

Моделирование динамики кривошипно-шатунного механизма с упругими звеньями

В. И. Гуляев, А. Н. Иконников

Национальный транспортный университет, Киев, Украина

Предложена методика теоретического моделирования динамики быстроходных кривошипно-шатунных механизмов с упругоподатливыми звеньями, основанная на численном интегрировании дифференциальных уравнений гибридного типа. В результате численных исследований установлено, что учет упругой податливости звеньев механизмов по сравнению со случаем эквивалентного механизма с абсолютно жесткими звеньями приводит к заметному уточнению рассчитанных полей распределения внутренних усилий.

Ключевые слова: механизм, упругие звенья, динамика, гибридные уравнения, упругие колебания.

В последнее время значительно возрос интерес к проблеме теоретического моделирования динамики промышленных механизмов с учетом упругой податливости их звеньев. При этом в зависимости от назначения механизма рассматриваются две постановки задачи, отличающиеся формулировкой и, возможно, методикой решения. Так, выделяется класс робототехнических и манипуляционных устройств, при моделировании динамики которых основное внимание уделяется вопросам вычисления абсолютных и упругих перемещений элементов в связи с необходимостью обеспечения точности их позиционирования. Отметим, что задачи этого класса могут решаться с достаточной точностью путем перехода к системе с конечным числом степеней свободы с помощью модальных разложений.

Другой класс задач относится непосредственно к анализу динамики конструкций исполнительных механизмов быстроходных машин с целью минимизации напряжений, вызванных упругими колебаниями звеньев. В ряде случаев эти задачи оказываются более сложными, так как для изучения полей напряжений в звеньях механизмов неприемлемы модальные подходы и необходимы прямые методы вычисления полей перемещений и напряжений в системах с распределенными параметрами.

На практике эти задачи обычно ставятся приближенно и решаются в два этапа. Вначале исследуется динамика механизма с эквивалентными абсолютно жесткими звеньями и вычисляются скорости и ускорения их поступательных и вращательных движений. Затем определяются силы инерции и квазистатическим методом рассчитываются упругие напряжения в звеньях. Отметим, что при данном подходе не учитывается динамическое взаимодействие между переносным движением звеньев в целом и их упругими колебаниями. Как показано ниже, для быстроходного механизма такой учет приводит к заметному занижению пиковых значений его внутренних силовых факторов.

Задачи исследования упругих колебаний конструкций механизмов с учетом взаимодействия переносных и относительных движений оказываются более сложными. Основная особенность этих задач заключается в том,

что для описания таких движений приходится использовать не только обобщенные координаты и скорости (функции времени и их обыкновенные производные), задающие движение звеньев как твердых тел, но и распределенные параметры (функции независимых переменных времени и пространства и их частные производные), определяющие относительные упругие перемещения звеньев. Гироскопическое взаимодействие между этими видами движений исключает возможность их разделения и рассмотрения в отдельности. Одновременное присутствие в разрешающих уравнениях как обыкновенных, так и частных производных приводит к тому, что такие уравнения сравнительно малоизучены и относятся к так называемому гибричному типу. К настоящему времени не разработаны ни теоретические, ни численные методы анализа такого типа уравнений. Отметим, что исследование уравнений спектральными методами также затруднено, ввиду того что для рассматриваемых систем утрачивается понятие спектра частот собственных упругих колебаний, поскольку вследствие постоянного изменения взаимного положения звеньев в пространстве и уровня их преднапряженности спектр собственных значений и форм колебаний системы эволюционирует. Изменение конфигурации исполнительного механизма сопряжено также с существенной нелинейностью уравнений движения относительно искомым переменных.

В современной научной литературе подобные задачи рассматривают преимущественно для робототехнических систем. Основные типы моделей роботов с упругими звеньями и методы их исследования с помощью перехода к системам с конечным числом степеней свободы описаны в [1–4].

В данной работе предложена методика теоретического моделирования динамики кривошипно-шатунного механизма, основанная на изложенном ранее [5–7] подходе.

Постановка задачи и методика решения. Рассмотрим задачу о динамике двухзвенного механизма с упруго подагтивными стержневыми звеньями 1 и 2 под действием внешнего момента $M_1(t)$, приложенного к звену 1 в шарнире O (рис. 1).

