^4, \mu_1^2 \mu_2^2 \mu_1^4). \end{aligned} \quad (64)$$

Подставляя (51) в уравнение Бернулли (45) на свободной поверхности $z_1 = \varepsilon_1 \zeta$, приходим к следующему уравнению движения:

$$\begin{aligned} & \nabla \tilde{\varphi}_t^{(1)} + \nabla \zeta + \varepsilon_0 (\nabla \tilde{\varphi}^{(1)} \nabla) \nabla \tilde{\varphi}^{(1)} + \\ & + \mu_1^2 \nabla \left\{ \eta_t [\tilde{F}_1^{(1)} + 2 H_1 \tilde{F}_2^{(1)}] - H_1 [\tilde{F}_{1t}^{(1)} + H_1 \tilde{F}_{2t}^{(1)}] \right\} + \\ & + \varepsilon_0 \mu_1^2 \nabla \left\{ \nabla \tilde{\varphi}^{(1)} \cdot [\nabla \eta (\tilde{F}_1^{(1)} + 2 H_1 \tilde{F}_2^{(1)}) - H_1 (\nabla \tilde{F}_1^{(1)} + H_1 \nabla \tilde{F}_2^{(1)})] \right\} + \\ & + \varepsilon_0 \mu_0^2 [\tilde{F}_1^{(1)} + 2 H_1 \tilde{F}_2^{(1)}] \nabla [\tilde{F}_1^{(1)} + 2 H_1 \tilde{F}_2^{(1)}] + \\ & + \mu_1^2 \nabla [A_1 \eta \tilde{F}_1^{(1)} + B_1 \eta^2 \tilde{F}_2^{(1)}]_t + \varepsilon_0 \mu_1^2 \nabla \left\{ \nabla \tilde{\varphi}^{(1)} \cdot \nabla [A_1 \eta \tilde{F}_1^{(1)} + B_1 \eta^2 \tilde{F}_2^{(1)}] \right\} = \\ & = O(\mu_1^4, \mu_1^2 \mu_2^2, \mu_1^4). \end{aligned} \quad (65)$$

Подставляя (58), (59) в уравнение неразрывности (60), перепишем его в виде

$$\begin{aligned}
& \zeta_i + \frac{1}{\varepsilon_0} h_i + \frac{d_1}{h_0} \nabla \cdot H_1 \nabla \tilde{\varphi}^{(1)} + \frac{d_2}{h_0} \nabla \cdot H_2 \nabla \tilde{\varphi}^{(2)} - \\
& - \mu_1^2 \nabla \cdot \left\{ [-H_1 \nabla \eta (\tilde{F}_1^{(1)} + H_1 \tilde{F}_2^{(1)}) + \frac{1}{2} H_1^2 \nabla \tilde{F}_1^{(1)} + \frac{1}{3} H_1^3 \nabla \tilde{F}_2^{(1)}] \right\} - \\
& - \mu_2^2 \nabla \cdot \left\{ \left[\frac{h_0}{d_2} H_2 \nabla h (\tilde{F}_1^{(2)} + H_2 \tilde{F}_2^{(2)}) + \frac{1}{2} H_2^2 \nabla \tilde{F}_1^{(2)} + \frac{1}{3} H_2^3 \nabla \tilde{F}_2^{(2)} \right] \right\} + \\
& + \mu_1^2 \nabla \cdot \left\{ H_1 \nabla [A_1 \eta \tilde{F}_1^{(1)} + B_1 \eta^2 \tilde{F}_2^{(1)}] \right\} + \mu_2^2 \nabla \cdot \left\{ H_2 \nabla [A_2 h \tilde{F}_1^{(2)} + B_2 h^2 \tilde{F}_2^{(2)}] \right\} = \\
& = O(\mu_1^4, \mu_1^2 \mu_2^2, \mu_2^4).
\end{aligned} \tag{66}$$

