КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 539.3

Вариационный принцип для температурной задачи теории упругости в напряжениях

Н. М. Бородачев, Н. И. Савченко

Киевский международный университет гражданской авиации, Киев, Украина

При расчетах деталей и элементов конструкций на прочность часто используется вариационная формулировка задачи. В работе предлагается вариационный принцип, уравнениями Эйлера которого являются дифференциальные уравнения термоупругости в напряжениях.

Ключевые слова: температурная задача теории упругости, вариационный принцип, термодинамический потенциал.

Вариационные принципы минимума потенциальной энергии и минимума дополнительной работы впервые обобщены Майзелем [1] на случай температурной задачи теории упругости. Вариационным принципам термоупругости посвящены исследования [2–5].

Температурные задачи теории упругости можно формулировать в перемещениях и в напряжениях [6]. Оба подхода могут основываться как на дифференциальных уравнениях, так и на вариационных принципах.

При формулировании задачи в перемещениях используются либо дифференциальные уравнения термоупругости в перемещениях (включая граничные условия), либо вариационный принцип минимума потенциальной энергии системы, обобщенный на случай учета температурных слагаемых [7].

Формулировать задачу термоупругости в напряжениях целесообразно при решении второй краевой задачи (статическая), т.е. когда на поверхности тела задается распределение поверхностных сил. При решении задачи термоупругости в напряжениях основой служат уравнения статики в объеме и условия совместности. Поэтому из вариационного принципа для этой задачи в качестве уравнений Эйлера должны одновременно получаться как уравнения равновесия, так и условия совместности в напряжениях. Ниже формулируется такой вариационный принцип.

Рассмотрим линейно-упругое тело, которое под действием температурного поля, а также массовых и поверхностных сил в состоянии равновесия занимает объем V. Через O обозначим поверхность, ограничивающую этот объем.

Следуя Лурье [7], полагаем, что в задаче теории упругости сохраняется статическая постановка, т.е. пренебрегаем изменениями напряженного состояния во времени, вызванными нестационарностью температурного поля (температура удовлетворяет Фурье). Поэтому температуру можно рассматривать как неварьируемый внешний фактор при варьировании напряженного состояния. Задача теплопроводности решается независимо от задачи теории упругости.

В случае второй краевой задачи имеем

$$\mathbf{n} \cdot \hat{T}\Big|_O = \mathbf{F}, \tag{1}$$

где $\hat{T}$ – тензор напряжений; $\mathbf{F}$ – вектор поверхностной силы; $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности тела. (Обозначения соответствуют принятым в работе [7].)

Краевую задачу термоупругости можно сопоставить с эквивалентной задачей вариационного исчисления. Запишем функционал, из условия стационарности которого в качестве уравнений Эйлера вытекали бы дифференциальные уравнения температурной задачи теории упругости в напряжениях (уравнение статики и условие совместности).

Рассмотрим функционал J над тензором напряжений $\hat{T}$ и над вектором перемещения $\mathbf{u}$ как над независимыми величинами:

$$J = \iiint\limits_V (\hat{T} \cdot\cdot \operatorname{def} \mathbf{u} - G) d\tau - \iiint\limits_V \rho \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}\, d\tau - \iint\limits_O \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}\, do, \tag{2}$$

где G – потенциал Гиббса; $\mathbf{K}$ – вектор массовой силы, отнесенной к единице массы среды; ρ – плотность. Согласно [7] имеем

$$G = A(\sigma) + \alpha\theta\sigma + 3\alpha^2\theta^2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} + \int\limits_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{c(\xi)}{\xi}(\theta - \xi) d\xi; \tag{3}$$

$$A(\sigma) = \frac{1}{4\mu}\left[I_1(\hat{T}^2) - \frac{\nu}{1+\nu} I_1^2(\hat{T}) \right]; \tag{4}$$

$$\operatorname{def} \mathbf{u} = \frac{1}{2}[(\nabla \mathbf{u})^* + \nabla \mathbf{u}], \quad \Theta = \Theta_0 + \theta, \tag{5}$$

где $A(\sigma)$ – удельная потенциальная энергия деформации как функция компонент тензора напряжений; μ – постоянная Ламе; ν – коэффициент Пуассона; $I_1(\hat{T})$ – первый инвариант тензора напряжений; $\sigma = I_1(\hat{T})$; θ – температура, отсчитываемая от температуры натурального состояния, т.е. состояния, в котором среда не напряжена; Θ_0 – абсолютная температура в натуральном состоянии тела; Θ – абсолютная температура; c – теплоемкость при постоянном объеме; α – коэффициент линейного расширения.

Свойство стационарности функционала J в положении равновесия линейно-упругого тела запишем в виде

$$\delta J = 0. \tag{6}$$

Используя (2), (6) получаем

$$\iiint\limits_V [\delta(\hat{T}\cdot\cdot\operatorname{def}\mathbf{u})-\delta G]d\tau-\iiint\limits_V \delta(\rho\mathbf{K}\cdot\mathbf{u})d\tau-\iint\limits_O \delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u})do. \qquad (7)$$

В объеме V

$$\delta\rho\mathbf{K}=0,\quad \delta(\rho\mathbf{K}\cdot\mathbf{u})=\rho\mathbf{K}\cdot\delta\mathbf{u}, \qquad (8)$$

на поверхности O

$$\delta\mathbf{F}=0,\quad \delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u})=\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{u}. \qquad (9)$$