Введем инерциальную систему координат Oxy и свяжем с каждым звеном в точках O_1 и O_2 локальные системы координат $O_1x_1y_1$, $O_2x_2y_2$ так, чтобы оси O_1x_1 и O_2x_2 касались осевых линий стержней 1 и 2 в точках O_1 , O_2 .

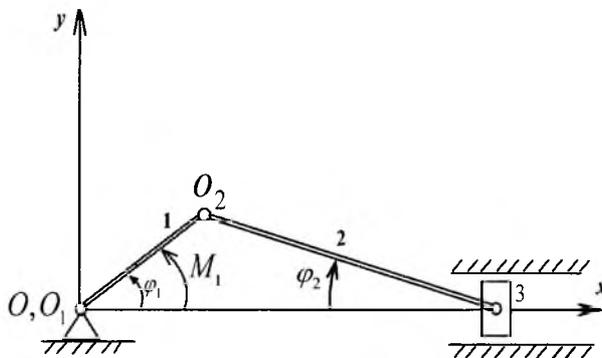


Рис. 1. Схема кривошипно-шатунного механизма.

Будем считать, что положения звеньев 1 и 2 определяются углами $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ между осями Ox и O_1x_1, O_2x_2 , отсчитываемыми в положительном направлении против хода часовой стрелки.

Динамическое равновесие упругих стержней 1 и 2 описывается уравнениями [7, 8]

$$\begin{aligned} E_i F_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 x_i} + \rho_i F_i a_{xi} &= 0; \\ E_i I_i \frac{\partial^4 v_i}{\partial^4 x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_i} N_i(x_i) \right] + \rho_i F_i a_{yi} &= 0 \quad (i=1, 2), \end{aligned} \quad (1)$$

где F_i – площадь поперечного сечения i -го стержня; I_i – момент инерции; E_i – модуль упругости; ρ_i – плотность; N_i – внутренняя продольная сила; a_{xi}, a_{yi} – компоненты вектора абсолютного ускорения в локальных системах координат; $u_i(x_i, t), v_i(x_i, t)$ – соответственно продольные и поперечные упругие смещения осевых точек стержней.

Полагая движение каждого элемента стержня сложным и пренебрегая высокочастотными продольными упругими колебаниями последнего, рассчитаем составляющие ускорений [8]:

$$\begin{cases} a_{x1} = -\omega_1^2 x_1; \\ a_{x2} = -\omega_1^2 l_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + (\varepsilon_1 l_1 + \ddot{v}_1) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \omega_2^2 x_2; \\ a_{y1} = \varepsilon_1 x_1 + \ddot{v}_1; \\ a_{y2} = -\omega_1^2 l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + [\varepsilon_1 l_1 + \ddot{v}_1] \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \varepsilon_2 x_2 + \ddot{v}_2, \end{cases} \quad (2)$$

где $\omega_i = \ddot{\varphi}_1$; $\varepsilon_i = \ddot{\varphi}_i$.

Отметим, что среди искомым функций имеются переменные $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$, зависящие только от времени t , и переменные $u_i(x_i, t), v_i(x_i, t)$, которые являются функциями координат x_i и времени t . Эти две группы функций описываются взаимозависимой системой уравнений с обыкновенными и частными производными. Поэтому такая система дифференциальных уравнений относится к дифференциальным уравнениям гибридного типа.

Поскольку системы координат $O_1x_1y_1, O_2x_2y_2$ жестко связаны с начальными точками соответствующих стержней, граничные условия при $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ таковы:

$$\begin{aligned} u_1(0) = v_1(0) = 0; \quad v'_1(0) = 0; \quad v''_1(0) = -M_1(t)/EI_1; \\ u_2(0) = v_2(0) = 0; \quad v'_2(0) = 0; \quad v''_2(0) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

(Здесь штрихом обозначено дифференцирование по x_1, x_2 .)