Здесь

$$\tilde{F}_1^{(1)} = \nabla h \cdot \tilde{u}_2 + \frac{1}{\varepsilon_0} h_i + \frac{d_2}{h_0} H_2 \nabla \tilde{u}_2, \quad \tilde{F}_2^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{d_1}{h_0} \nabla \tilde{u}_1, \tag{67}$$

$$\tilde{F}_1^{(2)} = \nabla h \cdot \tilde{u}_2 + \frac{1}{\varepsilon_0} h_i, \quad \tilde{F}_2^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{d_2}{h_0} \nabla \tilde{u}_2, \tag{68}$$

где $\tilde{u}_1 = \nabla \tilde{\varphi}^{(1)}, \tilde{u}_2 = \nabla \tilde{\varphi}^{(2)}.$ (69)

Система уравнений (64) – (66) образует замкнутую систему уравнений для определения неизвестных функций $\nabla \tilde{\varphi}^{(1)}, \nabla \tilde{\varphi}^{(2)}$ двухслойной модели с тремя свободными параметрами $z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, \eta$.

Средние скорости \bar{u}_1, \bar{u}_2 , введенные по формулам

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{H_1} \int_{\eta}^{\varepsilon_1 \zeta} \nabla \varphi^{(1)} dz_1, \quad H_1 = \varepsilon_1 \zeta - \eta, \tag{70}$$

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{H_2} \int_{\frac{-h_0 h}{d_2}}^{\frac{d_1 \eta}{d_2}} \nabla \varphi^{(2)} dz_2, \quad H_2 = \frac{d_1}{d_2} \eta + \frac{h_0}{d_2} h, \tag{71}$$

могут быть использованы для задания начальных и граничных условий для функций $\bar{u}_1 = \nabla \varphi^{(1)}, \bar{u}_2 = \nabla \varphi^{(2)}$ после инвертирования соответствующих функций $\nabla \tilde{\varphi}^{(1)}, \nabla \tilde{\varphi}^{(2)}$:

$$\nabla \tilde{\varphi}^{(2)} = \bar{u}_2 + \mu_2^2 \left\{ \frac{h_0}{d_2} [\bar{F}_1^{(2)} + H_2 \bar{F}_2^{(2)}] \nabla h + \frac{1}{2} H_2 \nabla \bar{F}_1^{(2)} + \frac{1}{3} H_2^2 \nabla \bar{F}_2^{(2)} \right\} + O(\mu_2^4), \tag{72}$$

$$\nabla \tilde{\varphi}^{(1)} = \bar{u}_1 + \mu_1^2 \left\{ -[\bar{F}_1^{(1)} + H_1 \bar{F}_2^{(1)}] \nabla \eta + \frac{1}{2} H_1 \nabla \bar{F}_1^{(1)} + \frac{1}{3} H_1^2 \nabla \bar{F}_2^{(1)} \right\} + O(\mu_1^4, \mu_1^2 \mu_2^2, \mu_2^4). \tag{73}$$

3.3. Взаимно однозначное соответствие между скоростями $\tilde{u}_{1,2}, \hat{u}_{1,2}$

Соотношение между функциями $\tilde{u}_{1,2}, \hat{u}_{1,2}$, с учетом (58), (59), имеет следующий вид:

$$\tilde{u}_1 = \hat{u}_1 - \mu_1^2 \left\{ [(A_1 - 1)\nabla h + h\nabla A_1] \hat{F}_1^{(1)} + 2A_1 h [(A_1 - 1)\nabla h + h\nabla A_1] \hat{F}_2^{(1)} \right\} + O(\mu^4), \quad (74)$$

$$\tilde{u}_2 = \hat{u}_2 - \mu_2^2 \left\{ [(A_2 - 1)\nabla h + h\nabla A_2] \hat{F}_1^{(2)} + 2A_2 h [(A_2 - 1)\nabla h + h\nabla A_2] \hat{F}_2^{(2)} \right\} + O(\mu^4), \quad (75)$$

