

Числовий аналіз різновимірних крайових задач адвекції-дифузії у середовищах із тонкими включеннями

Ярема Савула¹, Тарас Мандзак², Віталій Кухарський³

¹ д. ф.-м. н., професор, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: savula@lnu.edu.ua

² Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: t_mandzak@lnu.edu.ua

³ к. ф.-м. н., доцент, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: vetaley@lnu.edu.ua

Сформульовано двовимірну та різновимірну крайові задачі адвекції-дифузії в середовищі з тонким криволінійним включенням із застосуванням методу малого параметра в умовах спряження. Наведено результати порівняльного числового аналізу обох підходів, відзначено ефективність застосування полівимірного підходу. Відповідні числові схеми побудовано з використанням триангуляцій Делоне й апроксимацій експоненційної підгонки.

Ключові слова: адвекція, дифузія, експоненційна апроксимація, метод скінченних елементів, неоднорідне середовище, тонке включення.

Вступ. Математичному моделюванню впливу тонких покриттів, шарів і включень на процеси адвекції-дифузії присвячені праці Дейнеки В., Кіта Г., Підстригача Я., Сергієнка І., Скопечького В., Сулима Г. та ін. [1-3]. Альтернативний підхід, який полягає у побудові полівимірних крайових задач математичних моделей, тобто таких, які описуються рівняннями математичної фізики різної вимірності за просторовими координатами у середовищі та включеному тонкому шарі, започатковано у працях [4-6]. Пониження вимірності співвідношень математичної моделі у тонкому включенні на основі застосування відповідної апроксимації шуканого розподілу за товщиною дозволяє уникнути багатьох проблем, пов'язаних із дискретизацією різномаштабних частин області, зменшити обчислювальні затрати. У роботах [7-9] описано різновимірну задачу адвекції-дифузії у середовищі з включенням у диференціальній і варіаційній формах, встановлено властивості відповідних білінійних форм, наведено результати тестових числових розрахунків із застосуванням одно- та двовимірних апроксимацій експоненційної підгонки, запропонованих у праці [10]. У даній роботі подаємо результати порівняльного числового аналізу двовимірних і різновимірних математичних моделей процесів адвективно-дифузійного перенесення у середовищах із тонкими сферичними включеннями. Схеми числового аналізу для цих задач побудовано на основі застосування апроксимацій експоненційної підгонки [10] і триангуляцій Делоне.

1. Диференціальне формулювання двовимірної крайової задачі

Розглянемо тіло, яке займає область Ω_B , всередині якої поміщено тонкий шар B , $\Omega_B = \Omega_0 \cup B$ (рис. 1). Тіло Ω_0 і включення B мають різні характеристики матеріалів (коефіцієнти пористості, дифузії, поглинання). Область Ω_0 обмежена ззовні ліпшицевою границею $\partial\Omega$ та контактує з тонким шаром B уздовж ліпшицевої границі Γ .

Крайову стаціонарну задачу адвекції-дифузії в Ω_B опишемо наступними співвідношеннями. В області Ω_0 рівняння адвекції-дифузії має вигляд

$$\nabla \cdot (\mathbf{q}u - D^0 \nabla u) = 0, \quad (1)$$

де \mathbf{q} — поле швидкостей ($\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$), u — шукане поле, D^0 — коефіцієнт дифузії в Ω_0 . В області B рівняння адвекції-дифузії має вигляд

$$\nabla \cdot (\mathbf{q}u - D \nabla u) = 0, \quad (2)$$

де D — коефіцієнт дифузії в області B .

На границі $\partial\Omega$ задамо крайову умову першого роду

$$u|_{\partial\Omega} = g. \quad (3)$$

Тут g — деяка задана на $\partial\Omega$ інтегрована з квадратом функція.

На Γ , як границі контакту суміжних областей Ω_0 і B , потрібно задати спеціальні умови, які відповідають умові неперервності адвективно-дифузійного потоку [1, 2]

$$(\mathbf{q}u - D^0 \nabla u) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma^{+0}} = (\mathbf{q}u - D \nabla u) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma^{-0}} \quad (4)$$

та неперервності шуканого поля

$$u|_{\Gamma^{+0}} = u|_{\Gamma^{-0}}, \quad (5)$$

де \mathbf{n} — орт зовнішньої нормалі до границі Γ , а Γ^{+0} , Γ^{-0} позначають зовнішній і внутрішній бік границі Γ з нормаллями \mathbf{n} і $-\mathbf{n}$ відповідно.

