Доповіді
національної
академії наук
України

3 • 2011

МЕХАНІКА

УДК 539.3

О. Я. Григоренко, О. В. Вовкодав, С. М. Яремченко

Чисельне розв'язання задач про напружено-деформований стан сферичних оболонок змінної товщини в уточненій постановці

(Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком)

Досліджено задачу про напружено-деформований стан сферичної ортотропної оболонки зі змінною в одному координатному напрямку товщиною при різних граничних умовах в уточненій постановці. Розвинуто чисельно-аналітичний підхід, який базується на застосуванні сплайн-апроксимації та методу дискретної ортогоналізації. Напружено-деформований стан пологих ортотропних оболонок досліджено у випадку змінної товщини і збереженні ваги.

Сферичні оболонки широко застосовуються як елементи конструкцій у різних галузях техніки, зокрема у суднобудуванні та ракетно-космічній техніці. Для оцінки міцності та надійності таких конструкцій потрібно знати характеристики їх напруженого стану. Тому виникає необхідність у розробці ефективних методів і підходів до розрахунку оболонок даного класу [1, 2].

Дослідженню напружено-деформованого стану нетонких сферичних оболонок в рамках некласичної теорії оболонок на основі уточненої моделі прямолінійного елемента присвячено роботи [3–6]. В даному повідомленні проводиться дослідження напружено-деформованого стану оболонок такого класу, але змінної товщини. Вихідна математична модель такої задачі описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних десятого порядку зі змінними коефіцієнтами при відповідних граничних умовах на краях. Дослідження таких задач пов'язане зі значними труднощами обчислювального характеру. Тому для її розв'язання пропонується чисельно-аналітичний підхід, що грунтується на зведенні двовимірної крайової задачі до системи звичайних диференціальних рівнянь з використанням методу сплайн-апроксимації в одному з координатних напрямків. Отримана одновимірна крайова задача розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Раніше такий підхід був використаний у роботах [7–10]. Для дослідження напружено-деформованого стану сферичних оболонок використовуються також інші чисельні методи [6, 11, 12].

Особливістю розв'язуваної задачі є дослідження напруженого стану сферичних оболонок, виготовлених з ортотропних матеріалів [13, 14]. При цьому товщина оболонки може змінюватися у двох координатних напрямках. Автори досліджували вплив зміни товщини на розподіл їх прогинів.

1. Розглянемо сферичні оболонки, товщина яких змінюється у двох координатних напрямках в уточненій постановці, що базується на гіпотезі прямої лінії. Суть прийнятої гіпотези полягає у тому, що спочатку нормальний до координатної поверхні елемент після деформації залишається прямолінійним, але вже не перпендикулярним до деформованої координатної поверхні. При цьому приймається, що вказаний елемент не змінює свою довжину.

За прийнятою гіпотезою, переміщення оболонки подамо у вигляді

$$\begin{aligned} &u_\theta(\theta,\varphi,\gamma)=u(\theta,\varphi)+\gamma\psi_\theta(\theta,\varphi);\\ &u_\varphi(\theta,\varphi,\gamma)=v(\theta,\varphi)+\gamma\psi_\varphi(\theta,\varphi);\\ &u_\gamma(\theta,\varphi,\gamma)=w(\theta,\varphi), \end{aligned}\tag{1}$$

де θ, φ, γ — координати точок оболонки; u_θ, u_φ, u_γ — відповідні переміщення; u, v, w — переміщення точок координатної поверхні у напрямках θ, φ, γ; ψ_θ, ψ_φ — повні кути повороту прямолінійного елемента.

У відповідності з (1) вирази для деформацій записуємо у вигляді

$$\begin{aligned} &e_\theta(\theta,\varphi,\gamma)=\varepsilon_\theta(\theta,\varphi)+\gamma\varkappa_\theta(\theta,\varphi); e_\varphi(\theta,\varphi,\gamma)=\varepsilon_\varphi(\theta,\varphi)+\gamma\varkappa_\varphi(\theta,\varphi);\\ &e_{\theta\varphi}(\theta,\varphi,\gamma)=\varepsilon_{\theta\varphi}(\theta,\varphi)+\gamma 2\varkappa_{\theta\varphi}(\theta,\varphi);\\ &e_{\theta\varphi}(\theta,\varphi,\gamma)=\gamma_\theta(\theta,\varphi); \qquad e_{\varphi\gamma}(\theta,\varphi,\gamma)=\gamma_\varphi(\theta,\varphi), \end{aligned}\tag{2}$$