где

$$\hat{F}_1^{(1)} = \nabla h \cdot \hat{u}_2 + \frac{1}{\varepsilon_0} h_t + \frac{d_2}{h_0} H_2 \nabla \hat{u}_2, \quad \hat{F}_2^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{d_1}{h_0} \nabla \hat{u}_1, \quad (76)$$

$$\hat{F}_1^{(2)} = \nabla h \cdot \hat{u}_2 + \frac{1}{\varepsilon_0} h_t, \quad \hat{F}_2^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{d_2}{h_0} \nabla \hat{u}_2, \quad (77)$$

или в обозначениях [14]:

$$\tilde{u}_1 = \hat{u}_1 - \mu_1^2 [\hat{T}_1 + \hat{S}_1 z_{\alpha_1}] \nabla z_{\alpha_1}, \quad \tilde{u}_2 = \hat{u}_2 - \mu_2^2 [\hat{T}_2 + \hat{S}_2 z_{\alpha_3}] \nabla z_{\alpha_3}, \quad (78)$$

где

$$\hat{S}_1 = \frac{d_1}{h_0} \nabla \hat{u}_1, \quad \hat{S}_2 = \frac{d_2}{h_0} \nabla \hat{u}_2, \quad (79)$$

$$\hat{T}_1 = \eta \left[\frac{d_1}{d_2} \hat{S}_2 - \hat{S}_1 \right] + \hat{T}_2, \quad \hat{T}_2 = \nabla (h \hat{u}_2) + \frac{1}{\varepsilon_0} h_t. \quad (80)$$

Можно показать, что подстановка (74), (75), с учетом (76), (77), или подстановка (78), с учетом (79) – (80), в уравнения (64) – (66) при сохранении порядка аппроксимации $O(\mu^2)$ приводит к уравнениям двухслойной модели [14].

Запишем поверхности, соответствующие рис. 3, в виде

$$z_{\alpha_1} = \alpha_1 h + \beta_1 \zeta, \quad \eta = \alpha_2 h + \beta_2 \zeta, \quad z_{\alpha_3} = \alpha_3 h + \beta_3 \zeta, \quad (81)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ – произвольные параметры, которые должны быть определены. Перейдя к размерным переменным, проведем анализ Фурье системы уравнений (64)–(66) в одномерном случае для постоянной глубины. Решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} \zeta &= \varepsilon \tilde{a}_1 e^{i\tilde{\theta}} + \varepsilon^2 \tilde{a}_2 e^{2i\tilde{\theta}} + \dots, \\ \tilde{u}_1 &= \varepsilon \tilde{u}_1^{(1)} e^{i\tilde{\theta}} + \varepsilon^2 \tilde{u}_1^{(2)} e^{2i\tilde{\theta}} + \dots, \\ \tilde{u}_2 &= \varepsilon \tilde{u}_2^{(1)} e^{i\tilde{\theta}} + \varepsilon^2 \tilde{u}_2^{(2)} e^{2i\tilde{\theta}} + \dots, \end{aligned} \quad (82)$$

где $\tilde{\theta} = kx - \tilde{\omega}t$, k – волновое число, ε – параметр порядка аппроксимации. Такой вид решения (82) будет использован для нахождения линейного дисперсионного соотношения и амплитуды нелинейного приближения для определения соответственно параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

В случае $h = const$ из (74), (75) или (78) следует равенство скоростей

$$\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 = \hat{u}_1, \hat{u}_2 + O(\mu_1^2, \mu_2^2). \quad (83)$$

Кроме того, в линейном приближении в этом случае уравнения (64) – (66) совпадают с уравнениями модели [14]. Тогда анализ Фурье уравнений (64) – (66) в терминах \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 приводит к

