УДК 531.38

©2009. **Г.В. Горр, А.В. Мазнев**

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРВОГО ИНТЕГРАЛА УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА–ПУАССОНА НА ИНВАРИАНТНОМ МНОЖЕСТВЕ

Исследуются условия существования первого интеграла уравнений Кирхгофа–Пуассона на инвариантных множествах. Рассмотрен случай, когда уравнения Кирхгофа–Пуассона допускают линейный первый интеграл на инвариантном множестве, описываемом двумя инвариантными соотношениями. Указана связь полученных результатов с решением [1].

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается уравнениями класса Кирхгофа $[2, 3]$

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$

имеющими первые интегралы

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \qquad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \tag{3}$$

$$(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k. \tag{4}$$

Опишем обозначения, принятые в (1)–(4): $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – постоянный вектор, характеризующий движение носимых тел гиростата; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – постоянный вектор; A – тензор инерции гиростата [4]; B и C – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ обозначает относительную производную по времени; E и k – произвольные постоянные.

Если в качестве подвижной системы координат принять главную систему координат, то уравнениям (1), (2) можно придать вид

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, ..., x_6), \qquad \frac{\partial X_i(x_1, x_2, ..., x_6)}{\partial x_i} = 0, \tag{5}$$

где $i = \overline{1, 6}$; $X_i(x_1, x_2, ..., x_6)$ – многочлены относительно переменных $x_1 = \omega_1$, $x_2 = \omega_2$, $x_3 = \omega_3$, $x_4 = \nu_1$, $x_5 = \nu_2$, $x_6 = \nu_3$. В силу геометрического интеграла из (3) $x_4^2(t) + x_5^2(t) + x_6^2(t) = 1$, и поэтому указанные здесь функции ограничены по t. Из остальных интегралов системы (3), (4) вытекает, что и функции $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), x_3 = x_3(t)$ ограничены. Это значит, что решение уравнений (1), (2) существует при заданных начальных данных на бесконечном промежутке по t.

В силу последнего условия из (5) и наличия у системы (1), (2) трех интегралов (3), (4), которые запишем в виде

$$\begin{gathered} f_1(x_1, x_2, ..., x_6) = c_1, \\ f_2(x_4, x_5, x_6) = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = c_2 = 1, \qquad f_3(x_1, x_2, ..., x_6) = c_3, \end{gathered} \tag{6}$$

существование у системы (1), (2) дополнительного первого интеграла позволило бы применить теорию Якоби и получить остальные три интеграла

$$\begin{gathered} f_4(x_1, x_2, ..., x_6) = c_4, \\ f_5(x_1, x_2, ..., x_6) = c_5, \qquad f_6(x_1, x_2, ..., x_6, t) = c_6. \end{gathered} \tag{7}$$

В работе В.В. Козлова и Д.А. Онищенко [5] доказана неинтегрируемость уравнений (1), (2) в общем случае, т.е. в случае, отличном от решений Клебша, Стеклова, Кирхгофа и Ляпунова. Поэтому представляет большой интерес построение интегрального многообразия (7) при фиксированных значениях произвольных постоянных c_i $(i = \overline{4, 6})$. Обозначим через $x = x(t; x^{(0)})$– решение уравнений (5), где $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_6^{(0)})^T$ – начальное значение вектора x. Будем предполагать, что $x^{(0)}$ не принадлежит особому инвариантному множеству уравнений (5), т.е. $X_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_6^{(0)}) \neq 0, \quad i = \overline{1, 6}$.

Множество $M \subset E_6$, задаваемое (6), (7), называется неособым инвариантным множеством системы (1), (2), если $x(t; x^{(0)}) \in M$ для $t \geq 0$ и произвольной неособой точки $x^{(0)} \in M$ [6]. Известно, что в окрестности каждой неособой точки уравнений (5) существуют первые интегралы $f_i(x_1, x_2, ..., x_6) = c_j$ $(j = \overline{1, 5})$. Как правило, в большинстве курсов по теории обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривается первый интеграл $f(x_1, x_2, ..., x_6) = C$, для которого функция $f(x_1, x_2, ..., x_6)$ принимает постоянное значение на всех решениях уравнений (5). Условием того, что $f(x_1, x_2, ..., x_6)$ является первым интегралом, служит равенство

$$L_x f = 0, \qquad L_x f = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_6)}{\partial x_i} X_i(x_1, x_2, ..., x_6), \tag{8}$$

где вектор $(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_6}) \neq 0$.