С учетом (8), (9) уравнение (7) принимает вид

$$\iiint\limits_V [(\delta\hat{T}\cdot\cdot\operatorname{def}\mathbf{u})+(\hat{T}\cdot\cdot\operatorname{def}\delta\mathbf{u})-\delta G]d\tau-$$

$$-\iiint\limits_V \rho\mathbf{K}\cdot\delta\mathbf{u}\,d\tau-\iint\limits_O \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{u}\,do=0. \qquad (10)$$

Поскольку $\hat{T}=\hat{T}^*$, будет справедливым соотношение

$$\hat{T}\cdot\cdot\operatorname{def}\delta\mathbf{u}=\operatorname{div}(\hat{T}\cdot\delta\mathbf{u})-\delta\mathbf{u}\cdot\operatorname{div}\hat{T}. \qquad (11)$$

Далее имеем

$$\delta G=\delta A+\alpha\theta\delta I_1(\hat{T}). \qquad (12)$$

Можно показать, что

$$\delta A(\delta)=\frac{1}{2\mu}\left[\hat{T}-\frac{\nu}{1+\nu}I_1(\hat{T})\hat{E}\right]\cdot\cdot\delta\hat{T};\quad \delta I_1(\hat{T})=\hat{E}\cdot\cdot\delta\hat{T}, \qquad (13)$$

где $\hat{E}$ – единичный тензор.

На основании (10)–(13) запишем

$$\iiint\limits_V \left\{\operatorname{def}\mathbf{u}-\frac{1}{2\mu}\left[\hat{T}-\frac{\nu}{1+\nu}\hat{E}I_1(\hat{T})\right]-\alpha\theta\hat{E}\right\}\cdot\cdot\delta\hat{T}d\tau-$$

$$-\iiint\limits_V (\operatorname{div}\hat{T}+\rho\mathbf{K})\cdot\delta\mathbf{u}\,d\tau+\iint\limits_O (\mathbf{n}\cdot\hat{T}-\mathbf{F})\cdot\delta\mathbf{u}\,do=0. \qquad (14)$$

При получении (14) было также использовано известное соотношение

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}(\hat{T}\cdot\delta\mathbf{u})d\tau=\iint\limits_O \mathbf{n}\cdot\hat{T}\cdot\delta\mathbf{u}\,do.$$

Из (14) вследствие произвольности вариаций $\delta\hat{T}$, $\delta\mathbf{u}$ в объеме V и $\delta\mathbf{u}$ на поверхности O имеем уравнения в объеме V

$$\operatorname{div}\hat{T} + \rho\mathbf{K} = 0; \tag{15}$$

$$\operatorname{def}\mathbf{u} = \frac{1}{2\mu}\left[\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu}\hat{E}I_1(\hat{T})\right] + \alpha\theta\hat{E} \tag{16}$$

и краевое условие

$$\mathbf{n}\cdot\hat{T}\big|_O = \mathbf{F}. \tag{17}$$

Уравнение (15) является дифференциальным уравнением равновесия (уравнение статики). Выражение (16) можно представить следующим образом:

$$\operatorname{Ink}\left\{\left[\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu}I_1(\hat{T})\hat{E}\right] + 2\mu\alpha\theta\hat{E}\right\} = 0, \tag{18}$$

где

$$\operatorname{Ink}\hat{Q} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\hat{Q})^*.$$

Выражение (18) – условие совместности в напряжениях. Используя (15), условие совместности (18) можно представить и в таком виде:

$$\nabla^2\hat{T} + \frac{1}{1+\nu}\nabla\nabla\sigma + 2\rho\operatorname{def}\mathbf{K} + E\frac{\nu}{1-\nu}\rho\operatorname{div}\mathbf{K} + 2\mu\alpha\left(\nabla\nabla\theta + \frac{1+\nu}{1-\nu}\hat{E}\nabla^2\theta\right) = 0. \tag{19}$$

Таким образом, из условия стационарности функционала (2) в качестве уравнений Эйлера получены уравнение статики (15) и условие совместности (18), а в качестве натурального краевого условия – статическое краевое условие (17).

Выше рассмотрен случай второй (статической) краевой задачи. Не представляет принципиальных затруднений распространение полученных результатов и на другие типы краевых задач термоупругости.

В том частном случае, когда температурные слагаемые не учитываются, в функционал (2) вместо потенциала Гиббса G следует подставить удельную потенциальную энергию деформации $A(\sigma)$.

Р е з ю м е

При розрахунках деталей та елементів конструкцій на міцність часто використовується варіаційне формулювання задачі. Пропонується варіаційний принцип, рівняннями Ейлера якого є диференціальні рівняння термопружності в напруженнях.

1. *Майзель В. М.* Температурная задача теории упругости. – Киев: Изд-во АН УССР, 1951. – 152 с.
2. *Herrmann G.* On variational principles in thermoelasticity and heat conduction // Quart. Appl. Math. – 1963. – **21**. – P. 151 – 155.
3. *Parkus H.* Variational principles in thermo and magnetoelastikity // Courses and lectures, No. 58. – Springer-Verlag: Vien, New York, 1972. – 47 p.
4. *Kratzig W. B. and Waltersdorf K. P.* On thermodynamics of deformation and variational methods in reversible thermoelasticity // Variational methods in engineering / Eds. C. A. Brebbia and H. Tottenham. – Southampton University Press. – 1975. – Vol. 1. – P. 43 – 56.
5. *Балабух Л. И., Шаповалов Л. А.* О вариационных уравнениях термоупругости // Прикл. математика и механика. – 1960. – **24**, вып. 4. – С. 703 – 707.
6. *Boley B. A. and Weiner J. H.* Theory of Thermal Stresses. – New York, London: John Wiley, 1960. – 517 p.
7. *Лурье А. И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.

Поступила 30. 10. 2000