следующим соотношениям, совпадающим с аналогичными соотношениями, полученными ранее в [14] для двухслойной модели:

$$\frac{\tilde{\omega}^2}{gk^2h} = \frac{1 + p_1(kh)^2 + p_2(kh)^4}{1 + q_1(kh)^2 + q_2(kh)^4}, \quad (84)$$

$$\tilde{u}_1^{(1)} = \frac{g\tilde{a}_1}{h\omega} \frac{[kh - \delta_8(kh)^3]}{[1 + q_1(kh)^2 + q_2(kh)^4]}, \quad (85)$$

$$\tilde{u}_2^{(1)} = \frac{g\tilde{a}_1}{h\omega} \frac{[kh + \delta_7(kh)^3]}{[1 + q_1(kh)^2 + q_2(kh)^4]}. \quad (86)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_1 &= \delta_2\delta_7 - \delta_1\delta_8 - \delta_3 - \delta_4, & p_2 &= \delta_3\delta_8 - \delta_4\delta_7, \\ q_1 &= -\delta_8 - \delta_5 - \delta_6, & q_2 &= \delta_5\delta_8 - \delta_6\delta_7, \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -\alpha_2, & \delta_2 &= 1 + \alpha_2, & \delta_3 &= \frac{1}{6}(-2\alpha_2^3 + 6\alpha_1\alpha_2^2 - 3\alpha_1^2\alpha_2), \\ \delta_4 &= \frac{1}{6}(2\alpha_2^3 - 6\alpha_1\alpha_2^2 - 6\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_3^2\alpha_2 + 6\alpha_3\alpha_2 + 3\alpha_3^2 + 6\alpha_3 + 2), \\ \delta_5 &= \frac{1}{2}\alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2, & \delta_6 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1, & \delta_7 &= -\frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \alpha_1\alpha_2, \\ \delta_8 &= \frac{1}{2}(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1. \end{aligned} \quad (88)$$

где

В случае $\eta = -h$: $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -1$

$$p_1 = -\left(\frac{1}{3} + \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_1^2\right), \quad p_2 = 0, \quad q_1 = -\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_1^2\right), \quad q_2 = 0 \quad (89)$$

и двухслойная модель (64) – (66) в переменных \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 приводится к однослойной модели (11), (17), (20). В переменных \hat{u}_1, \hat{u}_2 модель (64) – (66) сводится к однослойной модели [15], [16]. Таким образом, линейные дисперсионные отношения для однослойных и двухслойных моделей, записанных в терминах \tilde{u} и \hat{u} , совпадают.

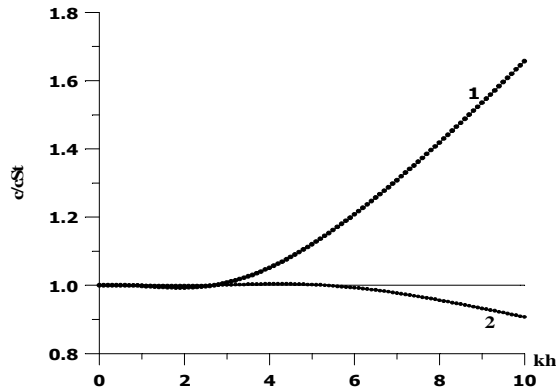


Рис. 4. Сравнение отношения фазовых скоростей c / c^{Stokes} для однослойных и двухслойных моделей. Кривая 1 – (21), 2 – (84)

На рис. 4 показано удвоение области $\Omega(kh)$ для двухслойных моделей по сравнению с однослойными моделями такого же порядка дисперсии $O(\mu^2)$, записанных в терминах \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 или \hat{u}_1, \hat{u}_2 .

