УДК 517.36

Академик НАН Украины **А. А. Мартынюк**

Об одной математической модели мировой динамики и устойчивости развития

Викладено одну модифікацію моделі Форрестера світової динаміки. У запропонованій моделі введено фактор невдоволення на кожному системному рівні моделі. Встановлено умови стійкого розвитку відносно двох мір у межах даної моделі.

Целью данной работы является обсуждение одной модификации модели Форрестера, учитывающей фактор недовольства развитием на отдельных уровнях модели, и получение условий устойчивого развития относительно двух мер.

Модель мировой динамики Форрестера (см. [1, 2]) построена на основе подхода, развитого при изучении сложных систем с нелинейными обратными связями. При моделировании мировой динамики были приняты во внимание следующие глобальные процессы:

(i) быстрый рост населения планеты;

(ii) индустриализация и связанный с нею рост промышленного производства;

(iii) ограниченность пищевых ресурсов;

(vi) увеличение отходов производства;

(v) нехватка природных ресурсов.

Основными переменными в модели Форрестера приняты:

1) население P (далее используется обозначение X_1);

2) основные фонды K (X_2);

3) доля фондов в сельском хозяйстве X (X_3);

4) уровень загрязнения окружающей среды Z (X_4);

5) количество невозобновляемых природных ресурсов R (X_5).

Факторами, через которые осуществляется взаимовлияние переменных $X_1, \ldots, X_5$, приняты следующие:

относительная численность населения P_p (население, нормированное к его численности в 1970 г.);

удельный капитал K_p;

материальный уровень жизни C;

относительный уровень питания F;

нормированная величина удельного капитала в сельском хозяйстве X_p;

относительное загрязнение Z_s;

доля остающихся ресурсов R_R.

Кроме перечисленных факторов, Форрестер рассмотрел еще понятие “качество жизни” Q. Этот фактор зависит от переменных P_p, C, F и Z_s: $Q = Q_C Q_F Q_P Q_Z$.

Для переменных P, K, X, Z, R, которые интерпретируются как системные уровни, пишутся уравнения типа

$$\frac{dy}{dt} = y^+ - y^-, \tag{1}$$

где y^+ — положительный темп роста скорости переменной; y^- — отрицательный темп скорости убывания переменной y. В упрощенном виде уравнения мировой динамики имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{dP}{dt} = P(B - D),\\
&\frac{dK}{dt} = K_+ - T_K^{-1}K,\\
&\frac{dX}{dt} = X_+ - T_X^{-1}X, \qquad (2)\\
&\frac{dZ}{dt} = Z_+ - T_Z^{-1}Z,\\
&\frac{dR}{dt} = -R_-,
\end{aligned}$$

где B — темп рождаемости; D — темп смертности; K_+ — скорость производства основных фондов; X_+ — прирост доли сельскохозяйственных фондов; Z_+ — скорость генерации загрязнения; T_Z — характерное время естественного разложения загрязнения; R_- — скорость потребления ресурсов.

Математический анализ модели (2) обнаружил существование стационарных и квазистационарных решений, которые интерпретируются как "глобальное равновесие" и "устойчивое общество".

Пусть "нация" N (совокупность международных организаций) формирует общественное мнение о глобальных процессах, происходящих на определенном системном уровне. Изменение меры общественного мнения предлагается моделировать на каждом системном уровне уравнением

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} + m^2\chi = 0, \qquad \chi'(t_0) = \chi'_0, \qquad \chi(t_0) = \chi_0. \qquad (3)$$

Здесь величина m является функцией значения переменных 1–5 в момент $t = t_0$. При этом для системных уровней пишутся уравнения типа (1)

$$\frac{dy}{dt} = y^+ - y^- + b(t), \qquad (4)$$

где функция "недовольства" $b(t)$ конкретизируется так (ср. [3]):

$$b(t) = ge^{\pm\alpha|\chi(t)|}, \qquad \alpha = \text{const} > 0. \qquad (5)$$

Здесь g — фактор "недовольства", отражающий изменение "качества жизни" стран, вовлеченных в мировую динамику. Соотношение (5) моделирует нарастание (убывание) недовольства протекающими глобальными процессами в зависимости от изменения меры общественного мнения.