Из условий шарнирного соединения конца первого звена с началом второго следуют условия сопряжения продольных N_i и перерезывающих Q_i сил в звеньях:

$$\begin{aligned} N_2(0) &= N_1(l_1)\cos(\varphi_2 - \varphi_1) - Q_1(l_1)\sin(\varphi_2 - \varphi_1); \\ Q_2(0) &= N_1(l_1)\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + Q_1(l_1)\cos(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

После замены $N_i = E_i F_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ и $Q_i = E_i I_i \frac{\partial^3 v_i}{\partial x_i^3}$ представим эти равенства в развернутом виде

$$\begin{aligned} E_2 F_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} &= E_1 F_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=l_1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - E_1 I_1 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=l_1} \sin(\varphi_2 - \varphi_1); \\ E_2 I_2 \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_2^3} \Big|_{x_2=0} &= E_1 F_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=l_1} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + E_1 I_1 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=l_1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \quad (4)$$

В точке $x_2 = l_2$ звена 2 имеют место условие равенства нулю изгибающего момента $v_2''(l_2) = 0$ и уравнения движения ползуна 3 массой m_3 вдоль оси Ox (рис. 1):

$$\begin{aligned} m_3 \ddot{x} &= -Q_2 \sin \varphi_2 - N_2 \cos \varphi_1; \\ \Delta y &= 0. \end{aligned}$$

Выразим эти уравнения через перемещения звена 2 в точке $x_2 = l_2$:

$$\begin{aligned} m_3 [-l_1 \cos \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - l_1 \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 + \dot{u}_1 \cos \varphi_1 - \dot{v}_1 \sin \varphi_1 - \\ - l_2 \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - l_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + \dot{u}_2 \cos \varphi_2 - \dot{v}_2 \sin \varphi_2] + \\ + E_2 I_2 \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_2^3} \sin \varphi_2 + E_2 F_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cos \varphi_2 = 0; \\ l_1 \sin \varphi_1 + u_1 \sin \varphi_1 + v_1 \cos \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 + u_2 \sin \varphi_2 + v_2 \cos \varphi_2 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для интегрирования построенной системы разрешающих уравнений и граничных условий используется неявная разностная схема Хуболта, в соответствии с которой производные некоторой функции X по времени $\frac{\partial X}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$ в момент времени $t + \Delta t$ заменяются их конечно-разностными аналогами [7]:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t + \Delta t) &= \dot{X}_{t+1} = (11X_{t+1} - 18X_t + 9X_{t-1} - 2X_{t-2})/6\Delta t; \\ \ddot{X}(t + \Delta t) &= \ddot{X}_{t+1} = (2X_{t+1} - 5X_t + 4X_{t-1} - 4X_{t-2})/(\Delta t)^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где Δt – шаг интегрирования по времени; $X_{t+1} = X(t + \Delta t)$; $X_t = X(t)$; $X_{t-1} = X(t - \Delta t)$; $X_{t-2} = X(t - 2\Delta t)$.

После учета этих замен система уравнений с частными производными (1), (2) в момент времени $t + \Delta t$ приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}
 E_1 F_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \Big|_{t+1} + \rho_1 F_1 x_1 \omega_1^2 \Big|_{t+1} = 0; \\
 E_1 I_1 \frac{\partial^4 v_1}{\partial x_1^4} \Big|_{t+1} + \frac{\rho_1 F_1}{\Delta t^2} (2v_1|_{t+1} - 5v_1|_t + 4v_1|_{t-1} - v_1|_{t-2}) + \rho_1 F_1 x_1 \varepsilon_1 \Big|_{t+1} - \\
 - E_1 F_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_t \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \Big|_{t+1} - E_1 F_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \Big|_t \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Big|_{t+1} = 0; \\
 E_2 F_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \Big|_{t+1} = -\rho_2 F_2 x_2 \omega_2^2 \Big|_{t+1} - \rho_2 F_2 l_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \omega_1^2 \Big|_{t+1} + \\
 + \rho_2 F_2 l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \varepsilon_1 \Big|_{t+1} + \frac{\rho_2 F_2}{\Delta t^2} [2v_1(l_1)|_{t+1} - 5v_1(l_1)|_t + \\
 + 4v_1(l_1)|_{t-1} - v_1(l_1)|_{t-2}] \sin(\varphi_2 - \varphi_1); \\
 E_2 I_2 \frac{\partial^4 v_2}{\partial x_2^4} \Big|_{t+1} + \frac{2\rho_2 F_2}{\Delta t^2} v_2|_{t+1} - E_2 F_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_t \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \Big|_{t+1} - E_2 F_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \Big|_t \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Big|_{t+1} = \\
 = -\frac{\rho_2 F_2}{\Delta t^2} (-5v_2|_t + 4v_2|_{t-1} - v_2|_{t-2}) - \rho_2 F_2 l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \omega_1^2 \Big|_{t+1} - \\
 - \rho_2 F_2 l_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \varepsilon_1 \Big|_{t+1} - \rho_2 F_2 x_2 \varepsilon_2 \Big|_{t+1} - \frac{\rho_2 F_2}{\Delta t^2} [2v_1(l_1)|_{t+1} - \\
 - 5v_1(l_1)|_t + 4v_1(l_1)|_{t-1} - v_1(l_1)|_{t-2}] \cos(\varphi_2 - \varphi_1).
 \end{cases} \quad (7)$$