Собирая члены порядка $O(\varepsilon^2)$ (ε - порядок аппроксимации в (82)), после подстановки рядов (82) в систему одномерных уравнений (64) – (66) для $h = const$ получим нелинейную поправку для амплитуды волны в виде

$$\tilde{a}_2 = k\tilde{\alpha}_1^2 \tilde{G}(\tilde{u}_1^{(1)}, \tilde{u}_2^{(1)}, \tilde{\omega}, kh, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3). \quad (90)$$

Полученное приближение порядка $O(\varepsilon^2)$ можно сравнить с приближением второго порядка волнового решения Стокса [14]:

$$a_2^{Stokes} = \frac{1}{4} k\tilde{\alpha}_1^2 [3 \coth^3(kh) - \coth(kh)]. \quad (91)$$

В настоящей работе для нахождения параметров $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ используется метод оптимизации среднеквадратичного отклонения для функции

$$\Delta_{NL} = \sum_{kh} (\tilde{a}_2 - a_2^{Stokes})^2. \quad (92)$$

При этом второе приближение \tilde{a}_2 может быть представлено в виде

$$\tilde{a}_2 = \tilde{a}_{20} + \tilde{a}_{21}\beta_1 + \tilde{a}_{22}\beta_2 + \tilde{a}_{23}\beta_3, \quad (93)$$

$$\text{где } \tilde{a}_{20}, \tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{22}, \tilde{a}_{23} = \tilde{a}_{20}, \tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{22}, \tilde{a}_{23}(\tilde{u}_1^{(1)}, \tilde{u}_2^{(1)}, \tilde{\omega}, kh, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \quad (94)$$

Так как линейные приближения рассматриваемых однослойных и двухслойных моделей совпадают, найдем соответствующие параметры нелинейного приближения β_1 и $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ для найденных из дисперсионных соотношений линейных параметров α_1 и $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, где в случае однослойных моделей $\alpha_1 = -0,531$, а в случае двухслойных воспользуемся значениями [14]:

Таблица 1. α – параметры линейной оптимизации

$\Omega(kh)$	α_1	α_2	α_3
$0,1 < kh < 5$	-0,127	-0,256	-0,618
$0,1 < kh < 10$	-0,128	-0,262	-0,618

В случае переменных \hat{u}_1, \hat{u}_2 решение системы уравнений (64) – (66) будем искать в виде (82), где обозначение \sim заменено на \wedge . Тогда для \hat{a}_2 приходим к уравнению вида

$$\hat{a}_2 = k\hat{\alpha}_1^2 \hat{G}(\hat{u}_1^{(1)}, \hat{u}_2^{(1)}, \hat{\omega}, kh, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad (95)$$

$$\text{где } \hat{u}_1^{(1)}, \hat{u}_2^{(1)} = \tilde{u}_1^{(1)}, \tilde{u}_2^{(1)}, \hat{a}_1 = \tilde{a}_1, \hat{\omega} = \tilde{\omega}. \quad (96)$$

Среднеквадратичное отклонение запишем аналогично (92):

$$\Delta_{NL} = \sum_{kh} (\hat{a}_2 - a_2^{Stokes})^2. \quad (97)$$

Тогда, в случае однослойных моделей, находя второе приближение \tilde{a}_2 или \hat{a}_2 как функцию, соответствующую переменной \tilde{u} или \hat{u} , оптимизируя погрешность (92), (97) по областям изменений $\Omega_1: 0,1 < kh < 5$, $\Omega_2: 0,1 < kh < 10$, получим следующие значения параметра β_1 :

Таблица 2. β_1 – параметр нелинейной оптимизации

	$0,1 < kh < 5$	$0,1 < kh < 10$
	β_1	β_1
\tilde{u}	0,095004	0,206961
\hat{u}	0,190006	0,413924

На рис. 5 в случае однослойной модели показано распределение отношений вторых приближений \tilde{a}_2 и \hat{a}_2 к функции a_2^{Stokes} , которые совпадают при разных значениях параметра β_1 .

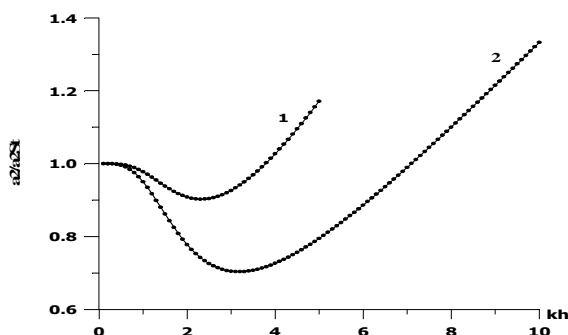


Рис. 5. Сравнение приближений однослойной модели \tilde{a}_2 и \hat{a}_2 к a_2^{Stokes} .