В работах [7, 8] рассмотрены функции $f(x_1, x_2, ..., x_6)$, которые принимают постоянное значение на некоторых решениях системы (5). Пусть совокупность этих решений образует инвариантное множество M, описываемое системой уравнений

$$\varphi_j(x_1, x_2, ..., x_6) = 0 \quad (j = \overline{1, k},\ k < 6). \tag{9}$$

Тогда, по аналогии с соотношением (8), в силу равенств (9) условие того, что $f(x_1, x_2, ..., x_6)$ – первый интеграл на множестве M, можно записать так

$$f(x_1, x_2, ..., x_6)\big|_{\varphi_j(x_1,x_2,...,x_6)=0} = c, \quad (j = \overline{1,k}), \tag{10}$$

где c – произвольная постоянная.

В данной статье рассматривается постановка задачи об условиях существования первого интеграла $f(x_1, x_2, ..., x_6) = c$ на множестве M для уравнений Кирхгофа–Пуассона (1), (2) и ее применение в случае линейного первого интеграла.

Инвариантные множества тесно связаны с инвариантными соотношениями. Существует несколько подходов в изучении инвариантных соотношений [7, 9, 10]. Изложим наиболее употребляемые в задачах динамики твердого тела [9, 10].

Соотношение

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_6) = 0, \quad \operatorname{grad}\varphi \neq 0 \tag{11}$$

называется инвариантным соотношением (ИС) [9], если для всех решений уравнений (5), удовлетворяющих условию $\varphi(x_1(t_0), x_2(t_0), ..., x_6(t_0)) = 0$, выполняется равенство $\varphi(x_1(t), x_2(t), ..., x_6(t)) = 0$ при $t \in (t_0, \infty)$.

В работе [9] показано, что необходимым и достаточным условием того, что соотношение (11) является ИС, служит уравнение

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{\partial\varphi(x_1, x_2, ..., x_6)}{\partial x_i} X_i(x_1, x_2, ..., x_6) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_6)\lambda(x_1, x_2, ..., x_6), \tag{12}$$

которому удовлетворяет функция $\varphi(x_1, x_2, ..., x_6)$. В (12) $\lambda(x_1, x_2, ..., x_6)$ – аналитическая функция.

П.В. Харламов [10, с. 16] дал другое определение ИС (11). Соотношение (11) называется инвариантным соотношением, если не пусто многообразие

$$\sigma : \begin{cases} \varphi(x_1, x_2, ..., x_6) = 0, \\ L_x\varphi(x_1, x_2, ..., x_6) = \\ \qquad = \displaystyle\sum_{i=1}^{6} \frac{\partial\varphi(x_1, x_2, ..., x_6)}{\partial x_i} X_i(x_1, x_2, ..., x_6) = \\ \qquad = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_6) = 0, \\ L_x\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_6) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_x\varphi_k(x_1, x_2, ..., x_6) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{13}$$

Отметим, что для связи с уравнениями (1), (2) формулы (5)–(13) записаны для случая, когда фазовый вектор x принадлежит шестимерному пространству. Все они при рассмотрении ИС допускают очевидное обобщение и для $x \in \mathbb{R}_n$.

2. Метод нахождения многообразия M**.** Зададим функцию $f(x_1, x_2, ..., x_6)$ и рассмотрим множество

$$f(x_1, x_2, ..., x_6) = c, \tag{14}$$

где c – произвольная постоянная и вектор $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_6}\right) \neq \mathbf{0}$. Предположим, что функция $f(x_1, x_2, ..., x_6)$ дважды непрерывно дифференцируема в E_6. Поставим задачу о нахождении условий существования в интегральном многообразии (6), (7) инвариантного многообразия M, определяемого уравнениями (9), для которого соотношение (14) является первым интегралом, т.е. выполняется условие (10). В силу метода инвариантных соотношений, описываемого формулами (11)–(13), и определения первого интеграла для всех решений уравнений (5), принадлежащих многообразию M, выполняется условие $f(x_1(t), x_2(t), ..., x_6(t)) = c$. При этом производные $f^{(n)}$ любого порядка по времени равны нулю.

Вычислим первые две производные $f^{(1)}, f^{(2)}$ и в полученных уравнениях перейдем к точкам множества M. Присоединяя к ним функцию из (14) и первые интегралы (6), для точек множества M (если оно существует) получим соотношения

$$\begin{gathered} f(x_1, x_2, ..., x_6) = c, \qquad f^{(1)}(x_1, x_2, ..., x_6) = L_x f(x_1, x_2, ..., x_6) = 0, \\ f^{(2)}(x_1, x_2, ..., x_6) = L_x f^{(1)}(x_1, x_2, ..., x_6) = 0, \qquad f_1(x_1, x_2, ..., x_6) = c_1, \\ f_2(x_4, x_5, x_6) = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = c_2 = 1, \quad f_3(x_1, x_2, ..., x_6) = c_3. \end{gathered} \tag{15}$$