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7) с граничными условиями (3)–(5) на каждом шаге времени $t + \Delta t$ строим с использованием метода начальных параметров [9], реализация которого в данном случае затруднена из-за гибридного типа исходной системы дифференциальных уравнений (1), (2). Это проявляется в наличии в (7) неизвестных функций времени $\varepsilon_1(t) = \ddot{\varphi}_1(t)$, $\varepsilon_2(t) = \ddot{\varphi}_2(t)$. Поэтому применительно к рассматриваемой задаче модифицируем метод начальных параметров, введя в число неизвестных параметров на каждом шаге не только недостающие начальные условия, но и неизвестные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Такой прием позволяет строить решение системы (7) в виде [5, 6]

$$\begin{cases}
 u_1(x_1) = u_1^1(x_1)C_1 + u_1^{f_1}(x_1); \\
 v_1(x_1) = v_1^2(x_1)C_2 + v_1^3(x_1)C_3 + v_1^{\varepsilon_1}(x_1)\varepsilon_1 + v_1^{f_1}(x_1); \\
 u_2(x_2) = u_2^2(x_2)C_2 + u_2^3(x_2)C_3 + u_2^4(x_2)C_4 + u_2^{\varepsilon_1}(x_2)\varepsilon_1 + u_2^{f_2}(x_2);
 \end{cases} \quad (8a)$$

$$\begin{cases} v_2(x_2) = v_2^2(x_2)C_2 + v_2^3(x_2)C_3 + v_2^5(x_2)C_5 + v_2^6(x_2)C_6 + \\ + v_2^{\varepsilon_1}(x_2)\varepsilon_1 + v_2^{\varepsilon_2}(x_2)\varepsilon_2 + v_2^{f_2}(x_2), \end{cases} \quad (86)$$

где $u_1^1(x_1)$, $v_1^2(x_1)$, $v_1^3(x_1)$, $u_2^2(x_2)$, $u_2^3(x_2)$, $u_2^4(x_2)$, $v_2^2(x_2)$, $v_2^3(x_2)$, $v_2^5(x_2)$, $v_2^6(x_2)$ – частные решения однородных дифференциальных уравнений, соответствующих системе (7), при единичных начальных условиях в $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ для каждого из недостающих начальных условий; $v_1^{\varepsilon_1}(x_1)$, $u_2^{\varepsilon_1}(x_2)$, $v_2^{\varepsilon_1}(x_2)$, $v_2^{\varepsilon_2}(x_2)$ – частные решения системы (7) при нулевых начальных условиях и отброшенных в правых частях слагаемых, кроме одного, содержащего соответствующий множитель ε_i , которому при построении частного решения придается единичное значение; $u_1^{f_1}(x_1)$, $v_1^{f_1}(x_1)$, $u_2^{f_2}(x_2)$, $v_2^{f_2}(x_2)$ – частные решения системы (7) при нулевых начальных условиях и отброшенных в правых частях слагаемых, содержащих множители ε_1 , ε_2 ; C_1, \dots, C_6 – константы, две из которых (C_2, C_5) известны, остальные являются искомыми; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – искомые значения угловых ускорений звеньев 1, 2 в момент времени $t + \Delta t$.

Функции частных решений в правых частях системы (8) вычисляются методом Рунге-Кутты. С их помощью на основе граничных условий (3)–(5) формируется система шести линейных алгебраических уравнений для определения шести неизвестных ($C_1, C_3, C_4, C_6, \varepsilon_1, \varepsilon_2$). Подсчитав эти величины, находим деформированное состояние (8) звеньев 1, 2 на шаге $t + 1$. Затем, пользуясь методом предиктор-корректор [10] для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\omega}_1 = \varepsilon_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2, \quad \dot{\omega}_2 = \varepsilon_2, \quad (9)$$

вычисляем значения $\omega_1|_{t+2}$, $\varphi_1|_{t+2}$, $\omega_2|_{t+2}$, $\varphi_2|_{t+2}$, переходим к шагу $t + 2$ интегрирования системы (7) и т.д.

