УДК 539.375

Пространственная весовая функция для трещины в виде полосы применительно к задаче термоупругости

Н. М. Бородачев

Киевский международный университет гражданской авиации, Киев, Украина

Построена пространственная весовая функция и получено выражение для определения коэффициента интенсивности напряжений нормального отрыва применительно к трещине в форме полосы в случае термоупругой задачи.

Рассмотрим линейно-упругое изотропное неограниченное тело. При этом воспользуемся декартовой системой координат x_1, x_2, x_3. В теле имеется плоская внутренняя трещина, занимающая область S в плоскости $x_3 = 0$. Граничный контур Γ – плоская кривая. Положительную ориентацию S^+ поверхности S будем связывать с $x_3 = 0^+$, отрицательную ориентацию S^- – с $x_3 = 0^-$. Рассмотрим только (наиболее важный с прикладной точки зрения) случай трещины нормального отрыва.

Пусть на обе части поверхности трещины действует внутреннее давление $p(x_1, x_2)$, перпендикулярное к плоскости трещины. Кроме того, задан закон изменения температуры $T(x_1, x_2)$ поверхностей трещины (величина $T(x_1, x_2)$ отсчитывается от известной начальной температуры).

Считаем, что имеет место симметрия относительно плоскости $x_3 = 0$. Тогда поставленная задача сводится к решению термоупругой задачи для полупространства $x_3 \geq 0$ со следующими граничными условиями при $x_3 = 0$:

$$\begin{cases} \sigma_{33} = -p(x_1, x_2) & \text{при} \quad (x_1, x_2) \in S^+; \\ u_3 = 0 & \text{при} \quad (x_1, x_2) \notin S^+; \\ \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0 & \text{при} \quad |x_1| < \infty, \ |x_2| < \infty; \\ T = T(x_1, x_2) & \text{при} \quad (x_1, x_2) \in S^+; \\ \dfrac{\partial T}{\partial x_3} = 0 & \text{при} \quad (x_1, x_2) \notin S^+. \end{cases} \tag{1}$$

Дифференциальное уравнение равновесия с учетом температурных слагаемых имеет вид [1]

$$\frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla^2 \mathbf{u} - 2\frac{1+\nu}{1-2\nu} \operatorname{grad} \alpha T = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещений; ν – коэффициент Пуассона; T – температура, отсчитываемая от натурального состояния; α – коэффициент линейного расширения.

При стационарном распределении температуры

$$\nabla^2 T = 0. \tag{3}$$

Поскольку рассматривается линейная задача, можно отдельно изучать действие нагрузки и температурного поля, а затем результаты складывать. Решение задачи, когда к поверхностям трещины приложены нагрузки, полагаем известным. Ниже рассмотрим задачу, связанную с влиянием только температурного поля.

Распределение перемещений, деформаций и напряжений в упругом теле можно найти путем решения термоупругой краевой задачи (1)–(3). Однако в линейной механике разрушения наибольший интерес представляет коэффициент интенсивности напряжений (КИН). КИН нормального отрыва в любой точке M граничного контура трещины Γ можно определить по формуле

$$K_1(M) = \iint_{S^+} K_1(M;Q)p(Q)dS + \iint_{S^+} K_1^T(M;Q)T(Q)dS, \tag{4}$$

где $M \in \Gamma$; $Q \in S^+$. Величины $K_1(M;Q)$ и $K_1^T(M;Q)$ называются весовыми функциями, позволяющими находить КИН в зависимости от давления $p(Q)$ и температуры $T(Q)$ на поверхностях трещины S^+ и S^- соответственно.

Таким образом, если известны весовые функции $K_1(M;Q)$ и $K_1^T(M;Q)$, то КИН $K_1(M)$ в зависимости от давления $p(Q)$ и температуры $T(Q)$ на поверхностях трещины можно найти по формуле (4).

В работе [2] показано, что

$$K_1(M;Q) = K^{1/2}(M)N(M;Q)\delta_n u_3(Q)/U(Q). \tag{5}$$

Формула (5) дает самое общее представление пространственной весовой функции $K_1(M;Q)$. Здесь u_3 – проекция вектора перемещений на ось x_3; $\delta_n u_3$ – вариация перемещения поверхности трещины S^+, вызванная вариацией контура трещины δn; $K(M)$ – кривизна граничной кривой Γ в точке M; $N(M;Q)$ – гармоническая функция в области S^+, которая выражает гармоническую функцию $U(Q)$ внутри контура Γ через значения на граничном контуре $f(M)$, т.е.

