Доповіді Національної академії наук України

10 • 2011

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.6

А. Я. Бомба, А. В. Теребус

Моделювання квазіідеальних полів для тонких просторово викривлених анізотропних пластів

(Представлено членом-кореспондентом НАН України С. І. Ляшком)

Розглядається задача моделювання квазіідеальної фільтраційної течії у деякому неоднорідному анізотропному пористому просторово викривленому пласті, обмеженому двома еквіпотенціальними поверхнями-стінками та чотирма поверхнями течії. Проведено її апроксимацію деяким "усередненим" плоским аналогом. На цій основі і з використанням розроблених числових методів квазіконформних відображень побудовано алгоритм її розв'язання.

Мотивом для дослідження фільтраційних процесів у неоднорідних анізотропних середовищах, типовими представниками яких є тріщинувато-пористі грунти, є їх широка поширеність у природі. При розв'язанні відповідних цим процесам плоских крайових задач моделювання квазіідеальних полів ефективним є метод квазіконформних відображень (див., наприклад, [1]), безпосереднє узагальнення якого на простір пов'язане з низкою проблем.

У цій роботі досліджується окремий випадок просторової анізотропії, для якого допускається можливість апроксимації задачі моделювання просторової течії деяким плоским її аналогом [2, 3]. При цьому розглядаються спеціального типу тонкі просторово викривлені пласти, фільтраційну течію в яких можна умовно інтерпретувати як плоско-паралельний рух вздовж окремих їх прошарків таким чином, щоб один із головних напрямків анізотропії в кожній точці був напрямлений по нормалі до відповідного прошарку.

Постановка задачі.Розглянемо квазіідеальний процес фільтраційної течії в деякому неоднорідному пласті змінної малої товщини H (області G_τ, $\tau = (x, y, z)$), обмеженому двома непроникними стінками — підошвою та крівлею, рівняння яких в деяких ортогональних криволінійних координатах (ξ, η, ς) відповідно наведемо у вигляді $\varsigma = \varsigma_*$, $\varsigma = \varsigma^*$. Обмежимо пласт з боків чотирма поверхнями, дві з яких — еквіпотенціалі ($f_*(\xi, \eta) = 0$, $f^*(\xi, \eta) = 0$), а дві — поверхні течії ($g_*(\xi, \eta) = 0$, $g^*(\xi, \eta) = 0$), побудовані по нормалі до підошви та крівлі. При цьому ортогональні криволінійні координати (ξ, η, ς) пов'яжемо з фізичними (x, y, z) такими співвідношеннями: $x = X(\xi, \eta, \varsigma)$, $y = Y(\xi, \eta, \varsigma)$, $z = Z(\xi, \eta, \varsigma)$, ($X(\xi, \eta, \varsigma)$, $Y(\xi, \eta, \varsigma)$, $Z(\xi, \eta, \varsigma)$ — задані неперервно-диференційовані функції).

Пласт вважатимемо пористим неоднорідним середовищем, для якого один з головних напрямів анізотропії в кожній точці направлений по дотичній вздовж ς координатних ліній, а решта два відносно координатних ліній ξ та η мають довільну орієнтацію (див., наприклад, [2]). В такому разі тензор провідності набуває вигляду

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_{11}(\xi,\eta,\varsigma) & \kappa_{12}(\xi,\eta,\varsigma) & 0 \\ \kappa_{12}(\xi,\eta,\varsigma) & \kappa_{22}(\xi,\eta,\varsigma) & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33}(\xi,\eta,\varsigma) \end{pmatrix},$$

де $\kappa_{ij}(\xi,\eta,\varsigma) = \widetilde{\kappa}_{ij}(x,y,z) = \widetilde{\kappa}_{ij}(X(\xi,\eta,\varsigma), Y(\xi,\eta,\varsigma), Z(\xi,\eta,\varsigma))$, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$. У випадку, коли товщина пласта є малою порівняно з геометричними розмірами основи (підошви), а поверхні $\varsigma = \mathrm{const}$ є поверхнями течії, відповідний процес можна вважати двовимірним відносно змінних (ξ,η)). Таким чином, розв'язок задачі шукатимемо у плоскій області зміни (ξ,η) $G_z = ABCD$, такій, що $AB = \{(\xi,\eta)\colon f_*(\xi,\eta) = 0\}$, $CD = \{(\xi,\eta)\colon f^*(\xi,\eta) = 0\}$, $AD = \{(\xi,\eta)\colon g_*(\xi,\eta) = 0\}$, $BC = \{(\xi,\eta)\colon g^*(\xi,\eta) = 0\}$. На основі [2] рівняння нерозривності подамо у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(T_{11}(\xi,\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + T_{12}(\xi,\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(T_{12}(\xi,\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + T_{22}(\xi,\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) = 0, \tag{1}$$