Результаты вычислений. Для проверки эффективности предложенного подхода и анализа влияния учета упругой податливости звеньев рассмотренного механизма на рассчитанные значения функций, определяющих его динамическое поведение, исследуем кривошипный механизм в предположении абсолютной жесткости звеньев. В этом случае кривошипный механизм можно представить в виде системы с одной степенью свободы, его движение описывается уравнением Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = M_1(t), \quad (10)$$

где T – кинетическая энергия системы; $q \equiv \varphi_1$ – обобщенная координата; $M_1(t)$ – внешний момент, играющий в данном случае роль обобщенной силы, соответствующей обобщенной координате q .

Представим кинетическую энергию системы в виде

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \quad (11)$$

где T_1 – кинетическая энергия кривошипа; T_2 – кинетическая энергия шатуна; T_3 – кинетическая энергия ползуна.

Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = \frac{\rho_1 F_1 l_1^3}{6} \dot{\varphi}_1^2; \\ T_2 = \frac{1}{2} \rho_2 F_2 l_1^2 l_2 \left\{ \frac{l_2^2 \cos^2 \varphi_1}{12(l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi_1)} + \right. \\ \left. + \left[\sin^2 \varphi_1 \left(1 + \frac{l_1 \cos \varphi_1}{2\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi_1}} \right)^2 + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi_1 \right] \right\} \dot{\varphi}_1^2; \\ T_3 = \frac{m_3 l_1^2 \sin^2 \varphi_1 (l_1 \cos \varphi_1 + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi_1})^2}{2(l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi_1)} \dot{\varphi}_1^2. \end{array} \right. \quad (12)$$

Подставляя (11), (12) в (10) и выполняя операции дифференцирования, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $\varphi_1(t)$. (Ввиду большой громоздкости оно не приводится.)

В качестве примера рассмотрим двухзвенный механизм с параметрами: $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $l_1 = 0,4$ м; $l_2 = 1$ м; $F_1 = 4 \cdot 10^{-4}$ м²; $F_2 = 1,6 \cdot 10^{-3}$ м²; $I_1 = 1,333 \cdot 10^{-8}$ м⁴; $I_2 = 2,133 \cdot 10^{-7}$ м⁴; $\rho_1 = \rho_2 = 7800$ кг/м³; $m_3 = 5$ кг.

При выборе вида нагрузки, действующей на двухзвенник, будем исходить из того, что упругие колебания в механизмах достигают наибольшей интенсивности в таких переходных режимах работы, как разгон и торможение звеньев механизма и изменение нагрузки. В связи с этим полагаем, что движение механизма происходит под действием знакопеременного момента $M_1(t) = 0,1 \sin(0,1t)$ Н·м при начальных $\varphi_1(0) = 0$, $\dot{\varphi}_1(0) = 0$.

Численное интегрирование системы (1)–(5) при выбранной функции момента $M_1(t)$ осуществлялось по неявной разностной схеме (7) на интервале $0 \leq t \leq 70$ с с шагом по времени $\Delta t = 0,5 \cdot 10^{-2}$ с. Частные решения уравнений (7) строились методом Рунге-Кутты с разбиением отрезков $0 \leq x_1 \leq l_1$ и $0 \leq x_2 \leq l_2$ на 200 конечно-разностных участков. При проверке сходимости вычислений шаги дискретизации по времени и пространственным переменным уменьшались до значений $\Delta t = 0,25 \cdot 10^{-2}$ с, $\Delta x_1 = l_1/400$, $\Delta x_2 = l_2/400$. Результаты счета практически совпали.

Интегрирование уравнения Лагранжа 2-го рода (10) проводилось при заданных начальных условиях и функции $M_1(t)$ методом Рунге-Кутты с шагом по времени $\Delta t = 0,2 \cdot 10^{-2}$ с.