Кривая 1: $0,1 < kh < 5$, кривая 2: $0,1 < kh < 10$

В табл. 3, 4 приведены параметры нелинейной оптимизации $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ для двухмерных моделей, записанных в терминах \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 и \hat{u}_1, \hat{u}_2 соответственно (Δ_{NL} – погрешность нелинейной оптимизации).

Таблица 3. β – параметры нелинейной оптимизации по области Ω_1

$1 < kh < 5$	β_1	β_2	β_3	Δ_{NL}
\tilde{u}_1, \tilde{u}_2	-0,068882	-0,250290	-0,005275	0,003
\hat{u}_1, \hat{u}_2	-0,137766	-0,250291	-0,010550	0,003

Таблица 4. β – параметры нелинейной оптимизации по области Ω_2

$1 < kh < 10$	β_1	β_2	β_3	Δ_{NL}
\tilde{u}_1, \tilde{u}_2	0,107553	0,076485	0,056785	0,014
\hat{u}_1, \hat{u}_2	0,215107	0,076486	0,113571	0,014

На рис. 6 (двухслойная модель) показаны отношения \tilde{a}_2 и \hat{a}_2 к функции a_2^{Stokes} , которые совпадают при разных значениях параметров $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

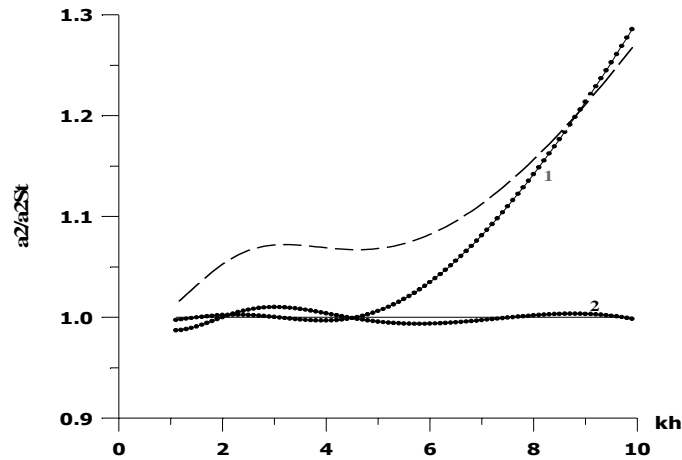


Рис. 6. Сравнение приближений двухслойной модели \tilde{a}_2 , \hat{a}_2 и a_2^{Stokes} . Пунктирная кривая – нелинейная аппроксимация при $\beta_1, \beta_2, \beta_3=0$, кривая 1: $1 < kh < 5$, кривая 2: $1 < kh < 10$

На рис. 6 кривые, соответствующие отношению $(\tilde{a}_2, \hat{a}_2)/a_2^{Stokes}$ при $\beta_1, \beta_2, \beta_3=0$, совпадают с приведенной в [14]. Кривые, соответствующие областям изменения $1 < kh < 5$ и $1 < kh < 10$, совпадают для двухслойной модели (64) – (66), записанной в переменных \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 и \hat{u}_1, \hat{u}_2 для различных наборов параметров $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Таким образом, соотношения (74), (75) или (78) дают взаимно однозначное соответствие между функциями \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 и \hat{u}_1, \hat{u}_2 , что приводит к взаимно однозначному соответствию между моделью (как однослойной, так и двухслойной), полученной в настоящей работе, и моделью [14–16].