де

$$T_{11}(\xi,\eta) = \int_{\varsigma_1}^{\varsigma_2} \frac{H_2(\xi,\eta,\varsigma)H_3(\xi,\eta,\varsigma)}{H_1(\xi,\eta,\varsigma)}\kappa_{11}(\xi,\eta,\varsigma)d\varsigma; \quad T_{12}(\xi,\eta) = \int_{\varsigma_1}^{\varsigma_2} H_3(\xi,\eta,\varsigma)\kappa_{12}(\xi,\eta,\varsigma)d\varsigma;$$

$$T_{22}(\xi,\eta) = \int_{\varsigma_1}^{\varsigma_2} \frac{H_1(\xi,\eta,\varsigma)H_3(\xi,\eta,\varsigma)}{H_2(\xi,\eta,\varsigma)}\kappa_{22}(\xi,\eta,\varsigma)d\varsigma; \qquad H_1(\xi,\eta,\varsigma) = \sqrt{X_\xi^2 + Y_\xi^2 + Z_\xi^2};$$

$$H_2(\xi,\eta,\varsigma) = \sqrt{X_\eta^2 + Y_\eta^2 + Z_\eta^2}; \qquad H_3(\xi,\eta,\varsigma) = \sqrt{X_\varsigma^2 + Y_\varsigma^2 + Z_\varsigma^2} \text{ —}$$

відповідні коефіцієнти Ламе; $\varphi = \varphi(\xi,\eta)$ — квазіпотенціал швидкості $\overrightarrow{v}$ $\Big(\varphi|_{f_*(\xi,\eta)=0} = \varphi_*$, $\varphi|_{f^*(\xi,\eta)=0} = \varphi^*$, $\left.\dfrac{d\varphi}{dn}\right|_{g_*(\xi,\eta)=0} = \left.\dfrac{d\varphi}{dn}\right|_{f^*(\xi,\eta)=0} = 0\Big)$.

Введемо функцію усередненої течії $\psi = \psi(\xi,\eta)$ — квазікомплексно-спряжену до $\varphi = \varphi(\xi,\eta)$ (див., наприклад, [1]), таку, що

$$\begin{cases} T_{11}(\xi,\eta)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi} + T_{12}(\xi,\eta)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}, \\ T_{12}(\xi,\eta)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi} + T_{22}(\xi,\eta)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}. \end{cases} \tag{2}$$

Очевидно, що виконання останньої системи перетворює (1) в тотожну рівність. Система (2) визначає деяку квазіаналітичну функцію $\omega = \omega(z) = \varphi(\xi,\eta) + i\psi(\xi,\eta)$, яка при виконанні умов

$$\varphi|_{f_*(\xi,\eta)=0} = \varphi_*, \qquad \varphi|_{f^*(\xi,\eta)=0} = \varphi^*, \qquad \psi|_{g_*(\xi,\eta)=0} = 0, \qquad \psi|_{g^*(\xi,\eta)=0} = Q \tag{3}$$

здійснює квазіконформне відображення області G_z на відповідну область квазікомплексного потенціалу [1] $G_\omega = \{\omega\colon \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$, де стала Q — повна витрата (невідомий параметр, що шукається в процесі розв'язання задачі). При цьому, щоб попередити порушення квазіконформності в кутових точках G_z, на рівняння граничних ліній накладаються умови гладкості [4]. Наприклад, для точки A перетину кривих $f_*(\xi,\eta)=0$ та $g_*(\xi,\eta)=0$ така умова набуде вигляду $g_{*\xi}(A)(T_{11}(A)f_{*\xi}(A)+T_{12}(A)f_{*\eta}(A))+g_{*\eta}(A)(T_{12}(A)f_{*\xi}(A)+ T_{22}(A)f_{*\eta}(A)) = 0$.