Множество значений $x_1, x_2, ..., x_6$, для которого равенства (15) зависимы, и составляет инвариантное множество M. При этом должно выполняться условие, что величина c – произвольная постоянная. Относительно величин c_1, c_3 такое условие может и не выполняться. На основании методов ИС, предложенных Т. Леви-Чивитой и П.В. Харламовым, практический способ в нахождении условий существования множества M состоит в последовательном изучении двух задач. Первая задача заключается в том, что исследуются условия, при выполнении которых равенство $f^{(1)}(x_1, x_2, ..., x_6) = 0$ было бы тождеством на первом интеграле (14) и интегралах $f_1 = c_1, f_2 = c_2, f_3 = c_3$. При ее решении уравнение $f^{(1)}(x_1, x_2, ..., x_6) = 0$ может быть преобразовано к виду $\Phi(u, v, c, c_1, c_3) = 0$, где u, v – новые независимые переменные.

Требование того, чтобы уравнение $\Phi(u, v, c, c_1, c_3) = 0$ было тождеством для любых значений u, v и параметра c, дает условия на постоянные c_1, c_3 и параметры уравнений (1), (2). Множество M в этом случае описывается уравнениями $f(x_1, x_2, ..., x_6) = c$, $f_1(x_1, x_2, ..., x_6) = c_1$, $x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 =$

$= 1, \;\; f_3(x_1, x_2, ..., x_6) = c_3$. Здесь c_1, c_3 могут быть как произвольными постоянными, так и функциями параметра c. Пример такого решения уравнений (1), (2) будет рассмотрен ниже.

Вторая задача состоит в том, что в системе (15) требуется, чтобы равенство $f^{(2)}(x_1, x_2, ..., x_6) = 0$ становилось тождеством на оставшихся соотношениях из системы (15). Т.е. во второй задаче исследуется система (15) в полном объеме и в предположении, что классические интегралы $f_1 = c_1, f_2 = c_2$, $f_3 = c_3$ независимы. При указанном подходе в общем случае приходим к уравнению вида $F(u, c, c_1, c_3) = 0$, где u – некоторая переменная. Требование того, чтобы это уравнение было тождеством по u и параметру c, приводит к условиям существования инвариантного множества M. Могут иметь место случаи, когда обе задачи допускают решение. Очевидно, что это зависит от условий на параметры c_1, c_3 и параметры задачи (1), (2).

3. Примеры для уравнений (1), (2). Вначале рассмотрим пример решения П.В. Харламова [11]. Пусть в уравнениях (1), (2) $B = 0, C = 0$

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{16}$$

Уравнения (16) имеют интегралы

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \qquad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \qquad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k. \tag{17}$$

Обозначим $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$. Пусть выполнены условия [11]

$$\begin{gathered} A_{ij} = 0 \;\; (i \neq j), \qquad A_{ii} = A_i \;\; (i = \overline{1,3}), \qquad \mathrm{s} = s(\cos\varepsilon_0, 0, \sin\varepsilon_0), \\ \boldsymbol{\lambda} = \big(\varkappa(2A_2 - A_1)\cos\varepsilon_0, 0, \varkappa(2A_2 - A_3)\sin\varepsilon_0\big). \end{gathered} \tag{18}$$

Постоянные первых интегралов (17) таковы

$$E = \frac{\varkappa^2}{2}(A_1\cos^2\varepsilon_0 + A_3\sin^2\varepsilon_0) - c, \qquad k = \frac{2\varkappa A_2 c}{s}, \tag{19}$$

где c – произвольная постоянная. Очевидно параметр $\varkappa$ выражается через исходные параметры следующим образом.

$$\varkappa^2 = \frac{\lambda_1^2}{(2A_2 - A_1)^2} + \frac{\lambda_3^2}{(2A_3 - A_1)^2}. \tag{20}$$

При условиях (18)–(20) решение П.В. Харламова для уравнений (16) имеет вид

$$p = \varkappa\cos\varepsilon_0, \qquad r = \varkappa\sin\varepsilon_0,$$

$$\nu_1 s = \big(\frac{A_2}{2}q^2 + c\big)\cos\varepsilon_0 - \sqrt{f(q)}\sin\varepsilon_0, \qquad \nu_2 s = -\varkappa A_2 q,$$

$$\nu_3 s = \big(\frac{A_2}{2}q^2 + c\big)\sin\varepsilon_0 + \sqrt{f(q)}\cos\varepsilon_0, \qquad \int\limits_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{f(q)}} = -\frac{t - t_0}{A_2}, \tag{21}$$

$$f(q) = -\frac{A_2^2}{4}q^4 - A_2(c + A_2\varkappa^2)q^2 + s^2 - c^2.$$

Решение (21) зависит от двух произвольных постоянных c и q_0 (либо t_0).