3.4. Радиационные напряжения

Интегрируя по глубине уравнение вертикального момента (2) в каждом слое, запишем аналогично случаю одного слоя жидкости [18] среднее по пространству давление жидкости в каждом слое:

$$\bar{p}^{(1)} = \rho g(\bar{\zeta} - z) - \rho(w^{(1)})^2 + \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\bar{\zeta}} \rho u^{(1)} w^{(1)} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_z^{\bar{\zeta}} \rho v^{(1)} w^{(1)} dz, \quad (98)$$

$$\bar{p}^{(2)} = \rho g(\eta_0 + z) + \bar{p}_{\eta_0}^{(2)} - \rho(w^{(2)})^2 + \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\eta_0} \rho u^{(2)} w^{(2)} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_z^{\eta_0} \rho v^{(2)} w^{(2)} dz, \quad (99)$$

где $\eta_0 = \alpha_2 h$, $\eta - \eta_0 = \beta_2 \zeta$.

В каждом слое проинтегрируем по глубине уравнения горизонтальных моментов (1) с учетом уравнения неразрывности (3), а также граничных условий на дне и на свободной поверхности. Складывая полученные уравнения и принимая во внимание условие непрерывности горизонтальных и вертикальных компонент векторов скорости, а также давлений обоих слоев на

разделяющей поверхности $z_{\alpha_2} = \eta$, получим радиационные напряжения в следующем виде ($h_t = 0$):

$$S_{ij} = \int_{\eta_0}^{\bar{\zeta}} [\rho u_i^{(1)} u_j^{(1)} + \bar{p}^{(1)} \delta_{ij}] dz + \int_{-h}^{\eta_0} [\rho u_i^{(2)} u_j^{(2)} + \bar{p}^{(2)} \delta_{ij}] dz + \frac{1}{2} \rho g (\bar{\zeta}')^2 \delta_{ij} + \rho g (\eta_0 - \eta) (\bar{\zeta} - \eta) - \frac{1}{2} \rho g (h + \bar{\zeta})^2. \quad (100)$$

Полученное выражение для радиационных напряжений может быть записано с учетом (74), (75) или (78) в терминах \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 или \hat{u}_1, \hat{u}_2 .

4. Выводы

В настоящей работе дан вывод полностью нелинейной модели типа Буссинеска порядка $O(\mu^2)$ в терминах $\tilde{u} = \nabla \varphi(x, y, z_{\alpha_{1,2}})$ – градиента от задаваемого потенциала скорости на поверхностях слоя жидкости $z = z_{\alpha_{1,2}}$, определяемых свободными параметрами. Такой вывод является альтернативным работам [14] и [15], где однослойная и двухслойная модели типа Буссинеска с улучшенной дисперсией записаны в терминах скоростей $\hat{u} = [\nabla \varphi(x, y, z)]_{z=z_{\alpha_{1,2}}}$ на поверхностях слоя жидкости $z = z_{\alpha_{1,2}}$.

Сравнение линейных характеристик на примере однослойной модели типа Буссинеска, записанной в терминах \tilde{u} , \hat{u} и \bar{u} , показало равенство дисперсионных соотношений при сохранении порядка $O(\mu^2)$ и повышении порядка производных с помощью метода [4] в уравнении движения, записанном в терминах средней скорости \bar{u} .

Так как между скоростями \hat{u} и \tilde{u} существует взаимно однозначное соответствие, то, как следствие, получено равенство линейных и нелинейных характеристик двухслойных моделей, записанных в этих терминах скоростей. Тогда методы оптимизации для отыскания свободных параметров и область их определения $\Omega(kh)$ для одной из моделей могут быть применены к другой модели с последующим заданием найденных свободных параметров и области их определения $\Omega(kh)$ в качестве входных данных для программного кода.

Полученная однослойная модель (11), (17), (20) и двухслойная модель (64) – (66) типа Буссинеска порядка $O(\mu^2)$ в терминах градиента от задаваемого потенциала скорости на поверхностях слоя жидкости, определяемых свободными параметрами, могут быть использованы для решения практических инженерных задач.