Відповідну нелінійну обернену задачу до (2), (3) на квазіконформне відображення $\mathrm{z}=\mathrm{z}(\omega)=\xi(\varphi,\psi)+i\eta(\varphi,\psi)$ області G_ω на G_z при невідомому Q, аналогічно [1], отримаємо у вигляді

$$\begin{cases} T_{11}(\xi,\eta)\dfrac{\partial\eta}{\partial\psi} - T_{12}(\xi,\eta)\dfrac{\partial\xi}{\partial\psi} = \dfrac{\partial\xi}{\partial\varphi}, \\ T_{12}(\xi,\eta)\dfrac{\partial\eta}{\partial\psi} - T_{22}(\xi,\eta)\dfrac{\partial\xi}{\partial\psi} = \dfrac{\partial\eta}{\partial\varphi}, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} f_*(\xi(\varphi_*,\psi),\eta(\varphi_*,\psi))=0, \quad f^*(\xi(\varphi^*,\psi),\eta(\varphi^*,\psi))=0, \quad 0\leqslant\psi\leqslant Q, \\ g_*(\xi(\varphi,0),\eta(\varphi,0))=0, \qquad g^*(\xi(\varphi,Q),\eta(\varphi,Q))=0, \qquad \varphi_*\leqslant\varphi\leqslant\varphi^*, \end{cases} \tag{5}$$

зокрема, як наслідок (4), матимемо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{1}{T_{11}(\xi,\eta)}\dfrac{\partial\xi}{\partial\varphi} + \dfrac{T_{12}(\xi,\eta)}{T_{11}(\xi,\eta)}\dfrac{\partial\xi}{\partial\psi}\right) + \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial\psi}\left(-\dfrac{T_{12}(\xi,\eta)}{T_{11}(\xi,\eta)}\dfrac{\partial\xi}{\partial\varphi} + \dfrac{T_{11}(\xi,\eta)T_{22}(\xi,\eta)-T_{12}^2(\xi,\eta)}{T_{11}(\xi,\eta)}\dfrac{\partial\xi}{\partial\psi}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{1}{T_{22}(\xi,\eta)}\dfrac{\partial\eta}{\partial\varphi} - \dfrac{T_{12}(\xi,\eta)}{T_{22}(\xi,\eta)}\dfrac{\partial\eta}{\partial\psi}\right) + \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial\psi}\left(\dfrac{T_{12}(\xi,\eta)}{T_{22}(\xi,\eta)}\dfrac{\partial\eta}{\partial\varphi} + \dfrac{T_{11}(\xi,\eta)T_{22}(\xi,\eta)-T_{12}^2(\xi,\eta)}{T_{22}(\xi,\eta)}\dfrac{\partial\eta}{\partial\psi}\right) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Умови квазіортогональності [1] в околах граничних ліній $f_*(\xi,\eta)=0$, $f^*(\xi,\eta)=0$, $g_*(\xi,\eta)=0$, $g^*(\xi,\eta)=0$ запишуться, відповідно, у вигляді

$$\begin{cases} -(T_{11}f_{*\xi}(\xi,\eta)+T_{12}f_{*\eta}(\xi,\eta))\eta_\varphi + (T_{12}f_{*\xi}(\xi,\eta)+T_{22}f_{*\eta}(\xi,\eta))\xi_\varphi = 0, \\ -(T_{11}f^*_\xi(\xi,\eta)+T_{12}f^*_\eta(\xi,\eta))\eta_\varphi + (T_{12}f^*_\xi(\xi,\eta)+T_{22}f^*_\eta(\xi,\eta))\xi_\varphi = 0, \\ (T_{11}g_{*\xi}(\xi,\eta)+T_{12}g_{*\eta}(\xi,\eta))\eta_\psi - (T_{12}g_{*\xi}(\xi,\eta)+T_{22}g_{*\eta}(\xi,\eta))\xi_\psi = 0, \\ (T_{11}g^*_\xi(\xi,\eta)+T_{12}g^*_\eta(\xi,\eta))\eta_\psi - (T_{12}g^*_\xi(\xi,\eta)+T_{22}g^*_\eta(\xi,\eta))\xi_\psi = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Різницеві апроксимації та алгоритм розв'язання. Різницеві аналоги крайових умов (5), пригарничних аналогів умов квазіортогональності (7) у рівномірній сітковій області $G^\gamma_\omega = \{(\varphi_i,\psi_j)\colon \varphi_i=\varphi_*+\Delta\varphi\cdot i,\ i=\overline{0,m};\ \psi_j=\Delta\psi\cdot j,\ j=\overline{0,n};\ \Delta\varphi=(\varphi^*-\varphi_*)/m,\ \Delta\psi=Q/n,\ \gamma=\Delta\varphi/\Delta\psi,\ m,n\in N\}$ подамо так:

$$\begin{cases} f_*(\xi_{0,j},\eta_{0,j})=0, \quad f^*(\xi_{m,j},\eta_{m,j})=0, \quad j=\overline{1,n-1}, \\ g_*(\xi_{i,0},\eta_{i,0})=0, \quad g^*(\xi_{i,n},\eta_{i,n})=0, \quad i=\overline{1,m-1}; \end{cases} \tag{8}$$

$$
\begin{cases}
-(T_{11}(\xi_{0,j},\eta_{0,j})f_{*\xi}(\xi_{0,j},\eta_{0,j})+T_{12}(\xi_{0,j},\eta_{0,j})f_{*\eta}(\xi_{0,j},\eta_{0,j}))(\eta_{1,j}-\eta_{0,j})+\\
\qquad +(T_{12}(\xi_{0,j},\eta_{0,j})f_{*\xi}(\xi_{0,j},\eta_{0,j})+T_{22}(\xi_{0,j},\eta_{0,j})f_{*\eta}(\xi_{0,j},\eta_{0,j}))(\xi_{1,j}-\xi_{0,j})=0,\\
-(T_{11}(\xi_{m,j},\eta_{m,j})f^*_{\xi}(\xi_{m,j},\eta_{m,j})+T_{12}(\xi_{m,j},\eta_{m,j})f^*_{\eta}(\xi_{m,j},\eta_{m,j}))(\eta_{m,j}-\eta_{m-1,j})+\\
\qquad +(T_{12}(\xi_{m,j},\eta_{m,j})f^*_{\xi}(\xi_{m,j},\eta_{m,j})+T_{22}(\xi_{m,j},\eta_{m,j})f^*_{\eta}(\xi_{0,j},\eta_{0,j}))(\xi_{m,j}-\xi_{m-1,j})=0,\\
(T_{11}(\xi_{i,0},\eta_{i,0})g_{*\xi}(\xi_{i,0},\eta_{i,0})+T_{12}(\xi_{i,0},\eta_{i,0})g_{*\eta}(\xi_{i,0},\eta_{i,0}))(\eta_{i,1}-\eta_{i,0})-\\
\qquad -(T_{12}(\xi_{i,0},\eta_{i,0})g_{*\xi}(\xi_{i,0},\eta_{i,0})+T_{22}(\xi_{i,0},\eta_{i,0})g_{*\eta}(\xi_{i,0},\eta_{i,0}))(\xi_{i,1}-\xi_{i,0})=0,\\
(T_{11}(\xi_{i,n},\eta_{i,n})g^*_{\xi}(\xi_{i,n},\eta_{i,n})+T_{12}(\xi_{i,n},\eta_{i,n})g^*_{\eta}(\xi_{i,n},\eta_{i,n}))(\eta_{i,1}-\eta_{i,0})-\\
\qquad -(T_{12}(\xi_{i,n},\eta_{i,n})g^*_{\xi}(\xi_{i,n},\eta_{i,n})+T_{22}(\xi_{i,n},\eta_{i,n})g^*_{\eta}(\xi_{i,n},\eta_{i,n}))(\xi_{i,n}-\xi_{i,n-1})=0,\\
i=\overline{1,m-1},\qquad j=\overline{1,n-1}.
\end{cases}
\tag{9}
$$