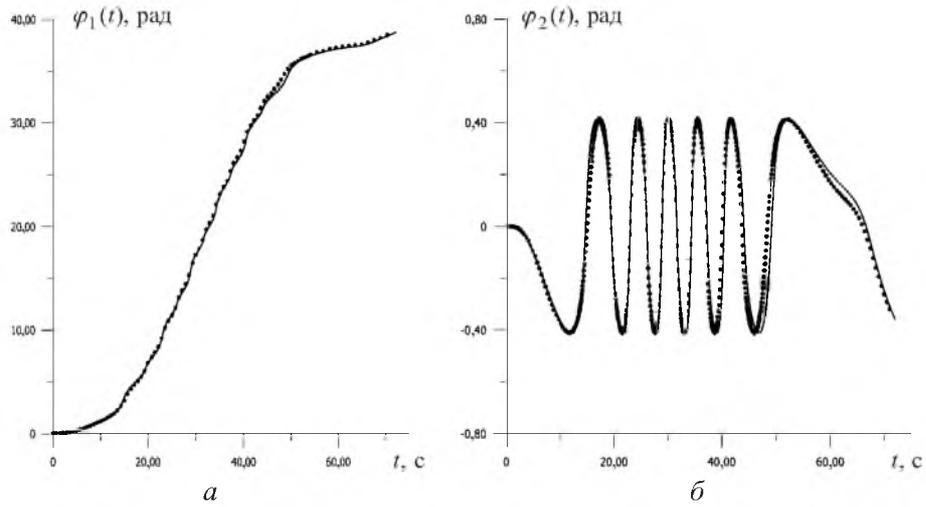


Рис. 2. Изменение во времени углов поворота звеньев 1 (а) и 2 (б). (Здесь и на рис. 3, 4: сплошные линии – упругие звенья; пунктирные – абсолютно жесткие звенья.)

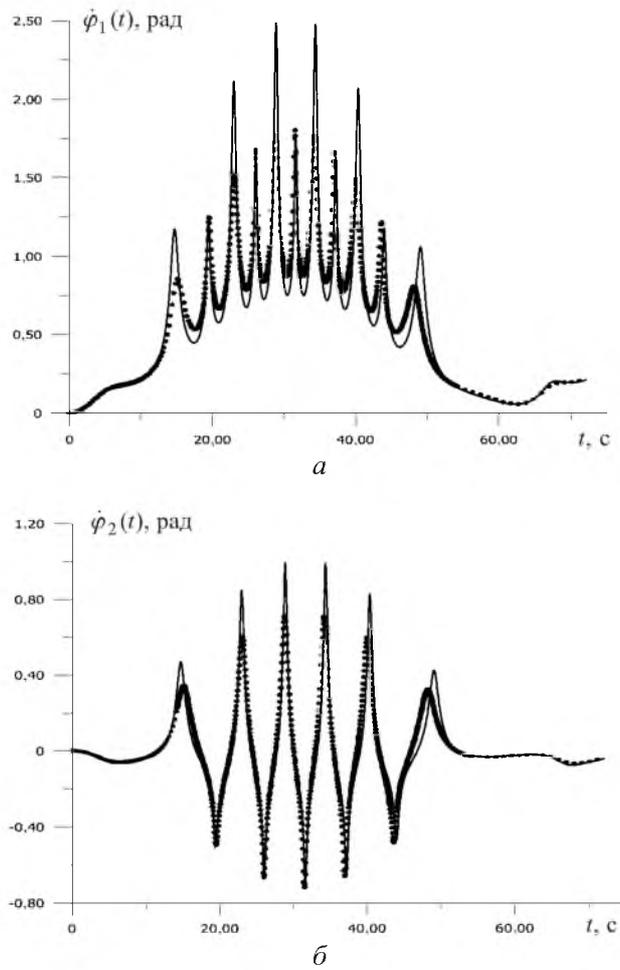


Рис. 3. Изменение во времени угловых скоростей звеньев 1 (а) и 2 (б).

На рис. 2 показано изменение во времени углов поворота $\varphi_i(t)$ ($i=1, 2$) звеньев на отрезке времени, включающем около двух периодов разгона и торможения системы. На рассмотренном участке времени кривошип успевает сделать шесть оборотов, и его полный угол поворота φ_1 приближается к 41 рад. При этом вращательное движение шатуна носит колебательный характер в пределах $-0,415 \leq \varphi_2 \leq 0,415$ рад. Как следует из рис. 2,а, функции $\varphi_1(t)$ для упругих и абсолютно жестких звеньев довольно близко совпадают на всем рассмотренном интервале времени, в то время как для угла $\varphi_2(t)$ имеются некоторые различия на отрезке времени $50 \leq t \leq 70$ с, когда движение механизма замедляется и почти приостанавливается в конце первого периода действия момента $M_1(t)$. Хотя функции угловых скоростей $\dot{\varphi}_1(t)$ и $\dot{\varphi}_2(t)$ и обладают качественным сходством, все же их экстремальные величины значительно отличаются (рис. 3), особенно, когда момент $M_1(t)$ и функции $\dot{\varphi}_1(t)$, $\dot{\varphi}_2(t)$ достигают максимума.