Из соотношений (21) вытекает решение Бобылева–Стеклова [12, 13]. Пусть выполнены следующие условия на параметры (18):

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \qquad \varepsilon_0 = 0, \qquad 2A_2 = A_1, \qquad \mathbf{s} = (s, 0, 0). \tag{22}$$

Тогда при условиях (22) имеем следующее решение

$$p = \varkappa, \qquad r = 0, \qquad s\nu_1 = \frac{A_2}{2}q^2 + c, \qquad s\nu_2 = -\varkappa A_2 q, \qquad s\nu_3 = \sqrt{f(q)},$$

$$\int\limits_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{f(q)}} = -\frac{t - t_0}{A_2}, \qquad f(q) = -\frac{A_2^2}{2}q^4 - A_2(c + A_2\varkappa^2)q^2 + s^2 - c^2. \tag{23}$$

Постоянные первых классических интегралов из формул (19) принимают значения

$$E = \frac{A_1\varkappa^2}{2} - c, \qquad k = \frac{2A_2\varkappa c}{s}.$$

В решении Бобылева–Стеклова (23) три произвольных постоянных $\varkappa, c, q_0$. Важно, что данное решение можно охарактеризовать линейным первым интегралом $p = \varkappa = \mathrm{const}$ и квадратичным интегралом $s\nu_1 - \dfrac{A_2}{2}q^2 = c = \mathrm{const}$ на инвариантном многообразии (23).

В решении П.В. Харламова (21) в силу (20) параметр $\varkappa$ принимает фиксированное (зависящее от параметров задачи) значение. Поэтому оно характеризуется квадратичным интегралом

$$s(\nu_1 \cos\varepsilon_0 + \nu_3 \sin\varepsilon_0) - \frac{A_2}{2}q^2 = c = \mathrm{const}. \tag{24}$$

Линейный первый интеграл в случае Бобылева–Стеклова имеет место при условии, что количество произвольных постоянных равно трем. Поэтому размерность инвариантного многообразия M в нем равна трем. В случае П.В. Харламова в силу (19), (24) размерность инвариантного многообразия равна двум.

Приведем пример существования линейного первого интеграла для уравнений Кирхгофа–Пуассона (1), (2) на инвариантном множестве.

Рассмотрим решение Е.К. Щетининой [14], полученное при обобщении решений В.Н. Рубановского [15] и Н.В. Хлыстуновой [16]. Пусть для уравнений (1), (2) выполняются условия

$$A_{12} = A_{23} = 0, \qquad A_{13}^2 = (A_{22} - A_{11})(A_{22} - A_{33}), \qquad B_{22} = B_{11} = -B_{33},$$

$$B_{12} = B_{23} = 0, \qquad B_{13}^2 = (A_{22} - A_{11})(C_{33} - C_{11}),$$

$$A_{13}B_{13} = B_{11}(A_{22} - A_{11}), \qquad C_{22} = C_{11}, \qquad C_{ij} = 0 \ \ (i \neq j), \tag{25}$$
$$\lambda_1 = -B_{11}\sin\varkappa_0, \qquad \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = -\frac{A_{33}B_{13}\sin\varkappa_0}{A_{22} - A_{11}}, \qquad s_1 = s_2 = 0,$$
$$s_3 = -\frac{A_{13}B_{13}^2\sin\varkappa_0}{(A_{22} - A_{11})^2}, \qquad \operatorname{tg}\varkappa_0 = \frac{A_{22} - A_{11}}{A_{13}}, \qquad n = \frac{B_{13}\sin\varkappa_0}{A_{22} - A_{11}}.$$

При условиях (25) уравнения (1), (2) допускают решение

$$\omega_1 = a_0' n \sin nt, \qquad \omega_2 = a_0' n \cos nt, \qquad \omega_3 = n(a_0 + 1),$$
$$\nu_1 = \frac{1}{2}d(a_0 + 1)\cos 2nt + a_0' c \sin nt + \frac{d}{2}(a_0 - 1), \tag{26}$$
$$\nu_2 = a_0' c \cos nt + \frac{d}{2}(a_0 + 1)\sin 2nt, \qquad \nu_3 = a_0 c - a_0' d \sin nt,$$

где $a_0 = \cos\theta_0,\ a_0' = \sin\theta_0,\ c = \cos\varkappa_0,\ d = \sin\varkappa_0$.

В соотношениях (26) a_0 – постоянная со значениями из интервала $(-1, 1)$.