Невідому величину Q знаходимо на підставі умов "квазіконформної" подібності елементарних чотирикутників двох областей [1]

$$
\gamma=\sum_{i,j=1}^{m,n}\frac{\sqrt{(\xi_{i,j-1}-\xi_{i-1,j-1})^2+(\eta_{i,j-1}-\eta_{i-1,j-1})^2}+\sqrt{(\xi_{i,j}-\xi_{i-1,j})^2+(\eta_{i,j}-\eta_{i-1,j})^2}}{mn(a_{i-1,j}+a_{i,j})},
$$

$$
\begin{gathered}
a_{i,j}=((T_{11}(\xi_{i,j},\eta_{i,j})(\eta_{i,j}-\eta_{i,j-1})+T_{12}(\xi_{i,j},\eta_{i,j})(\xi_{i,j}-\xi_{i,j-1}))^2+\\
+(T_{12}(\xi_{i,j},\eta_{i,j})(\eta_{i,j}-\eta_{i,j-1})+T_{22}(\xi_{i,j},\eta_{i,j})(\xi_{i,j}-\xi_{i,j-1}))^2)^{1/2},\qquad Q=\frac{\Delta\varphi n}{\gamma}.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Задавши кількості вузлів розбиття сітки m та n параметр точності ε, початкові наближення координат граничних вузлів $\xi^{(0)}_{0,j}$, $\eta^{(0)}_{0,j}$, $\xi^{(0)}_{m,j}$, $\eta^{(0)}_{m,j}$, $\xi^{(0)}_{i,n}$, $\eta^{(0)}_{i,n}$, $\xi^{(0)}_{i,0}$, $\eta^{(0)}_{i,0}$ (так, щоб задовольнялись умови (8)), початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(\xi^{(0)}_{i,j},\eta^{(0)}_{i,j})$, $i=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{1,m-1}$ (наприклад, як середні пропорційні значень відповідних координат граничних вузлів), знаходимо відповідні наближення величин γ та Q (за (10)). Далі, на основі різницевого аналогу рівняння (6), уточнюємо координати внутрішніх вузлів $(\xi^{(k)}_{i,j},\eta^{(k)}_{i,j})$ ($k=0,1,\ldots$ — крок ітерації):

$$
\begin{gathered}
\xi_{i,j}=\frac{0{,}5}{1+\gamma^2(T_{11}T_{22}-T_{12}^2)}\biggl\{\xi_{i+1,j}+\xi_{i-1,j}-\frac{\xi_{i+1,j}-\xi_{i-1,j}}{4T_{11}}(T_{11\xi}(\xi_{i+1,j}-\xi_{i-1,j})+\\
+T_{11\eta}(\eta_{i+1,j}-\eta_{i-1,j}))+\gamma^2\frac{\xi_{i,j+1}-\xi_{i,j-1}}{4T_{11}}((T_{11}^2T_{22\xi}-2T_{11}T_{22}T_{12\xi}+T_{12}^2T_{11\xi})\times\\
\times(\xi_{i,j+1}-\xi_{i,j-1})+(T_{11}^2T_{22\eta}-2T_{11}T_{22}T_{12\eta}+T_{12}^2T_{11\eta})(\eta_{i,j+1}-\eta_{i,j-1}))+\\
+\gamma\biggl[\frac{\xi_{i,j+1}-\xi_{i,j-1}}{4T_{11}}(T_{11}T_{12\xi}-T_{12}T_{11\xi})((T_{11}T_{12\xi}-T_{12}T_{11\xi})(\xi_{i+1,j}-\xi_{i-1,j})+\\
+(T_{11}T_{12\eta}-T_{12}T_{11\eta})(\eta_{i+1,j}-\eta_{i-1,j}))-\frac{\xi_{i+1,j}-\xi_{i-1,j}}{4T_{11}}((T_{11}T_{12\xi}-T_{12}T_{11\xi})\times\\
\times(\xi_{i,j+1}-\xi_{i,j-1})+(T_{11}T_{12\eta}-T_{12}T_{11\eta})(\eta_{i,j+1}-\eta_{i,j-1}))\biggr]+\\
+\gamma^2(T_{11}T_{22}-T_{12}^2)(\eta_{i,j-1}+\eta_{i,j+1})\biggr\},
\end{gathered}
$$