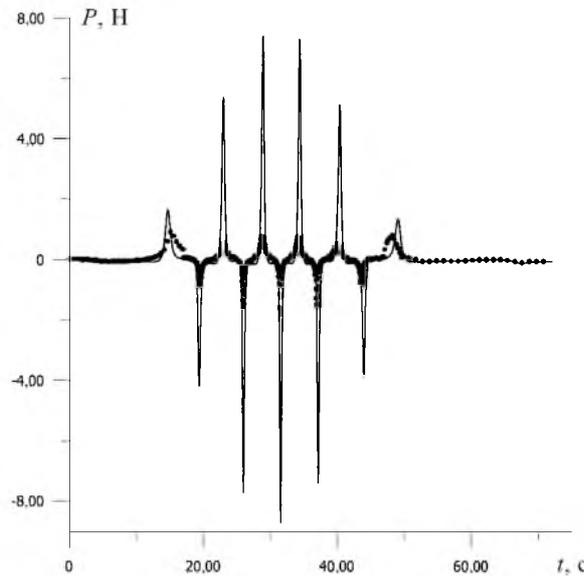


Рис. 4. Изменение силы, действующей на ползун 3 (рис. 1).

Еще большее различие имеет место между функциями внутренних усилий в стержнях. На рис. 4 представлено изменение силы, действующей со стороны звена 2 на ползун 3 в направлении оси Ox . Как видно, экстремальные значения силы для упругих и абсолютно жестких звеньев могут отличаться более чем в четыре раза, причем для механизма с упругими звеньями, когда колебания системы наиболее интенсивны, они существенно больше.

Выводы

1. Предложена методика численного исследования динамики плоского механизма с упругоподатливыми звеньями.

2. Сформулирована система дифференциальных уравнений гибридного типа, содержащая обыкновенные и частные производные по независимым переменным.

3. Разработан алгоритм численного интегрирования построенной системы, основанный на модификации неявной разностной схемы по времени и метода начальных параметров по пространственным переменным.

4. Учет упругой податливости звеньев механизмов при исследовании их динамики приводит к заметному уточнению функций угловых скоростей и ускорений, а также полей распределения в них внутренних усилий. Для механизма с упругими звеньями экстремальные значения этих функций существенно возрастают.

Резюме

Запропоновано методику числового інтегрування диференціальних рівнянь гібридного типу, які описують динаміку швидкохідних кривошипно-шатунних механізмів із пружно-податливими ланками. У результаті числових досліджень встановлено, що врахування пружної податливості ланок дозволяє істотно уточнити розраховані поля розподілу внутрішнього напруження в його ланках порівняно з випадком еквівалентного механізму з абсолютно жорсткими ланками.

1. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г. Манипуляционные роботы. – М.: Наука, 1989. – 256 с.
2. Елисеев С. В., Кузнецов Н. К., Лукьянов А. В. Управление колебаниями роботов. – Новосибирск: Наука, 1990. – 320 с.
3. Charnik B. V., Heppler G. R., and Aplevich J. D. Modeling impact on a one-link flexible robotic arm // IEEE Transaction on Robotics and Automation. – 1999. – 7, No. 4. – P. 18 – 27.
4. Xu Jianke and Bainum Peleer M. Dynamics of flexible multilink robots arms with mass center offset // Acta Astronaut. – 1995. – 36, No. 2. – P. 48 – 59.
5. Гуляев В. И., Голенков В. Н. Динамика упругого звена манипулятора. – Киев, 1996. – 11 с. – Деп. в УкрІНТЕІ 03.01.96, № 37. – Ук96.
6. Гуляев В. И., Завражина Т. В. Динамика управляемых движений упругого робота-манипулятора // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 5. – С. 19 – 28.
7. Gulyaev V. I. and Zavrzhina T. V. Dynamics of flexible multi-link cosmic robot-manipulator // J. Sound and Vibration. – 2000. – 243, No. 4. – P. 641 – 657.
8. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
9. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Физматгиз, 1974. – 831 с.

Поступила 19. 09. 2001