де

$$\begin{aligned} &\varepsilon_\theta=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+w\right); \quad \varepsilon_\varphi=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}+u\cos\theta\right)+\frac{w}{r}; \quad \varkappa_\theta=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+w\right)\right);\\ &\varkappa_\varphi=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\cos\theta\left(\psi_\theta-\frac{u}{r}\right)\right)-\frac{w}{r^2};\\ &2\varkappa_{\theta\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\varphi}+\cos\theta\left(\frac{v}{r}-\psi_\varphi\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right);\\ &\gamma_\theta=\psi_\theta-\vartheta_\theta; \qquad \gamma_\varphi=\psi_\varphi-\vartheta_\varphi; \qquad \vartheta_\theta=\frac{1}{r}\left(u-\frac{\partial w}{\partial\theta}\right); \qquad \vartheta_\varphi=\frac{1}{r}\left(v-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right). \end{aligned}\tag{3}$$

Тут ε_θ, ε_φ, $\varepsilon_{\theta\varphi}$ — тангенціальні, а $\varkappa_\theta$, $\varkappa_\varphi$, $\varkappa_{\theta\varphi}$ — прогинні деформації координатної поверхні; ϑ_θ, ϑ_φ — кути повороту нормалі без урахування поперечних зсувів; γ_θ, γ_φ — кути повороту нормалі, зумовлені поперечними зсувами.

Рівняння рівноваги мають вигляд

$$\begin{aligned} &\cos\theta(N_\theta-N_\varphi)+\sin\theta\left(\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta}+Q_\theta\right)+\frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial\varphi}=0;\\ &\frac{\partial N_\varphi}{\partial\varphi}+2\cos\theta N_{\theta\varphi}+\sin\theta\left(\frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+Q_\varphi\right)=0; \end{aligned}$$

$$\cos\theta Q_\theta + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial\varphi} + \sin\theta\left(\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta} - N_\theta - N_\varphi + rq_\gamma\right) = 0;$$
$$\cos\theta(M_\theta - M_\varphi) + \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial\varphi} + \sin\theta\left(\frac{\partial M_\theta}{\partial\theta} - rQ_\theta\right) = 0; \quad (4)$$
$$\frac{\partial M_\varphi}{\partial\varphi} + 2\cos\theta M_{\theta\varphi} + \sin\theta\left(\frac{\partial M_{\theta\varphi}}{\partial\theta} - rQ_\varphi\right) = 0.$$

де N_θ, N_φ, $N_{\theta\varphi}$, $N_{\varphi\theta}$ — тангенціальні зусилля; Q_θ, Q_φ — перерізуючі зусилля; M_θ, M_φ, $M_{\theta\varphi}$, $M_{\varphi\theta}$ — згинаючі та скручуючи моменти.

Співвідношення пружності для ортотропних оболонок симетричної структури по товщині відносно вибраної координатної поверхні запишемо у вигляді

$$N_\theta = C_{11}\varepsilon_\theta + C_{12}\varepsilon_\varphi; \qquad N_\varphi = C_{12}\varepsilon_\theta + C_{22}\varepsilon_\varphi; \qquad N_{\theta\varphi} = C_{66}\varepsilon_{\theta\varphi} + 2k_2 D_{66}\varkappa_{\theta\varphi};$$
$$N_{\varphi\theta} = C_{66}\varepsilon_{\theta\varphi} + 2k_1 D_{66}\varkappa_{\theta\varphi}; \qquad M_\theta = D_{11}\varkappa_\theta + D_{12}\varkappa_\varphi; \qquad M_\varphi = D_{12}\varkappa_\theta + D_{22}\varkappa_\varphi; \quad (5)$$
$$M_{\varphi\theta} = M_{\theta\varphi} = 2D_{66}\varkappa_{\theta\varphi}; \qquad Q_\theta = K_1\gamma_\theta; \qquad Q_\varphi = K_2\gamma_\varphi,$$