$$\eta_{i,j} = \frac{0{,}5}{1+\gamma^2(T_{11}T_{22}-T_{12}^2)}\biggl\{\eta_{i+1,j}+\eta_{i-1,j}-\frac{\eta_{i+1,j}-\eta_{i-1,j}}{4T_{22}}(T_{22\xi}(\xi_{i+1,j}-\xi_{i-1,j})+$$

$$+T_{22\eta}(\eta_{i+1,j}-\eta_{i-1,j}))+\gamma^2\frac{\eta_{i,j+1}-\eta_{i,j-1}}{4T_{22}}((T_{22}^2T_{11\xi}-2T_{11}T_{22}T_{12\xi}+T_{12}^2T_{22\xi})\times$$

$$\times(\xi_{i,j+1}-\xi_{i,j-1})+(T_{22}^2T_{11\eta}-2T_{11}T_{22}T_{12\eta}+T_{12}^2T_{22\eta})(\eta_{i,j+1}-\eta_{i,j-1}))-$$

$$-\gamma\biggl[\frac{\eta_{i,j+1}-\eta_{i,j-1}}{4T_{22}}((T_{22}T_{12\xi}-T_{12}T_{22\xi})(\xi_{i+1,j}-\xi_{i-1,j})+(T_{22}T_{12\eta}-T_{12}T_{22\eta})\times$$

$$\times(\eta_{i+1,j}-\eta_{i-1,j}))-\frac{\eta_{i+1,j}-\eta_{i-1,j}}{4T_{22}}((T_{22}T_{12\xi}-T_{12}T_{22\xi})(\xi_{i,j+1}-\xi_{i,j-1})+$$

$$+(T_{22}T_{12\eta}-T_{12}T_{22\eta})(\eta_{i,j+1}-\eta_{i,j-1}))\biggr]+\gamma^2(T_{11}T_{22}-T_{12}^2)(\eta_{i,j-1}+\eta_{i,j+1})\biggr\},$$

$$i=\overline{1,m},\qquad j=\overline{1,n},$$

при цьому $\xi_{i,j}=\xi(\varphi_i,\psi_j)$, $\eta_{i,j}=\eta(\varphi_i,\psi_j)$, а значення функцій $T_{ss}=T_{ss}(\xi_{i,j},\eta_{i,j})$, $s=\overline{1,2}$, $T_{12}=T_{12}(\xi_{i,j},\eta_{i,j})$ та відповідних частинних похідних обчислюємо за такими квадратурними формулами:

$$T_{ss}=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}\kappa_{ss}(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k-h/2)\frac{H_{3-s}(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k-h/2)H_3(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k-h/2)}{H_s(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k-h/2)},$$

$$T_{ss\xi}=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{H_s^2(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k-h/2)}((H_{3-s\xi}(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)H_3(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)\times$$

$$\times\kappa_{ss}(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)+H_{3-s}(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k-h/2)H_{3\xi}(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)\kappa_{ss}\times$$

$$\times(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)+H_{3-s}(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k-h/2)H_3(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)\times$$

$$\times\kappa_{ss\xi}(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2))H_s(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)-H_{3-s}(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)\times$$

$$\times H_3(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)\kappa_{ss}(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)H_{s\xi}(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)),$$

$$T_{ss\eta}=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{H_s^2(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k-h/2)}((H_{3-s\eta}(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)H_3(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)\times$$

$$\times\kappa_{ss}(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)+H_{3-s}(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k-h/2)H_{3\eta}(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)\times$$

$$\times\kappa_{ss}(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)+H_{3-s}(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k-h/2)H_3(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)\times$$

$$\times\kappa_{ss\eta}(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2))H_s(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)-H_{3-s}(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)\times$$

$$\times H_3(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)\kappa_{ss}(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)H_{s\eta}(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\varsigma_k-h/2)),$$

$$T_{12}=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}\kappa_{12}(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k-h/2)H_3(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k-h/2),$$

$$T_{12\xi} = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}(\kappa_{12\xi}(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k - h/2)H_3(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k - h/2) +$$

$$+ \kappa_{12}(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k - h/2)H_{3\xi}(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k - h/2)),$$

$$T_{12\eta} = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}(\kappa_{12\eta}(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k - h/2)H_3(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k - h/2) +$$

$$+ \kappa_{12}(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k - h/2)H_{3\xi}(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k - h/2)),$$

$$h = \frac{\varsigma^* - \varsigma_*}{N}, \qquad \varsigma_k = \varsigma_* + hk, \qquad k = \overline{0,N}, \qquad i = \overline{1,m-1}, \qquad j = \overline{1,n-1},$$

використовуючи відповідні значення $\xi_{i,j}$, $\eta_{i,j}$, одержані на попередньому кроці. Координати граничних вузлів підправляємо шляхом наближеного розв'язання системи рівнянь (8), (9), наприклад, згідно з [1].