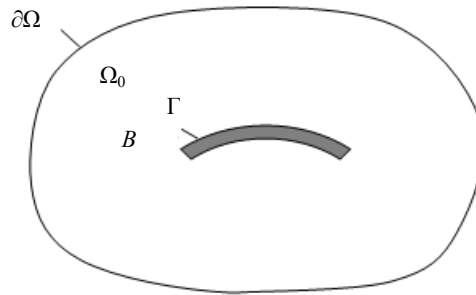


Рис. 1. Тіло Ω_B з включеним шаром

Зважаючи на малу товщину включення, умову (5) на тонкому бічному краї включення, який позначимо Γ_S ($\Gamma_S \subset \Gamma$), доцільно подати як граничний випадок (для $\varepsilon \rightarrow 0$) умови

$$u \Big|_{\Gamma_S^{-0}} - u \Big|_{\Gamma_S^{+0}} = \varepsilon \left[(\mathbf{q}u - D^0 \nabla u) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_S^{+0}} + (\mathbf{q}u - D \nabla u) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_S^{-0}} \right], \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6)$$

Тоді на Γ_S від умов (4), (5) перейдемо до умов

$$(\mathbf{q}u - D^0 \nabla u) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_S^{+0}} = (\mathbf{q}u - D \nabla u) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_S^{-0}}, \quad (7)$$

$$(\mathbf{q}u - D^0 \nabla u) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_S^{+0}} = \frac{1}{2\varepsilon} (u \Big|_{\Gamma_S^{-0}} - u \Big|_{\Gamma_S^{+0}}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (8)$$

Зміст такого подання полягає у зведенні крайової умови головного типу на Γ_S до крайової умови природного типу [2].

2. Диференціальне формулювання різновимірної крайової задачі

Зважаючи на малу товщину шару B , яка є неспівмірна з іншими розмірами включення та тіла Ω_B в цілому, при формулюванні задачі адвекції-дифузії застосуємо модель пониженої вимірності [7-9] і від області B перейдемо до її серединної поверхні S , обмеженої контуром ∂S , а від області Ω_0 до області $\Omega = \Omega_B / S$ (рис. 2).

Тоді двовимірне рівняння адвекції-дифузії (1) поширимо на область Ω , на поверхні S застосуємо систему двовимірних рівнянь пониженої вимірності [7-9], а на границі $\partial\Omega$ збережемо крайову умову першого роду (3). Отримана система рівнянь матиме вигляд

$$\nabla \cdot (\mathbf{q}u^\Omega - D^0 \nabla u^\Omega) = 0 \quad \text{в області } \Omega, \quad (9)$$

$$\frac{1}{A_1} (A_1 \mathbf{Q}^1 \cdot \mathbf{u} - A_1 \mathbf{K}^{11} \cdot \mathbf{u}_{,1})_{,1} + (-\mathbf{Q}^2 + \mathbf{K}^{22}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} = 0 \quad \text{на } S, \quad (10)$$

$$u^\Omega \Big|_{\partial\Omega} = g, \quad (11)$$

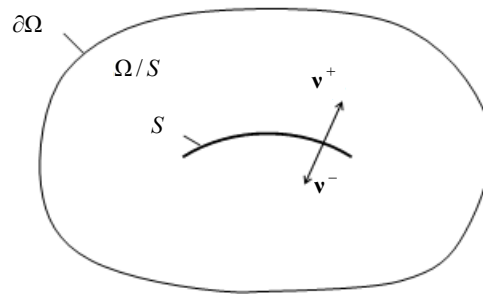


Рис. 2. Нова область задачі

де \mathbf{u} — вектор, компонентами якого є шукані коефіцієнти $u_k(\xi_1)$ напіваналітичної апроксимації [8]

$$u = \sum_{k=1}^m u_k(\xi_1) \Psi_k(\xi_2), \quad \xi_1 \in S, \quad \xi_2 \in [-1, 1], \quad (12)$$

$\{\Psi_k(\xi_2)\}_{k=1}^m$ — заданий набір m лінійно незалежних базових функцій, $A_1 = A_1(\xi_1)$ — коефіцієнт Ляме серединної поверхні включення, $(\circ)_{,i} = \frac{\partial(\circ)}{\partial \xi_i}$ — позначення часткової похідної,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^1 &= \frac{h}{2} \int_{-1}^1 q_1 \Psi \left(1 + \kappa \frac{h}{2} \xi_2 \right) d\xi_2, & \mathbf{Q}^2 &= \frac{h}{2} \int_{-1}^1 q_2 \Psi' \left(1 + \kappa \frac{h}{2} \xi_2 \right) d\xi_2, \\ \mathbf{K}^{11} &= \frac{h}{2} \int_{-1}^1 D \Psi \left(1 + \kappa \frac{h}{2} \xi_2 \right) d\xi_2, & \mathbf{K}^{22} &= \frac{h}{2} \int_{-1}^1 D \Psi'' \left(1 + \kappa \frac{h}{2} \xi_2 \right) d\xi_2, \\ \mathbf{f} &= -\Psi(-1) j_- \left(1 - \kappa \frac{h}{2} \right) - \Psi(1) j_+ \left(1 + \kappa \frac{h}{2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