де

$$C_{11} = \frac{E_\theta h}{1-\nu_\theta\nu_\varphi}; \qquad C_{12} = \nu_\varphi C_{11}; \qquad C_{22} = \frac{E_\varphi h}{1-\nu_\theta\nu_\varphi}; \qquad C_{66} = G_{\theta\varphi}h;$$
$$D_{11} = \frac{E_\theta h^3}{12(1-\nu_\theta\nu_\varphi)}; \qquad D_{12} = \nu_\varphi D_{11}; \qquad D_{22} = \frac{E_\varphi h^3}{12(1-\nu_\theta\nu_\varphi)}; \quad (6)$$
$$D_{66} = \frac{G_{\theta\varphi}h^3}{12}; \qquad K_1 = \frac{5}{6}hG_{\theta\gamma}; \qquad K_2 = \frac{5}{6}hG_{\varphi\gamma}.$$

Тут E_θ, E_φ, ν_θ, ν_φ — модулі пружності та коефіцієнти Пуассона у напрямках θ і φ; $G_{\theta\varphi}$, $G_{\theta\gamma}$, $G_{\varphi\gamma}$ — модулі зсуву; $h = h(\theta,\varphi)$ — товщина оболонки.

Для визначення напружень в ортотропних сферичних оболонках будемо виходити з співвідношень закону Гука (В. З. Власов, 1949) [3, 4, 15]

$$e_\theta = b_{11}\sigma_\theta + b_{12}\sigma_\varphi; \qquad e_\varphi = b_{12}\sigma_\theta + b_{22}\sigma_\varphi;$$
$$e_{\theta\varphi} = b_{66}\tau_{\theta\varphi}, \qquad e_{\theta\gamma} = b_{55}\tau_{\theta\gamma}, \qquad e_{\varphi\gamma} = b_{44}\tau_{\varphi\gamma}, \quad (7)$$

де

$$b_{11} = \frac{1}{E_\theta}; \qquad b_{12} = -\frac{\nu_\theta}{E_\theta} = -\frac{\nu_\varphi}{E_\varphi}; \qquad b_{22} = \frac{1}{E_\varphi}; \qquad b_{66} = \frac{1}{G_{\theta\varphi}};$$
$$b_{44} = \frac{1}{G_{\varphi\gamma}}; \qquad b_{55} = \frac{1}{G_{\theta\gamma}}. \quad (8)$$

Розв'язуючи рівняння (7) відносно напружень і використовуючи (2), отримуємо вирази для напружень через деформації координатної поверхні

$$(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\sigma_\theta = b_{22}(\varepsilon_\theta + \gamma\varkappa_\theta) - b_{12}(\varepsilon_\varphi + \gamma\varkappa_\varphi);$$
$$(b_{12}^2 - b_{11}b_{22})\sigma_\varphi = b_{12}(\varepsilon_\theta + \gamma\varkappa_\theta) - b_{11}(\varepsilon_\varphi + \gamma\varkappa_\varphi); \quad (9)$$
$$b_{66}\tau_{\theta\varphi} = \varepsilon_{\theta\varphi} + 2\gamma\varkappa_{\theta\varphi}; \qquad b_{55}\tau_{\theta\gamma} = \gamma_\theta; \qquad b_{44}\tau_{\varphi\gamma} = \gamma_\varphi \qquad \left(-\frac{h}{2} \leqslant \gamma \leqslant \frac{h}{2}\right).$$