При виконанні умов

$$\max_{\xi_{i,j},\eta_{i,j}} (|\xi_{i,j}^{(k+1)} - \xi_{i,j}^{(k)}|, |\eta_{i,j}^{(k+1)} - \eta_{i,j}^{(k)}|) < \varepsilon, \qquad |Q^{(k+1)} - Q^{(k)}| < \varepsilon,$$

$$\max_{\xi_{i,j},\eta_{i,j}} |\gamma^{(k+1)}(T_{11}^{(k+1)}(\eta_{i,j+1}^{(k+1)} - \eta_{i,j}^{(k+1)}) - T_{12}^{(k+1)}(\xi_{i,j+1}^{(k+1)} - \xi_{i,j}^{(k+1)})) - (\eta_{i+1,j}^{(k+1)} - \eta_{i,j}^{(k+1)})| < \varepsilon,$$

$$\max_{\xi_{i,j},\eta_{i,j}} |\gamma^{(k+1)}(T_{12}^{(k+1)}(\eta_{i,j+1}^{(k+1)} - \eta_{i,j}^{(k+1)}) - T_{22}^{(k+1)}(\xi_{i,j+1}^{(k+1)} - \xi_{i,j}^{(k+1)})) - (\eta_{i+1,j}^{(k+1)} - \eta_{i,j}^{(k+1)})| < \varepsilon,$$

$$i = \overline{0,m}, \qquad j = \overline{0,n},$$

і т. ін. (див., наприклад, [1]) обчислювальний процес припиняємо; у протилежному випадку переходимо до обчислення нових наближень параметрів $\gamma^{(k+1)}$ та $Q^{(k+1)}$, уточнення координат внутрішніх та граничних вузлів.

На основі рівняння руху $\overrightarrow{\upsilon}^T = \begin{pmatrix} \widetilde{\kappa}_{11} & \widetilde{\kappa}_{12} & 0 \\ \widetilde{\kappa}_{12} & \widetilde{\kappa}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\kappa}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix}$ у фізичній області G_τ та співвідношень $\varphi_x = \varphi_\xi \xi_x + \varphi_\eta \eta_x$, $\varphi_y = \varphi_\xi \xi_y + \varphi_\eta \eta_y$, $\varphi_z = \varphi_\xi \xi_z + \varphi_\eta \eta_z$ величину швидкості у внутрішніх вузлах сітки $\upsilon_{i,j,k} = \upsilon(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})$ $(x_{i,j,k} = X(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k)$, $y_{i,j,k} = Y(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k)$, $z_{i,j,k} = Z(\xi_{i,j},\eta_{i,j},\varsigma_k))$ знаходимо за такими різницевими формулами:

$$\upsilon_{i,j,k} = 2\frac{\Delta\varphi}{J_{i,j,k}\widetilde{J}_{i,j}}\sqrt{\upsilon_{xi,j,k}^2 + \upsilon_{yi,j,k}^2 + \upsilon_{zi,j,k}^2}, \quad i = \overline{1,m-1}, \quad j = \overline{1,n-1}, \quad k = \overline{1,N-1},$$

$$\widetilde{J}_{i,j} = (\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j})(\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1}) - (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1})(\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j}),$$

$$J_{i,j,k} = x_{\xi i,j,k}y_{\eta i,j,k}z_{\varsigma i,j,k} + y_{\xi i,j,k}z_{\eta i,j,k}x_{\varsigma i,j,k} + z_{\xi i,j,k}x_{\eta i,j,k}y_{\varsigma i,j,k} - z_{\xi i,j,k}y_{\eta i,j,k}x_{\varsigma i,j,k} -$$