Решение (26) представим в виде

$$\omega_3 = (c_0 + 1)n, \qquad \omega_1^2 + \omega_2^2 = n^2(1 - c_0^2),$$
$$\nu_1 = \frac{\omega_1^2 d}{n^2(1 - c_0)} + \frac{c}{n}\omega_1 - d, \quad \nu_2 = \frac{\omega_2}{n}\big(c + \frac{\omega_1 d}{n(1 - c_0)}\big), \quad \nu_3 = c_0 c - \frac{d}{n}\omega_1, \tag{27}$$

где c_0 – произвольная постоянная ($c_0 = \cos\theta_0,\ |c_0| < 1$). Решение (27) может быть охарактеризовано либо линейным первым интегралом, либо квадратичным первым интегралом.

4. Линейный интеграл уравнений Кирхгофа–Пуассона на инвариантном множестве. Поставим задачу изучения условий существования линейного интеграла уравнений (1), (2). Положим в уравнении (1)

$$\omega_1 = c, \tag{28}$$

где c – произвольная постоянная. Для удобства исследования введем вектор $\boldsymbol{a} = (1, 0, 0)$ и представим (28) в виде

$$\omega_1 = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{a} = A\boldsymbol{\omega}\cdot A^{-1}\boldsymbol{a}. \tag{29}$$

В силу (29) вместо интеграла (28) можно рассматривать интеграл

$$\omega_1^* = A\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{b} = c_*, \tag{30}$$

где $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$; $b_1 = A_{22}A_{33}$, $b_2 = -A_{12}A_{33}$, $b_3 = -A_{13}A_{22}$ и $c_* = c(A_{11}A_{22}A_{33} - A_{13}^2A_{22} - A_{12}^2A_{33})$. В дальнейшем звездочки у ω_1^* и c_* опустим.

Вычислим производную от интеграла (29) в силу скалярных уравнений (1):

$$A_{12}A_{13}(A_{33}\omega_3^2 - A_{22}\omega_2^2) + \alpha_{23}\omega_2\omega_3 - \omega_2(\alpha_0 + \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 + \alpha_3\nu_3) +$$

$$+\omega_3(\beta_0 + \beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 + \beta_3\nu_3) + \gamma_0 + \gamma_1\nu_1 + \gamma_2\nu_2 + \gamma_3\nu_3 + \sum_{i,j=1}^{3}\gamma_{ij}\nu_i\nu_j = 0, \quad (31)$$

где

$$\alpha_0 = c[b_1A_{13} - b_3(A_{11} - A_{22})] + b_1\lambda_3 - b_3\lambda_1, \qquad \alpha_1 = b_3B_{11} - b_1B_{13},$$

$$\alpha_2 = b_3B_{12} - b_1B_{23}, \quad \alpha_3 = b_3B_{13} - b_1B_{33}, \quad \alpha_{23} = b_1(A_{22} - A_{33}) - b_2A_{12} + b_3A_{13},$$

$$\beta_0 = c[b_1A_{12} - b_2(A_{11} - A_{33})] + b_1\lambda_2 - b_2\lambda_1, \qquad \beta_1 = b_2B_{11} - b_1B_{12},$$

$$\beta_2 = b_2B_{12} - b_1B_{22}, \qquad \beta_3 = b_2B_{13} - b_1B_{23},$$

$$\gamma_0 = c[c(b_2A_{13} - b_3A_{12}) + b_2\lambda_3 - b_3\lambda_2], \quad \gamma_1 = c(b_3B_{12} - b_2B_{13}) + b_2s_3 - b_3s_2,$$

$$\gamma_2 = c(b_3B_{22} - b_2B_{23}) + b_3s_1 - b_1s_3, \quad \gamma_3 = c(b_3B_{23} - b_2B_{33}) + b_1s_2 - b_2s_1, \quad (32)$$

$$\gamma_{11} = b_3C_{12} - b_2C_{13}, \quad \gamma_{22} = b_1C_{23} - b_3C_{12}, \quad \gamma_{33} = b_2C_{13} - b_1C_{23},$$

$$\gamma_{21} = \gamma_{12} = \frac{1}{2}[b_1C_{13} - b_2C_{23} + b_3(C_{22} - C_{11})],$$

$$\gamma_{31} = \gamma_{13} = \frac{1}{2}[b_3C_{23} - b_1C_{12} + b_2(C_{11} - C_{33})],$$

$$\gamma_{32} = \gamma_{23} = \frac{1}{2}[b_2C_{12} - b_3C_{13} + b_1(C_{33} - C_{22})].$$

Если потребовать, чтобы уравнение (31) выполнялось для любых значений $c, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$, то с учетом обозначений (30), (32) получим следующие условия

$$\begin{gathered} A_{12} = A_{13} = 0, \quad A_{33} = A_{22}, \quad B_{ij} = 0 \ \ (i \neq j), \quad B_{22} = B_{33}, \\ \lambda_3 = \lambda_2 = 0, \quad s_3 = s_2 = 0, \quad C_{ij} = 0 \ \ (i \neq j), \quad C_{33} = C_{22}. \end{gathered} \quad (33)$$

Равенства (33) характеризуют случай решения Кирхгофа–Харламова [17].