$$U(Q) = \int_\Gamma f(M)N(M;Q)ds, \tag{6}$$

где функция $f(M)$ задана на кривой Γ,

$$f(M) = \frac{\pi(1-\nu)}{2\mu} K^{1/2}(M)K_1(M)\delta n(M). \tag{7}$$

Формула (5) дает самое общее представление для весовой функции $K_1(M;Q)$. Она применима, когда кривизна граничного контура трещины является переменной величиной. Однако в некоторых случаях кривизна постоянна (круговая трещина) и даже равна нулю (трещина в виде полосы). В этих случаях формулу (5) можно упростить. При $K(M)=K=\text{const}$ формула (7) принимает вид

$$f(M)=\frac{\pi(1-\nu)}{2\mu}K^{1/2}K_1(M)\delta n(M).$$

Подставляя эту формулу в (6), получим

$$U(Q)=K^{1/2}U^*(Q), \tag{8}$$

где

$$U^*(Q)=\frac{\pi(1-\nu)}{2\mu}\int\limits_\Gamma N(M;Q)K_1(M)\delta n(M)ds. \tag{9}$$

С учетом соотношения (8) формула (5) преобразуется следующим образом:

$$K_1(M;Q)=N(M;Q)\delta_n u_3(Q)/U^*(Q). \tag{10}$$

Формула (10) дает общее представление пространственной весовой функции при постоянной кривизне граничного контура трещины.

Применим общую формулу (10) к построению пространственной термоупругой весовой функции для неограниченного упругого тела с трещиной в виде полосы. Подобная задача без учета влияния температуры рассматривалась в [3].

Решение поставленной задачи основывается на трех предположениях: температуру можно определить без учета деформаций тела, деформации малы и материал подчиняется закону Гука [4, 5].

Построим весовую функцию для трещины в форме полосы, расположенной в неограниченном, однородном и изотропном упругом теле. При этом

$$S=\{Q: -a<x_1<a_1,\ -\infty<x_2<\infty, x_3=0\},$$

и граничный контур трещины Γ состоит из двух частей ($\Gamma^{(+)}$ и $\Gamma^{(-)}$):

$$\Gamma^{(\pm)}=\{M: y_1=\pm a,\ -\infty<y_2<\infty,\ y_3=0\}.$$

Здесь $2a$ – ширина полосы. Из соображений симметрии видно, что весовые функции для участков контура трещины $\Gamma^{(+)}$ и $\Gamma^{(-)}$ связаны соотношением

$$K_1^{(-)}(y_2;x_1,x_2)=K_1^{(+)}(y_2,-x_1,x_2).$$

Благодаря этому свойству можно ограничиться вычислением только весовой функции $K_1^{(+)}$.

В выражение (10) для весовой функции входит гармоническая функция $N(M;Q)$. Эту функцию можно определить по формуле

$$N(M;Q) = -\frac{\partial G(M;Q)}{\partial n}, \tag{11}$$

где $G(M;Q)$ – функция Грина для области, занимаемой трещиной. Если областью трещины является полоса, то функция Грина может быть получена с помощью конформного отображения.

Известно [6], что функция

$$w(z) = \operatorname{tg}\frac{\omega z}{2}, \quad \omega = \frac{\pi}{2a}, \quad z = x_1 + ix_2$$

является конформным отображением области трещины на единичный круг. Используя этот результат, можно найти функцию Грина и затем по формуле (11) – гармоническую функцию $N(M;Q)$. После соответствующих преобразований получим

$$N^{(+)}(M;Q) = \frac{1}{4a}\frac{\cos\omega x_1}{\operatorname{ch}\omega(x_2 - y_2) - \sin\omega x_1}. \tag{12}$$

Формула (12) определяет гармоническую функцию в полосе, когда точка M расположена на части контура трещины $\Gamma^{(+)}$.

В формулу (10) входят также функции $\delta_n u_3(Q)$ и $U^*(Q)$. Эти функции определяются с использованием какого-либо ("пробного") решения рассматриваемой задачи.

В качестве более простой (пробной) задачи рассмотрим следующую смешанную термоупругую плоскую задачу:

при $x_3 = 0$ имеем

$$\begin{cases} \sigma_{33} = -p_0 & \text{при} \quad |x_1| < a; \\ u_3 = 0 & \text{при} \quad |x_1| \ge a; \\ \sigma_{31} = 0 & \text{при} \quad -\infty < x_1 < \infty; \\ T = T_0 & \text{при} \quad |x_1| \le a; \\ \dfrac{\partial T}{\partial x_3} = 0 & \text{при} \quad |x_1| > a, \end{cases} \tag{13}$$

где $p_0 = \text{const}$; $T_0 = \text{const}$. Для решения термоупругой задачи с краевыми условиями (13) можно применить метод парных интегральных уравнений [7]. В результате получим

$$u_3(x_1,0)=\frac{1-\nu}{\mu}\left(p_0-\alpha\mu\frac{1+\nu}{1-\nu}T_0\right)(a^2-x_1^2)^{1/2} \quad \text{при} \quad |x_1|\le a. \tag{14}$$