За розв'язувальні функції вибираємо компоненти вектора переміщень та повні кути повороту u, v, w, ψ_θ, ψ_φ. Після деяких перетворень з вказаних основних рівнянь уточненої теорії оболонок отримуємо систему п'яти розв'язувальних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} &= a_{11}\frac{\partial u}{\partial\theta} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + a_{13}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + a_{14}u + a_{15}\frac{\partial v}{\partial\theta} + a_{16}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial\varphi} + a_{17}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \\
&\quad + a_{18}v + a_{19}\frac{\partial w}{\partial\theta} + a_{1,10}w + a_{1,11}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\varphi} + a_{1,12}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\varphi^2} + a_{1,13}\psi_\theta + \\
&\quad + a_{1,14}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\theta} + a_{1,15}\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial\theta\partial\varphi} + a_{1,16}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\varphi} + a_{1,17}\psi_\varphi; \\
\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} &= a_{21}\frac{\partial u}{\partial\theta} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\varphi} + a_{23}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + a_{24}u + a_{25}\frac{\partial v}{\partial\theta} + a_{26}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + a_{27}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \\
&\quad + a_{28}v + a_{29}\frac{\partial w}{\partial\varphi} + a_{2,10}w + a_{2,11}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} + a_{2,12}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\theta\partial\varphi} + a_{2,13}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\varphi} + \\
&\quad + a_{2,14}\psi_\theta + a_{2,15}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\varphi} + a_{2,16}\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial\varphi^2} + a_{2,17}\psi_\varphi; \\
\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} &= a_{31}\frac{\partial u}{\partial\theta} + a_{32}u + a_{33}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + a_{34}v + a_{35}\frac{\partial w}{\partial\theta} + a_{36}\frac{\partial w}{\partial\varphi} + a_{37}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + \\
&\quad + a_{38}w + a_{39}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} + a_{3,10}\psi_\theta + a_{3,11}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\varphi} + a_{3,12}\psi_\varphi + a_{3,13}q_\gamma; \\
\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\theta^2} &= a_{41}\frac{\partial u}{\partial\theta} + a_{42}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + a_{43}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + a_{44}u + a_{45}\frac{\partial v}{\partial\theta} + a_{46}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial\varphi} + a_{47}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \\
&\quad + a_{48}v + a_{49}\frac{\partial w}{\partial\theta} + a_{4,10}w + a_{4,11}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} + a_{4,12}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\varphi} + a_{4,13}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\varphi^2} + \\
&\quad + a_{4,14}\psi_\theta + a_{4,15}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\theta} + a_{4,16}\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial\theta\partial\varphi} + a_{4,17}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\varphi} + a_{4,18}\psi_\varphi; \\
\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial\theta^2} &= a_{51}\frac{\partial u}{\partial\theta} + a_{52}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\varphi} + a_{53}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + a_{54}u + a_{55}\frac{\partial v}{\partial\theta} + a_{56}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + a_{57}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \\
&\quad + a_{58}v + a_{59}\frac{\partial w}{\partial\varphi} + a_{5,10}w + a_{5,11}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} + a_{5,12}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\theta\partial\varphi} + a_{5,13}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\varphi} + \\
&\quad + a_{5,14}\psi_\theta + a_{5,15}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\theta} + a_{5,16}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\varphi} + a_{5,17}\frac{\partial^2\psi_\varphi}{\partial\varphi^2} + a_{5,18}\psi_\varphi.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Коефіцієнти a_{ij} в загальному випадку залежать від θ і φ.

Додаючи до системи рівнянь (10) граничні умови на контурі оболонки отримаємо двовимірну крайову задачу

2. Для розв'язання даного класу двовимірних крайових задач застосовуємо підхід, що базується на апроксимації шуканого розв'язку в одному координатному напрямку за допомогою сплайн-функцій, а для розв'язання отриманої в результаті одновимірної крайової задачі використовуємо стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації [4, 7].

В систему (10) входять похідні від розв'язувальних функцій по координаті φ не вище другого порядку. На основі цього при апроксимації рішень по координаті φ можна обмежитися сплайн-функціями третього степеня. Тоді шуканий розв'язок крайової задачі для системи рівнянь (10) з відповідними граничними умовами подамо в такому вигляді [5, 7]:

$$u(\theta,\varphi)=\sum_{i=o}^{N}u_i(\theta)\phi_{1i}(\varphi); \qquad v(\theta,\varphi)=\sum_{i=o}^{N}v_i(\theta)\phi_{2i}(\varphi);$$
$$w(\theta,\varphi)=\sum_{i=o}^{N}w_i(\theta)\phi_{3i}(\varphi); \qquad \psi_\theta(\theta,\varphi)=\sum_{i=o}^{N}\psi_{\theta i}(\theta)\phi_{4i}(\varphi); \tag{11}$$
$$\psi_\varphi(\theta,\varphi)=\sum_{i=o}^{N}\psi_{\varphi i}(\theta)\phi_{5i}(\varphi),$$

де $u_i(\theta)$, $v_i(\theta)$, $w_i(\theta)$, $\psi_{\theta i}(\theta)$, $\psi_{\varphi i}(\theta)$ — невідомі функції, що залежать від координати θ; $\varphi_{ji}(y)$ $(j=\overline{1,5})$ — лінійні комбінації B-сплайнів на рівномірній сітці $\Delta\colon 0=\varphi_0<\varphi_1<\cdots<\varphi_N$, що точно задовольняють граничні умови на краях. В систему входять похідні від розв'язувальних функцій по координаті φ не вище другого порядку і можна обмежитися при апроксимації сплайн-функціями третього степеня.