Авторы благодарят к.ф.-м.н. Железняк М.И. за консультации при выполнении работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Advances in coastal and ocean engineering / Ed. P. Liu. – World Scientific Publishing. – 1999. – Vol. 5. – 336 p.

2. Dingemans M.W. Water wave propagation over uneven bottoms. Part 2. Non-linear wave propagation. – Danvers, USA, 1997. – P. 473 – 963.
3. Svendsen Ib A. Introduction to nearshore hydrodynamics // Advanced Series on Ocean Engineering. – University of Delaver, USA, 2006. – Vol. 24. – 722 p.
4. Madsen P.A., Schaffer H.A. Higer-order Boussinesq-type equations for surface gravity waves: derivation and analysis // Philosophical Trancations of Royal Society. – 1998. – Vol. 356. – P. 3123 – 3184.
5. Madsen P.A., Sorensen O.R. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part II. A slowly varying bathymetry // Coastal Engineering. – 1992. – Vol. 18. – P. 183 – 204.
6. Nwogu O. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation // J. Water Ways Port Coastal Ocean Engineering, ASCE. – 1993. – Vol. 119. – P. 618 – 638.
7. A fully non-linear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves / G. Wei, J.T. Kirby, S.T. Grilli et al. // J. Fluid Mech. – 1995. – Vol. 294. – P. 71 – 92.
8. Железняк М.И., Пелиновский Е.Н. Физико-математические модели наката цунами на берег // Сборник научных работ «Накат цунами на берег». – Горький, 1985. – С. 8 – 33.
9. Железняк М.И., Демченко Р.И. Нелинейно-дисперсионные эффекты генерации волн подвижками дна в прибрежной зоне // Тезисы докл. “Всесоюзное совещание по вычислительным методам в проблеме цунами”. – с. Шушенское, Красноярск, ВЦ СО АН СССР, 1987. – С. 52.
10. Демченко Р.И. и др. Нелинейно-дисперсионная модель типа Буссинеска с улучшенной дисперсией / Р.И. Демченко, П.В. Дикий, М.И. Железняк // Тезисы докл. «Математичне та імітаційне моделювання, МОДС-2007». – Киев, 2007. – С. 23 – 26.
11. Gobbi M. et al. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 2. Extension to $O(kh)^4$ / M. Gobbi, J.T. Kirby, G. Wei // Journal of Fluid Mechanics. – 2000. – Vol. 405. – P. 181 – 210.
12. Agnon Y. et al. A new approach to high order Boussinesq models / Y. Agnon, P.A. Madsen, H. Schaffer // Journal of Fluid Mechanics. – 1999. – Vol. 399. – P. 319 – 333.
13. Madsen P.A. et al. A new Boussinesq method for fully nonlinear waves from shallow to deep water / P.A. Madsen, H. B. Bingham, H. Liu // Journal of Fluid Mechanics. – 2002. – Vol. 462. – P. 1 – 30.
14. Lynett P, Liu PL-F. A two-layer approach to water wave modelling // Proc. of the Royal Society of London. – 2004. – Vol. 460. – P. 2637 – 2669.
15. Lynett P., Liu P. A numerical study of submarine-landslide-generated waves and run-up // Proc. of the Royal Society of London. – 2002. – Vol. 458. – P. 2885 – 2910.
16. Kennedy A. et al. Boussinesq-type equations with improved nonlinear behaviour / A. Kennedy, J. Kirby, Q. Chen // Wave Motion. – 2001. – Vol. 33. – P. 225 – 243.
17. Вольцингер Н.Е. и др. Длинноволновая динамика прибрежной зоны / Н.Е. Вольцингер, К.А. Клеванный, Е.Н. Пелиновский. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1989. – 271 с.
18. Phillips O.M. The dynamics of the upper ocean // Cambridge University Press-London. – England, 1966. – 421 p.

Стаття надійшла до редакції 02.10.2008