КИН K_1 можно найти по формуле

$$K_1=\frac{\sqrt{2}\,\mu}{2(1-\nu)}\lim_{x_1\to a-0}\frac{u_3(x_1,0)}{(a-x_1)^{1/2}}.$$

Подставляя в последнюю формулу выражение (14), запишем

$$K_1=a^{1/2}\left(p_0-\alpha\mu\frac{1+\nu}{1-\nu}T_0\right). \tag{15}$$

Далее необходимо найти вариацию перемещения u_3. Выберем такую вариацию контура трещины Г, когда $\delta\Gamma=\delta\Gamma^{(+)}(M)=\delta a=\text{const}$. Вычислим вариацию перемещения u_3 (см. формулу (14)), вызванную вариацией контура трещины $\delta\Gamma^{(+)}=\delta a$:

$$\delta^{(+)}u_3(Q)=\left(p_0-\alpha\mu\frac{1+\nu}{1-\nu}T_0\right)\frac{(1-\nu)(a+x_1)^{1/2}\delta a}{2\mu(a-x_1)^{1/2}}. \tag{16}$$

Переходим к определению функции $U^*(Q)$. Для этого используем формулу (9). Подставив в нее значение K_1 из (15) с учетом, что $\delta n(M)=$ $=\delta\Gamma^{(+)}(M)=\delta a=\text{const}$, имеем

$$U^*(Q)=\frac{\pi(1-\nu)a^{1/2}\delta a}{2\mu}\left(p_0-\alpha\mu\frac{1+\nu}{1-\nu}T_0\right)\int_{\Gamma^{(+)}}N^{(+)}(M;Q)ds.$$

Затем, подставив в это выражение формулу (12), получим

$$U^*(Q)=\frac{\pi(1-\nu)\delta a}{8\mu a^{1/2}}\left(p_0-\alpha\mu\frac{1+\nu}{1-\nu}T_0\right)I(Q), \tag{17}$$

где

$$I(Q)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega x_1 dy_2}{\operatorname{ch}\omega(x_2-y_2)-\sin\omega x_1}.$$

Вычисляя этот интеграл, находим

$$I(Q)=2(a+x_1). \tag{18}$$

Подставив (18) в (17), запишем

$$U^*(Q)=\frac{\pi(1-\nu)\delta a}{4\mu a^{1/2}}\left(p_0-\alpha\mu\frac{1+\nu}{1-\nu}T_0\right)(a+x_1). \qquad (19)$$

На основании (16) и (19) имеем

$$\frac{\delta^{(+)}u_3(Q)}{U^*(Q)}=\frac{2a^{1/2}}{\pi(a^2-x_1^2)^{1/2}}. \qquad (20)$$

Формула (20) выражает пробное решение, соответствующее краевой термоупругой задаче (13).

Теперь можно построить весовую функцию. Для этого подставим выражения (12) и (20) в формулу (10). В результате получим

$$K^{(\pm)}(M;Q)=\frac{1}{2\pi a^{1/2}(a^2-x_1^2)^{1/2}}\frac{\cos\omega x_1}{\operatorname{ch}\omega(x_2-y_2)\mp\sin\omega x_1}. \qquad (21)$$

Формула (21) дает выражение пространственной термоупругой весовой функции для трещины в виде полосы, находящейся в неограниченном упругом теле.

Определение КИН для трещины в форме полосы, находящейся под действием давления $p(Q)=p(x_1,x_2)$ и температуры $T(Q)=T(x_1,x_2)$, сводится к вычислению квадратур. С помощью формул (4) и (21) получим

$$K_1^{(\pm)}(y_2)=\frac{1}{2\pi a^{1/2}}\int_{-a}^{a}\frac{\cos\omega x_1}{(a^2-x_1^2)^{1/2}}dx_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x_1,x_2)-\beta T(x_1,x_2)}{\operatorname{ch}\omega(x_2-y_2)\mp\sin\omega x_1}dx_2, \qquad (22)$$

где

$$\omega=\frac{\pi}{2a};\quad \beta=\alpha\mu\frac{1+\nu}{1-\nu}.$$

По формуле (22) можно определить КИН для трещины в виде полосы, находящейся под совместным действием давления и температуры.