Таким образом, обобщением модели Форрестера (1), (2) являются уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{dX_1}{dt} = X_1(B-D) + g_1 e^{\pm\alpha|\chi(t)|},\\
&\frac{dX_2}{dt} = K_+ - T_K^{-1} X_2 + g_2 e^{\pm\alpha|\chi(t)|},\\
&\frac{dX_3}{dt} = X_+ - T_X^{-1} X_3 + g_3 e^{\pm\alpha|\chi(t)|},\\
&\frac{dX_4}{dt} = Z_+ - T_Z^{-1} X_4 + g_4 e^{\pm\alpha|\chi(t)|},\\
&\frac{dX_5}{dt} = -R_- + g_5 e^{\pm\alpha|\chi(t)|},\\
&\frac{d^2\chi}{dt^2} + m^2\chi = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

где $g_1, \ldots, g_5$ — факторы недовольства на соответствующем системном уровне.

Общую нелинейную модель мировой динамики предлагается описывать системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dX_i}{dt} = W_i(X) + g_i e^{\pm\alpha|\chi(t)|}, \tag{7}$$

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} + m^2\chi = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{8}$$

Здесь $X = (X_1, \ldots, X_5, \ldots, X_N) \subseteq S(H)$, где $X_1, \ldots, X_5$ — переменные Форрестера и $X_{5+1}, \ldots, X_n$ — некоторые другие переменные, вовлеченные в уравнения мировой динамики, $W_i\colon S(H) \to R_+^N$ является вектор-функцией с компонентами, описывающими изменение переменных на соответствующем системном уровне. Предполагается, что решение $(X^T(t), \chi(t))^T$ системы связанных уравнений (7), (8) существует при всех $t \geqslant t_0$ и начальных условиях $(X_0^T, \chi_0', \chi_0)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{int}(R_+^N, R \times R)$.

Предположим, что система нелинейных уравнений

$$\begin{aligned}
&W_1(X) + g_1 e^{\pm\alpha|\chi(t)|} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&W_N(X) + g_N e^{\pm\alpha|\chi(t)|} = 0
\end{aligned}$$

имеет квазистационарное решение $X_n(t) = (X_{1n}(t), \ldots, X_{nN}(t))^T$ при любой ограниченной функции $\chi(t)$, являющейся решением уравнения (8). При этом заменой Ляпунова

$$Y(t) = X(t) - X_n(t)$$

система уравнений (7) приводится к виду

$$\frac{dY}{dt} = Y(t, Y), \tag{9}$$

где $Y(t, Y) = W(Y + X_n(t)) + Ge^{\pm|\chi(t)|} - (W(X_n(t)) + Ge^{\pm|\chi(t)|})$. Очевидно, $Y(t, 0) = 0$ при всех $t \geqslant 0$. Система (9) является системой возмущенных уравнений мировой динамики.

Проблема устойчивого развития связана с анализом решения $Y = 0$ уравнений (9). Анализ устойчивости решений будем проводить относительно двух мер H_0, H, принимающих значения из множеств

$$\Phi = \{H \in C(R_+ \times R^N,\ R_+)\colon \inf_{(t,Y)} H(t,Y) = 0\};$$

$$\Phi_0 = \{H \in \{\Phi\colon \inf_{Y} H(t,Y) = 0 \text{ для каждого } t \in R_+\}.$$

Далее будем придерживаться следующего определения.

Определение 1. Мировая динамика (7), (8) имеет устойчивое развитие относительно двух мер, если для любого $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in R_+$ существует положительная функция $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$, непрерывная по t_0 для каждого ε, такая, что из условия $H_0(t_0, Y_0) < \delta$ следует оценка $H(t, Y(t)) < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$ и при любом ограниченном решении $\chi(t)$ уравнения (8).

Заметим, что если система (7), не имея нулевого решения ($W(0, \chi(t)) \neq 0$ при $X = 0$), имеет номинальное решение $X_n(t)$, тогда меры H_0, H могут быть выбраны так: $H(t,X) = H_0(t,X) = \|X - X_n(t)\|$, где $\|\cdot\|$ — эвклидова норма вектора X. Если в системе (7) представляет интерес исследование устойчивости развития по переменным Форрестера, то меры H_0, H выбираются так: $H(t,X) = \|X - X_n(t)\|_s$, $1 \leqslant s \leqslant 5$, и $H_0(t,X) = \|X - X_n(t)\|$. Это соответствует анализу устойчивости системы (7) по двум мерам относительно части переменных.