$$- y_{\xi i,j,k}x_{\eta i,j,k}z_{\varsigma i,j,k} - x_{\xi i,j,k}z_{\eta i,j,k}y_{\varsigma i,j,k},$$

$$\upsilon_{xi,j,k} = ((\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1})(y_{\eta i,j,k}z_{\varsigma i,j,k} - z_{\eta i,j,k}y_{\varsigma i,j,k}) + ((\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1}) \times$$

$$\times (x_{\eta i,j,k}z_{\varsigma i,j,k} - z_{\eta i,j,k}x_{\varsigma i,j,k}))\widetilde{\kappa}_{11} - ((\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1})(y_{\xi i,j,k}z_{\varsigma i,j,k} - z_{\xi i,j,k}y_{\varsigma i,j,k}) +$$

$$+ (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1})(x_{\xi i,j,k}z_{\varsigma i,j,k} - z_{\xi i,j,k}x_{\varsigma i,j,k}))\widetilde{\kappa}_{12},$$

$$
\begin{aligned}
\upsilon_{yi,j,k} = ((\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1})(y_{\eta i,j,k} z_{\varsigma i,j,k} - z_{\eta i,j,k} y_{\varsigma i,j,k}) + (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1}) \times \\
\times (x_{\eta i,j,k} z_{\varsigma i,j,k} - z_{\eta i,j,k} x_{\varsigma i,j,k}))\widetilde{\kappa}_{12} - ((\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1})(y_{\xi i,j,k} z_{\varsigma i,j,k} - z_{\xi i,j,k} y_{\varsigma i,j,k}) + \\
+ (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1})(x_{\xi i,j,k} z_{\varsigma i,j,k} - ((\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1})(y_{\xi i,j,k} z_{\varsigma i,j,k} - z_{\xi i,j,k} y_{\varsigma i,j,k}) + \\
+ (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1})(x_{\xi i,j,k} z_{\varsigma i,j,k} - z_{\xi i,j,k} x_{\varsigma i,j,k}))\widetilde{\kappa}_{22}, \\
\upsilon_{zi,j,k} = ((\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1})(y_{\xi i,j,k} z_{\eta i,j,k} - z_{\xi i,j,k} y_{\eta i,j,k}) + \\
+ (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1})(x_{\xi i,j,k} z_{\eta i,j,k} - z_{\xi i,j,k} x_{\eta i,j,k}))\widetilde{\kappa}_{33},
\end{aligned}
$$

де $\widetilde{\kappa}_{p,q} = \widetilde{\kappa}(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})$, $p = \overline{1,3}$, $q = \overline{1,3}$. Аналогічно можна одержати співвідношення для обчислення швидкості у граничних вузлах.

У перспективі досліджень — розвинення розробленої методології на випадки двозв'язних областей та її застосування при моделюванні процесів руху рідин у водоймах-охолоджувачах, водонафтогазових пластах тощо.

1. *Бомба А. Я., Булавацький В. М., Скопецький В. В.* Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. – Київ: Наук. думка, 2007. – 308 с.
2. *Толпаев В. А.* Математические модели двумерной фильтрации в анизотропных, неоднородных и многослойных средах: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Ставрополь, 2004. – 38 с.
3. *Толпаев В. А., Ледовской В. И.* Уравнения линейной двумерной фильтрации жидкости в анизотропных искривленных слоях переменной и постоянной толщины // Изв. высш. уч. заведений. Естеств. науки, 2004. – Прилож. № 2. – С. 19–30.
4. *Бомба А. Я., Теребус А. В.* Моделювання ідеальних полів для тонких просторово викривлених пластів // Математ. та комп'ют. моделювання. – 2010. – Вип. 4. – С. 31–40.

Рівненський державний гуманітарний університет

Надійшло до редакції 28.02.2011

A. Ya. Bomba, A. V. Terebus

Modeling of quasiideal fields for thin spatially curved anisotropic layers

We consider the modeling of quasiideal flow for a heterogeneous anisotropic porous spatially curved layer, which is restricted by two equipotential surfaces and four stream surfaces. We approximate it by some averaged plane analogue. On this basis with the use of developed numerical methods of quasiconformal mappings, we build an algorithm for its solution.