Здесь поставим задачу изучения первого интеграла (28) для уравнений (1), (2) в постановке, изложенной в п. 2 данной статьи.

Из первых интегралов (3), (4) найдем величины

$$\omega_2 = \frac{1}{\varphi_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}[A_{33}\varphi_1(\nu_1,\nu_2)\Phi_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3) + c\psi_1(\nu_1,\nu_3)\varepsilon_1(\nu_2,\nu_3) + \psi_1(\nu_1,\nu_3)\sqrt{D}],$$

$$(34)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{\varphi_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}[A_{22}\psi_1(\nu_1,\nu_3)\Phi_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3) - c\varphi_1(\nu_1,\nu_2)\varepsilon_1(\nu_2,\nu_3) - \varphi_1(\nu_1,\nu_2)\sqrt{D}],$$

где

$$\varphi_1(\nu_1,\nu_2) = A_{12}\nu_1 + A_{22}\nu_2, \quad \psi_1(\nu_1,\nu_3) = A_{13}\nu_1 + A_{33}\nu_3,$$

$$\varphi_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = A_{33}\varphi_1^2 + A_{22}\psi_1^2, \qquad \varepsilon_1(\nu_2,\nu_3) = A_{13}A_{22}\nu_2 - A_{12}A_{33}\nu_3,$$

$$\Phi_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = \frac{1}{2}(B_{11}\nu_1^2 + B_{22}\nu_2^2 + B_{33}\nu_3^2 + 2B_{12}\nu_1\nu_2 + 2B_{13}\nu_1\nu_3 + 2B_{23}\nu_2\nu_3) + k -$$
$$- c(A_{11}\nu_1 + A_{12}\nu_2 + A_{13}\nu_3) - (\lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \lambda_3\nu_3),$$
$$D(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = c^2\varepsilon_1^2(\nu_2,\nu_3) - A_{22}A_{33}\Phi_1^2(\nu_1,\nu_2,\nu_3) - \tag{35}$$
$$-2c\Phi_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\mu_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3) + \varphi_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\Phi_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3),$$
$$\mu_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = (A_{22}A_{13}^2 + A_{33}A_{12}^2)\nu_1 + A_{12}A_{22}A_{33}\nu_2 + A_{13}A_{22}A_{33}\nu_3,$$
$$\Phi_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = (2E - A_{11}c^2) + 2(s\nu_1 + s\nu_2 + s\nu_3) -$$
$$-(C_{11}\nu_1^2 + C_{22}\nu_2^2 + C_{33}\nu_3^2 + 2C_{12}\nu_1\nu_2 + 2C_{13}\nu_1\nu_3 + 2C_{23}\nu_2\nu_3).$$

Подставим выражения (34) в уравнение (31)

$$\Big\{\big(2c^2\varepsilon_1^2 - 2A_{22}A_{33}\Phi_1^2(\nu_1,\nu_2,\nu_3) - 2c\Phi_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\mu_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3) +$$
$$+\varphi_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\Phi_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\big)\big[A_{12}A_{13}(A_{33}\varphi_1^2(\nu_1,\nu_2) - A_{22}\psi_1^2(\nu_1,\nu_3)) -$$
$$-\alpha_{23}\psi_1(\nu_1,\nu_3)\varphi_1(\nu_1,\nu_2)\big] + \varphi_2^2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)(\gamma_0 + \gamma_1\nu_1 + \gamma_2\nu_2 + \gamma_3\nu_3 + \sum_{i,j=1}^{3}\gamma_{ij}\nu_i\nu_j) +$$
$$+\Phi_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\big[c\alpha_{23}\varepsilon_1(\nu_2,\nu_3)\big(A_{22}\psi_1^2(\nu_1,\nu_3) - A_{33}\varphi_1^2(\nu_1,\nu_2)\big) - \tag{36}$$
$$-4A_{12}A_{13}A_{22}A_{33}c\varphi_1(\nu_1,\nu_2)\psi_1(\nu_1,\nu_3)\varepsilon_1(\nu_2,\nu_3) + A_{22}\varphi_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\psi_1(\nu_1,\nu_3)(\beta_0 +$$
$$+\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 + \beta_3\nu_3) - A_{33}\varphi_1(\nu_1,\nu_2)\varphi_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)(\alpha_0 + \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 + \alpha_3\nu_3)\big]\Big\} +$$
$$+\sqrt{D}\Big\{\Phi_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3)[\alpha_{23}\big(A_{22}\psi_1^2(\nu_1,\nu_3) - A_{33}\varphi_1^2(\nu_1,\nu_2)\big) -$$
$$-4A_{12}A_{13}A_{22}A_{33}\varphi_1(\nu_1,\nu_2)\psi_1(\nu_1,\nu_3)] - 2c\varepsilon_1(\nu_2,\nu_3)\big[A_{12}A_{13}(A_{22}\psi_1^2(\nu_1,\nu_3) -$$
$$-A_{33}\varphi_1^2(\nu_1,\nu_2)) + \alpha_{23}\varphi_1(\nu_1,\nu_2)\psi_1(\nu_1,\nu_3)] - \varphi_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)[\varphi_1(\nu_1,\nu_2)(\beta_0 + \beta_1\nu_1 +$$
$$+\beta_2\nu_2 + \beta_3\nu_3) + \psi_2(\nu_1,\nu_3)(\alpha_0 + \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 + \alpha_3\nu_3)]\Big\} = 0.$$