Предположим, что для системы (9) построены элементы $u_{ij}(t,Y)$ матричнозначной функции (см. [4])

$$U(t,Y) = [u_{ij}(t,Y)], \qquad i,j = 1,2,\ldots,m, \qquad m < N,$$

где $u_{ii} \in C(R_+ \times R^N, R_+)$ и $u_{ij} \in C(R_+ \times R^N, R)$ при $(i \neq j) \in [1,m]$. Функцию

$$V(t,Y,w) = w^T U(t,Y) w, \qquad w \in R^m, \tag{10}$$

будем рассматривать вместе с функцией

$$D^+ V(t,Y,w) = w^T D^+ U(t,Y) w, \tag{11}$$

где $D^+U(t,Y)$ — правая верхняя производная Дини вычисляется поэлементно для матричнозначной функции $U(t,Y)$.

Условия устойчивости развития относительно двух мер (H_0, H) содержатся в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть уравнения глобальной динамики* (7), (8) *определены и непрерывны в области значений* $(t, Y, \chi) \in R_+ \times \mathcal{S} \times D$. *Если при этом*

1) меры H_0, $H \in \Phi$*-классу;*

2) функция (10) *удовлетворяет условию* $V(t,Y,w) \in C(R_+ \times \mathcal{S} \times R^m, R_+)$ *и является локально липшицевой по* Y*;*

3) функция $V(t,Y,w)$ *удовлетворяет оценкам*

а) $a(H(t,Y)) \leqslant V(t,Y,w) \leqslant b(t, H_0(t,Y))$ *при всех* $(t,Y,w) \in S(h,H) \times R^m$ *либо*

б) $a(H(t,Y)) \leqslant V(t,Y,w) \leqslant c(H_0(t,Y))$,

где a, $c \in K$*-классу и* $b \in CK$*-классу функций сравнения;*

4) существует матричнозначная функция $\Theta(Y,w)$, $\Theta \in C(R^N \times R^m, R^{m\times m})$ *и* $\Theta(0,w) = 0$ *при всех* $(w \neq 0) \in R^m$ *такая, что*

$$D^+V(t,Y,w) \leqslant \mathrm{e}^T\widehat{\Theta}(Y,w)\mathrm{e}$$

при всех $(t,Y,w) \in \mathcal{S}\times R^m$, *где* $\mathrm{e} = (1,1,\ldots,1)^T \in R^m$, $\mathcal{S} \subset (R^N \times R_+)$, $\widehat{\Theta}(Y,w) = (\Theta(Y,w) + \Theta^T(Y,w))/2$ *при любом ограниченном решении* $\chi(t)$ *уравнения* (8).
Тогда:

А. Мировая динамика (7), (8) *имеет устойчивое развитие относительно двух мер, если матрица* $\widehat{\Theta}(Y,w)$ *отрицательно полуопределенная, мера* H *непрерывна по мере* H_0 *и выполняется условие 3а.*

Б. Мировая динамика (7), (8) *имеет равномерно устойчивое развитие относительно двух мер, если матрица* $\widehat{\Theta}(Y,w)$ *отрицательно полуопределенная, мера* H *равномерно непрерывна по мере* H_0 *и выполняется условие 3б.*

Доказательство. Заметим, что функция $V(t,Y,w)$, определяемая формулой (10), — скалярная псевдоквадратная форма относительно $w \in R^m$. Поэтому знакоопределенность функции (10) относительно меры H не требует H-знакоопределенности элементов $u_{ij}(t,x)$ матрицы $U(t,Y)$. Докажем вначале утверждение A теоремы 1. Из условий *1*, *2*, *3а* следует, что функция $V(t,Y,w)$ слабо H_0-убывающая. Поэтому при $t_0 \in R$ $(t_0 \in R_+)$ существует постоянная $\Delta_0 = \Delta_0(t_0) > 0$ такая, что при $H_0(t_0,x_0) < \Delta_0$ выполняется неравенство

$$V(t_0,Y_0,w) \leqslant b(t_0,H_0(t_0,Y_0)). \tag{12}$$

Из условия *3а* следует также, что существует $\Delta_1 \in (0,H)$ такое, что

$$a(H(t,x)) \leqslant V(t,x,w) \qquad \text{при} \qquad H(t,x) \leqslant \Delta_1. \tag{13}$$

Из того, что мера H непрерывна по мере H_0, следует, что существуют функция $\varphi \in CK$ и постоянная $\Delta_2 = \Delta_2(t_0) > 0$ такие, что

$$H(t_0,Y_0) \leqslant \varphi(t_0,H_0(t_0,Y_0)) \qquad \text{при} \qquad H_0(t_0,Y_0) < \Delta_2, \tag{14}$$