Підставивши вирази (11) в розв'язувальну систему рівнянь (10) і граничні умови, застосовуючи метод сплайн-колокації та вимагаючи їх задоволення на $N+1$ лініях $\varphi=\xi_i$ $(i=\overline{1,N+1})$, отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь порядку $10(N+1)$, яку можна навести в нормальній формі Коші у вигляді

$$\frac{d\overline{R}}{d\theta}=A(\theta)\overline{R}+\overline{f}(\theta), \tag{12}$$

де $\overline{R}=\{u_0,u_1,\dots,u_N,v_0,v_1,\dots,v_N,w_0,w_1,\dots,w_N,\psi_{\theta 0},\psi_{\theta 1},\dots,\psi_{\theta N},\psi_{\varphi 0},\psi_{\varphi 1},\dots,\psi_{\varphi N}\}^T$ — вектор-функція від θ; $\overline{f}(\theta)$ — вектор правих частин; $A(\theta)$ — квадратна матриця, елементи якої залежать від θ.

Для розв'язання одновимірної крайової задачі (12) використовуємо стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації.

3. Як приклад застосування запропонованого чисельно-аналітичного підходу розв'яжемо задачу про дослідження напружено-деформованого стану ізотропної сферичної оболонки, замкненої по координаті φ. У цьому випадку двовимірна крайова задача внаслідок симетрії по φ зведеться до одновимірної. Нехай товщина оболонки змінюється за законом $h=1+\alpha\cos\theta$, $r=20$, $q_\gamma=q=\text{const}$. Контури $\theta=\pi/3$ та $\theta=\pi/2$ жорстко закріплені, тобто на них виконуються умови $u=v=w=0$, $\psi_\varphi=\psi_\theta=0$.

На рис. 1 порівнюється розв'язок двовимірної крайової задачі з умовами симетрії на контурах $\varphi=\text{const}$, отриманий за допомогою описаної вище методики (суцільна лінія) та розв'язок одновимірної крайової задачі, одержаний методом дискретної ортогоналізації (точки). З графіків видно, що розв'язки при різних значеннях параметра зміни товщини α практично не відрізняються.

Також було розв'язано задачу про напружено-деформований стан незамкненої по параметру φ сферичної оболонки ($\pi/3\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$), жорстко закріпленої по всьому контуру. Всі інші параметри оболонки такі ж, як у попередній задачі. На рис. 2 показа-

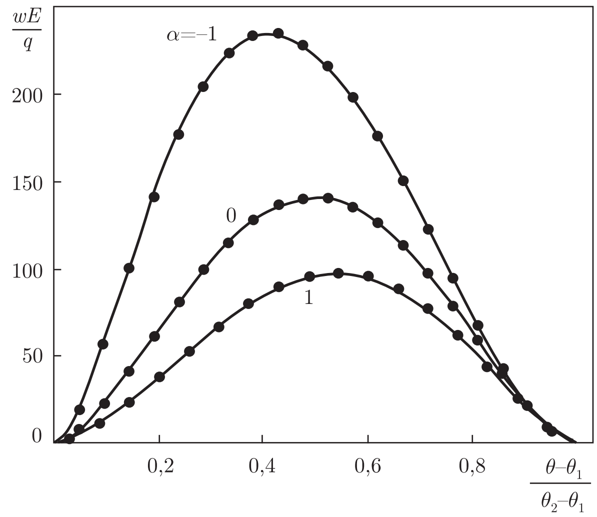

Рис. 1. Розподіл прогинів вздовж θ

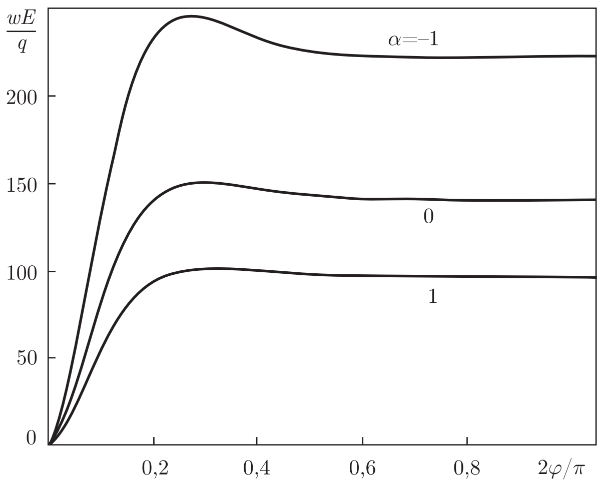

Рис. 2. Розподіл прогинів вздовж φ

но розподіл прогинів вздовж параметра φ в перерізі $\theta = 5\pi/12$ залежно від параметра α (з міркувань симетрії розподіл наведено на інтервалі $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$). З графіків видно, що зміна товщини має значний вплив на напружено-деформований стан сферичної оболонки.