Для дальнейшего исследования уравнения (36) можно вместо ν_1,ν_2,ν_3 ввести переменные θ,φ

$$\nu_1 = \cos\theta, \qquad \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \nu_3 = \sin\theta\sin\varphi. \tag{37}$$

После подстановки выражений (37) в соотношения (35), (36), получим уравнение следующего вида $F(\theta,\varphi,c,A_{ij},B_{kl},C_{nm},s_i,\lambda_k) = 0$.

Если использовать первый подход, изложенный в п. 2, то требование того, чтобы уравнение (36) было тождеством по θ, φ, c, приводит к условиям существования у уравнений (1), (2) дополнительного первого интеграла (29).

Применим указанный подход в частном случае, когда уравнения (1), (2), кроме интеграла (28), допускают два линейных инвариантных соотношения. Тогда получим решение П.В. Харламова [1], изученное С.В. Скрыпник [18]. Запишем его в обозначениях работы [18]:

$$\omega_1 = a_1(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2), \qquad \omega_2 = a_2(c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2), \qquad \omega_3 = a_3\delta_0, \quad (38)$$

$$\begin{gathered}\dot\nu_1 = a_3\delta_0\nu_2 - a_2(c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2)\nu_3, \quad \dot\nu_2 = a_1(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2)\nu_3 - a_3\delta_0\nu_1, \\ \dot\nu_3 = a_2c_0\nu_1 - a_1b_0\nu_2 + (a_2c_2 - a_1b_1)\nu_1\nu_2 + a_2c_1\nu_1^2 - a_1b_2\nu_2^2;\end{gathered} \quad (39)$$

$$\begin{gathered}\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \qquad a_1b_0\nu_1 + a_2c_0\nu_2 + a_3\delta_0\nu_3 + a_1b_2\nu_1\nu_2 + \\ +[b_1(a_1 + a_3) + c_2a_3]\frac{\nu_1^2}{2} + [c_2(a_2 + a_3) + b_1a_3]\frac{\nu_2^2}{2} - \frac{a_3B_{33}}{2}\nu_3^2 = a_3k,\end{gathered} \quad (40)$$

где

$$b_1 = \frac{a_3}{\Delta}[(a_2 - a_3)B_{11} - a_3B_{22}], \qquad b_2 = \frac{a_2a_3B_{12}}{\Delta},$$

$$c_1 = \frac{a_1a_3B_{12}}{\Delta}, \qquad c_2 = \frac{a_3}{\Delta}[(a_1 - a_3)B_{22} - a_3B_{11}].$$

При этом параметры уравнения (1) подчинены условиям

$$s_3 = 0, \qquad \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_1 = \frac{b_0(a_1 - a_3)}{a_3}, \qquad \lambda_2 = \frac{c_0(a_2 - a_3)}{a_3},$$

$$s_1 = a_2c_0c_1 - a_1b_0(c_2 + B_{33}), \qquad s_2 = a_1b_0b_2 - a_2c_0(b_1 + B_{33}),$$

$$B_{13} = B_{23} = 0, \qquad C_{13} = C_{23} = 0, \qquad C_{12} = a_1b_2(c_2 + B_{33}) - a_2c_1c_2, \quad (41)$$

$$C_{11} = C_{33} + a_1b_1(c_2 + B_{33}) - a_2c_1^2, \qquad C_{22} = C_{33} + a_2c_2(b_1 + B_{33}) - a_1b_2^2,$$

$$\Delta = a_1a_3 - a_1a_2 + a_2a_3, \qquad a_3(a_2 - 2a_3)B_{11} + a_3(a_1 - 2a_3)B_{22} + \Delta B_{33} = 0.$$

Решение (38)–(40) при условиях (41) в силу существования у системы (39) двух интегралов (40) сводится к квадратурам. Оно зависит от трех произвольных постоянных $\delta_0, k, \nu_1^{(0)}$.