где Δ_2 выбрано так, что

$$\varphi(t_0,\Delta_2) < \Delta_1. \tag{15}$$

Пусть $\varepsilon \in (0,\Delta_0)$ и $t_0 \in (t_0 \in \mathcal{T}_\tau)$ заданы. Так как функции $a \in K$ и $b \in CK$, то при заданных ε и t_0 можно выбрать $\Delta_3 = \Delta_3(t_0,\varepsilon) > 0$ так, что

$$b(t_0,\Delta_3) < a(\varepsilon). \tag{16}$$

Выберем $\delta(t_0) = \min(\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3)$. Из условий (12)–(16) следует, что при $H_0(t_0,Y_0) < \delta$ выполняются неравенства

$$a(H(t_0,Y_0)) \leqslant V(t_0,Y_0,w) \leqslant b(t_0,H_0(t_0,Y_0)) < a(\varepsilon),$$

из которых получаем

$$H(t_0,Y_0) < \varepsilon.$$

Пусть $Y(t;t_0,Y_0)=Y(t)$ — решение системы (9) с начальными условиями, для которых $H_0(t_0,Y_0)<\delta$. Убедимся, что при выполнении условий теоремы 1 выполняется оценка

$$H(t,Y(t))<\varepsilon \qquad \text{при всех} \qquad t\geqslant t_0.$$

Предположим, что существует $t_1\geqslant t_0$ такое, что

$$H(t_1,Y(t))=\varepsilon \qquad \text{и} \qquad H(t,Y(t))<\varepsilon, \qquad t\in[t_0,t_1),$$

для решения $Y(t;t_0,Y_0)$ с начальными условиями $H_0(t_0,Y_0)<\delta$.

Из условия *4* и того, что матрица $\widehat{\Theta}(Y,w)$ отрицательно полуопределенная в области $\mathcal{S}$, следует, что корни $\lambda_i=\lambda_i(Y,w)$ уравнения

$$\det[\widehat{\Theta}(Y,w)-\lambda E]=0$$

удовлетворяют условию $\lambda_i(Y,w)\leqslant 0$, $i=1,2,\ldots,m$, в области $\mathcal{S}$. Поэтому

$$D^+V(t,Y,w)\leqslant e^T\widehat{\Theta}(Y,w)e\leqslant 0$$

и при всех $t\in[t_0,t_1]$ выполняется последовательность неравенств

$$a(\varepsilon)=a(H(t_1,Y(t_1)))\leqslant V(t,Y,w)\leqslant V(t_0,Y_0,w)\leqslant b(t_0,H_0(t_0,Y_0))<a(\varepsilon).$$

Полученное противоречие опровергает предположение о том, что $t_1\in[t_0,+\infty)$. Следовательно, система (7), (8) (H_0,H)-устойчива. Доказательство утверждения *Б* теоремы 1 проводится аналогично. При этом учитывая, что выполняется условие *3б* и мера H равномерно непрерывна по мере H_0, величину δ можно выбрать не зависящей от $t_0\in R$ $(t_0\in R_+)$. Отсюда будет следовать равномерная (H_0,H)-устойчивость системы (7), (8).

Заметим, что построение подходящей функции (10) на основе матричнозначной функции $U(t,Y)$ существенно упрощается, так как элементы $u_{ij}(t,Y)$ могут быть связаны с уравнениями мировой динамики на определенном системном уровне.

1. *Forrester J. M.* World dynamics. – Cambridge: Wright-Allen Press, 1971. – 144 p.
2. *Meadows D. L., Meadows D. H.* Toward global equilibrium. – Cambridge: Wright-Allen Press, 1972. – 274 p.
3. *Мартынюк А. А.* Об одном обобщении модели Ричардсона гонки вооружений // Докл. АН. – 1994. – **339**, № 1. – С. 15–17.
4. *Martynyuk A. A.* Stability of motion. The role of multicomponent Liapunov's functions. – London: Cambridge Sci. Publ., 2007. – 322 p.

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 18.12.2009

Academician of the NAS of Ukraine **A. A. Martynyuk**

On a mathematical model of the world dynamics and the sustainable development

The paper is devoted to the discussion of a modification of Forrester's model of the world dynamics. In the model, the "factor of discontent" is taken into account via the dynamics of public opinion on the development of separate system levels. We also established the conditions of sustainable development with respect to two measures.