Таким чином, в роботі розроблено ефективний чисельно-аналітичний підхід до розв'язання задач статики сферичних ортотропних оболонок змінної товщини в уточненій постановці при різних граничних умовах. З вихідних рівнянь уточненої теорії оболонок отримано розв'язувальну систему диференціальних рівнянь із граничними умовами, що становлять двовимірну крайову задачу, яка розв'язується шляхом зведення до одновимірної методом сплайн-колокації і розв'язання одновимірної крайової задачі стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. На основі викладеного підходу побудовано алгоритм і створено ефективний програмний комплекс, за допомогою якого розв'язано ряд задач і проведено аналіз напруженого стану оболонок вказаного класу залежно від законів зміни товщини при різних граничних умовах, виявлено ряд закономірностей розподілів прогинів і напружень, що мають практичне значення при оцінці міцності і надійності елементів конструкцій. Запропонований підхід дозволяє проводити дослідження напружено-деформованого стану сферичних ортотропних оболонок змінної товщини.

1. *Справочник* по теории упругости / Под ред. П. М. Варвака и А. Ф. Рябова. – Киев: Будівельник, 1971. – 418 с.
2. *Gould P. L.* Analysis of shells and plates. – New York: Springer-Verlag, 1988. – 483 p.
3. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 543 с.
4. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1973. – 246 с.
5. *Rychter Z.* Family of shear deformation theories for shallow shells // Adv. Mech. – 1993. – No 98. – P. 221–232.
6. *Simmonds J. G., Wan F. Y. M.* An asymptotic analysis of the three-dimensional displacements and stresses in a spherical shell under inward radially opposed concentrated surface loads // Int. J. of Solids and Struct. – 2001. – **38**, No 38–39. – P. 6869–6887.
7. *Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: ИД "Академпериодика", 2006. – 472 с.
8. *Grigorenko A. Ya., Yaremchenko N. P.* On stress-stain state of rectangular in the plan shallow shells of variable thickness in a refined statement // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No 10. – P. 80–91.
9. *Grigorenko Ya. M., Avramenko O. A.* Studying the stress-strain state of closed non-thin orthotropic conical shells of variable thickness // Ibid. – 2008. – **44**, No 6. – P. 46–58.
10. *Grigorenko Ya. M., Yaremchenko S. N.* Influence of orthotropy on displacements and stresses in nonthin cylindrical shells with elliptic cross section // Ibid. – 2007. – **43**, No 6. – P. 82–92.
11. *Fan S. C., Cheung Y. K.* Analysis of shallow shells by spline finite strip method // Eng. Struct. – 1983. – No 5. – P. 255–263.
12. *Li Q. S., Liu J., Tang J.* Buckling of shallow spherical shells including the effect of transverse shear deformation // Int. J. of Mech. Science – 2003. – **38**, No 9. – P. 1519–1529.
13. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
14. *Vorovich I. I., Manakova N. I.* Equations of the axisymmetric state of stress and strain of a nonshallow spherical shell of nonlinear elastic material under large deformation // J. of Appl. Math. and Mech. – 1973. – **37**, No 4. – P. 886–891.
15. *Григоренко Я. М., Шевченко Ю. Н., Василенко А. Т.* Численные методы. – Киев: А. С. К., 2002. – 448 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 23.06.2010

O. Ya. Grigorenko, O. V. Vovkodav, S. M. Yaremchenko

Numerical solution of problems of a stress-strain state of spherical shells with variable thickness in a refined statement

The problem of a stress-strain state of the orthotropic spherical shell of variable thickness in one dimension is carried out in a refined statement for different boundary conditions. The numerical-analytical method is developed based on using the spline-approximation and the discrete-orthogonalization methods. The stress-strain state of orthotropic shallow shells is investigated for the case of the variable thickness and preserving the weight.