Рассмотрим случай, когда в равенствах (38)–(41) параметры b_0 и c_0 – произвольные постоянные. Тогда получим условия

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \qquad a_1 = a_2 = a_3 = a, \qquad s_3 = 0,$$

$$c_0 = \frac{ab_0B_{12} - s_2}{a(B_{33} - B_{22})}, \qquad B_{13} = B_{23} = 0, \qquad s_1(B_{33} - B_{22}) + s_2B_{12} = 0,$$

$$B_{12}^2 = B_{11}B_{22}, \quad B_{33} = B_{11} + B_{22}, \quad b_1 = -B_{22}, \quad b_2 = B_{12}, \quad C_{13} = C_{23} = 0,$$

$$c_1 = B_{12},\ c_2 = -B_{11},\ C_{12} = aB_{12}B_{33},\ C_{22} = C_{33} - aB_{33}B_{11},\ C_{11} = C_{33} - aB_{33}B_{22}\,.$$

Формулы (38)–(40) при данных условиях упрощаются

$$\dot{\nu}_1 = a[\delta_0\nu_2 - \nu_3(c_0 + B_{12}\nu_1 - B_{11}\nu_2)], \quad \dot{\nu}_2 = a[\nu_3(b_0 - B_{22}\nu_1 + B_{12}\nu_2) - \delta_0\nu_1],$$

$$\dot{\nu}_3 = a[c_0\nu_1 - b_0\nu_2 + (B_{22} - B_{11})\nu_1\nu_2 + B_{12}(\nu_1^2 - \nu_2^2)], \qquad (42)$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad b_0\nu_1 + c_0\nu_2 + \delta_0\nu_3 + B_{12}\nu_1\nu_2 - \frac{1}{2}(B_{22}\nu_1^2 + B_{11}\nu_2^2) = k^*,$$

$$\omega_1 = a(b_0 - B_{22}\nu_1 + B_{12}\nu_2), \quad \omega_2 = a(c_0 + B_{12}\nu_1 - B_{11}\nu_2), \quad \omega_2 = a\delta_0,$$

где $k^* = k + \frac{1}{2}(B_{11} + B_{22})$. Решение (42) зависит от четырех произвольных постоянных и имеет место в силу условий $a_1 = a_2 = a_3$ для сферического гиростата.

Таким образом, получен специальный случай решения, которое характеризуется линейным первым интегралом из (38) на инвариантном многообразии (42). Оно отличается от решения Кирхгофа–Харламова [17] с линейным первым интегралом во всем фазовом пространстве. Решение (42) соответствует вырожденному случаю решения А.М. Ляпунова [19].

1. *Харламов П.В.* О решениях уравнений динамики твердого тела // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 3. – С. 567-572.
2. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – **5**. – P. 747-754.
3. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. - 2001. – Вып. 31. – С. 3–17.
4. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Там же. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
5. *Козлов В.В., Онищенко Д.А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Докл. АН СССР. – 1982. – **266**, № 6. – С. 1298-1300.
6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир. – 1970. – 720 с.
7. *Чаплыгин С.А.* О принципе последнего множителя // Собр. соч. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1948. – Т.I: Теоретическая механика. Математика. – С. 5–14.
8. *Векуа Н.П.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений и приложения в механике. – М.: Наука. – 1991. – 255 с.
9. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч. 2: Динамика систем с конечным числом степеней свободы. – 555 с.
10. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. - С. 15–24.
11. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та. – 1965. – 221 с.
12. *Бобылев Д.К.* Об одном частном решении дифференциальных уравнений вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Тр. отд-ния физ.наук о-ва любителей естествознания. – 1896. – **8**, вып.2. – С. 21–25.
13. *Стеклов В.А.* Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Там же. – С. 19–21.

14. *Щетинина Е.К.* О регулярной прецессии относительно наклонной оси в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 1. – С. 133–144.
15. *Рубановский В.Н.* Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости // Прикл. математика и механика. – 1985. – **49**, вып. 2. – С. 212–219.
16. *Хлыстунова Н.В.* О прецессии типа Гриоли тяжелого твердого тела в жидкости // Там же. – 2000. – **64**, вып. 4. – С. 551–554.
17. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журнал прикл. механики и техн. физики. – 1963. – **4**, № 4. – С. 17–29.
18. *Скрыпник С.В.* Об одном классе двух линейных инвариантных соотношений в обобщенной задаче динамики // Механика твердого тела. – 1999. – Вып. 28. – С. 31–40.
19. *Ляпунов А.М.* Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. – 1893. – **4**, № 1, 2. – С. 81–85.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Национальный ун-т, Донецк
applmech@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 12.10.09