Рассмотрим пример вычисления КИН по формуле (22). Наибольший интерес представляет случай, когда

$$\begin{aligned} p(x_1,x_2)&=0 \quad \text{при} \quad |x_2|>b;\\ T(x_1,x_2)&=0 \quad \text{при} \quad |x_2|>b. \end{aligned} \qquad (23)$$

Далее полагали, что в прямоугольнике

$$-a<x_1<a,\quad -b<x_2<b$$

функции $p(x_1,x_2)$ и $T(x_1,x_2)$ не зависят от координаты x_2, т.е.

$$p(x_1,x_2)=p(x_1);\quad T(x_1,x_2)=T(x_1). \tag{24}$$

При выполнении условий (23) и (24) формула (22) преобразуется следующим образом:

$$K_1^{(\pm)}(y_2)=\frac{1}{2\pi a^{1/2}}\int\limits_{-a}^{a}\frac{[p(x_1)-\beta T(x_1)]dx_1}{(a^2-x_1^2)^{1/2}}\int\limits_{-b}^{b}\frac{\cos\omega x_1 dx_2}{\operatorname{ch}\omega(x_2-y_2)\mp\sin\omega x_1}. \tag{25}$$

Рассмотрим частный случай формулы (25). Пусть в области $-a<x_1<a$, $-b<x_2<b$ функции $p(x_1)$ и $T(x_1)$ имеют вид

$$p(x_1)=p\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)^{1/2};\quad T(x_1)=T\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)^{1/2},$$

где $p=\text{const}$; $T=\text{const}$. В этом случае формула (25) принимает вид

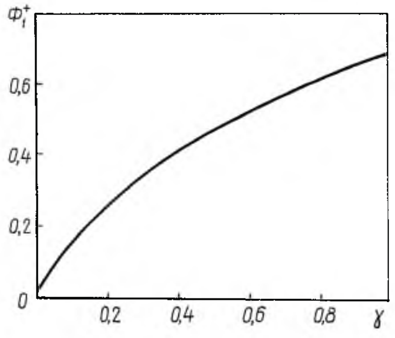
$$K_1^{(\pm)}(y_2)=\frac{(p-\beta T)}{2\pi a^{3/2}}\int\limits_{-a}^{a}dx_1\int\limits_{-b}^{b}\frac{\cos\omega x_1 dx_2}{\operatorname{ch}\omega(x_2-y_2)\mp\sin\omega x_1}. \tag{26}$$

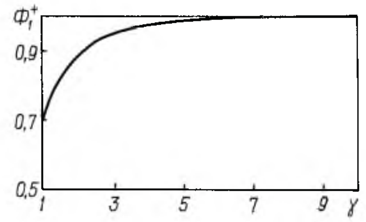
Вычислив в выражении (26) интеграл по переменной x_2 [8], получим

$$K_1^{(\pm)}(\xi,\gamma)=\frac{2}{\pi}a^{1/2}(p-\beta T)\Phi_1^{(\pm)}(\xi,\gamma), \tag{27}$$

где

$$\begin{cases}\omega x_1=t_1;\quad \omega y_2=\xi;\quad \omega b=\dfrac{\pi b}{2a}=\gamma;\quad \omega x_2=t_2,\\ \Phi_1^{(\pm)}(\xi,\gamma)=\dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}F^{(\pm)}(t_1,\xi,\gamma)dt_1;\\ F^{(\pm)}(t_1,\gamma,\xi)=\arcsin\dfrac{1\mp\sin t_1\operatorname{ch}(\gamma-\xi)}{\operatorname{ch}(\gamma-\xi)\mp\sin t_1}-\\ -\arcsin\dfrac{1\mp\sin t_1\operatorname{ch}(\gamma+\xi)}{\operatorname{ch}(\gamma+\xi)\mp\sin t_1}\quad \text{при } |\xi|>\gamma;\\ F^{(\pm)}(t_1,\gamma,\xi)=\pi-\arcsin\dfrac{1\mp\sin t_1\operatorname{ch}(\gamma-\xi)}{\operatorname{ch}(\gamma-\xi)\mp\sin t_1}-\\ -\arcsin\dfrac{1\mp\sin t_1\operatorname{ch}(\gamma+\xi)}{\operatorname{ch}(\gamma+\xi)\mp\sin t_1}\quad \text{при } |\xi|<\gamma.\end{cases} \tag{28}$$





Зависимость функции $\Phi_1^{(+)}$ от параметра γ.

При вычислении интеграла (28) использовали квадратурную формулу Гаусса. На рисунке показана зависимость функции $\Phi_1^{(+)}$ от параметра γ при $\xi = 0$, т.е. в центре граничного контура трещины.

Резюме

Побудовано просторову вагову функцію й отримано загальний вираз для визначення коефіцієнта інтенсивності напружень нормального відриву стосовно тріщини у вигляді смуги у випадку термопружної задачі.

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
2. *Бородачев Н. М.* Об одном методе построения весовой функции для тела с трещиной // Прикл. математика и механика. – 1998. – **62**, № 2. – С. 329 – 333.
3. *Бородачев А. Н.* Общий метод построения пространственных весовых функций для упругих тел с трещинами // Там же. – 1993. – **57**, № 6. – С. 120 – 127.
4. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с.
5. *Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – М.: Физматгиз, 1958. – 167 с.
6. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1989. – 477 с.
7. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955. – 667 с.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

Поступила 27. 10. 99