— матричні величини розміру $m \times m$, які визначаються через відповідні коефіцієнти вихідного двовимірного рівняння адвекції-дифузії в області B , товщину включення h , кривину серединної поверхні κ , нормальні складники адвективно-дифузійних потоків j_-, j_+ на нижній і верхній лицевих поверхнях включення відповідно, базові функції $\Psi_k(\xi_2)$ [8]. Тут $\Psi = \Psi(\xi_2)$ — вектор розміру m з елементами $\Psi_k(\xi_2)$; $\Psi = [\Psi_k \Psi_l]$,

$$\Psi' = \left[\frac{d\Psi_k}{d\xi_2} \Psi_l \right], \quad \Psi'' = \left[\frac{d\Psi_k}{d\xi_2} \frac{d\Psi_l}{d\xi_2} \right] — матриці розміру $m \times m$, $(k, l = \overline{1, m})$.$$

Рівняння (9), (10) зв'яжемо умовами, отриманими на основі умов спряження (4), (5). Будемо розрізняти нижню S_- і верхню S_+ сторони поверхні S із нормальми $\mathbf{v}^-, \mathbf{v}^+$ відповідно (рис. 2). Від умови (4) на лицевих поверхнях шару перейдемо до умов на S_-, S_+

$$j_- = (\mathbf{q} u^\Omega - D^0 \nabla u^\Omega) \cdot \mathbf{v}^- \Big|_{S_-}, \quad j_+ = (\mathbf{q} u^\Omega - D^0 \nabla u^\Omega) \cdot \mathbf{v}^+ \Big|_{S_+}, \quad (14)$$

де j_-, j_+ — величини, які необхідно підставити до рівняння (10) згідно визначення (13) для вектора \mathbf{f} . Таким чином умови (14) враховуємо у рівнянні (10). Аналогічно від умови (5) перейдемо до умов

$$u^\Omega \Big|_{S_-} = \Psi^T(-1) \cdot \mathbf{u}(\xi_1) \Big|_{\xi_1 \in S}, \quad u^\Omega \Big|_{S_+} = \Psi^T(+1) \cdot \mathbf{u}(\xi_1) \Big|_{\xi_1 \in S}. \quad (15)$$

У правих частинах (15) враховано подання (12).

Від умов (7), (8) на Γ_S , враховуючи відповідні співвідношення пониженої вимірності [7-9], перейдемо до умов

$$\int_{-1}^1 (\mathbf{q} u^\Omega - D^0 \nabla u^\Omega) \cdot \mathbf{n} \psi(\xi_3) \frac{h}{2} d\xi_3 = \left(\mathbf{Q}^\alpha \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{A_\alpha} \mathbf{K}^{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{u}_{,\alpha} \right) n_\alpha, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (\mathbf{q} u^\Omega - D^0 \nabla u^\Omega) \cdot \mathbf{n} \psi(\xi_3) \frac{h}{2} d\xi_3 = \\ & = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-1}^1 (\boldsymbol{\Psi}^T(\xi_3) \cdot \mathbf{u} - u^\Omega) \psi(\xi_3) \frac{h}{2} d\xi_3 \text{ на } \partial S, \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Отже, двовимірну крайову задачу (1)-(5) ми наближено замінили різновимірною задачею (9)-(17), сформульованою на двовимірній області Ω й одновимірній області S — серединній поверхні тонкого включення. Відмінність між двовимірною та різновимірною задачами обумовлена, зокрема, збуренням форми границі між контактуючими тілами внаслідок нехтування товщиною включеного шару. Можна показати, що таке збурення приводить до похибки розв'язку $O(\sqrt{h} \max\{1, \kappa|q_3|\})$ у нормі $\|\cdot\|_{W_2^1}$, де h — товщина тонкого шару.

3. Числові експерименти

Розглянемо випадок адвективно-дифузійного перенесення в квадратній області розміру 1×1 м із включенням, кривина та товщина якого дорівнюють відповідно $\kappa = 1 \text{ м}^{-1}$, $h = 10^{-3}$ м. Адвективне перенесення відбувається в усій області зі швидкістю 1 м/с у напрямку з лівого нижнього у правий верхній кут. Скінченноелементний аналіз цього процесу для порівняння проведемо на основі дво- та полівимірного підходів, наведених у попередніх пунктах із застосуванням апроксимацій експоненційної підгонки [10].

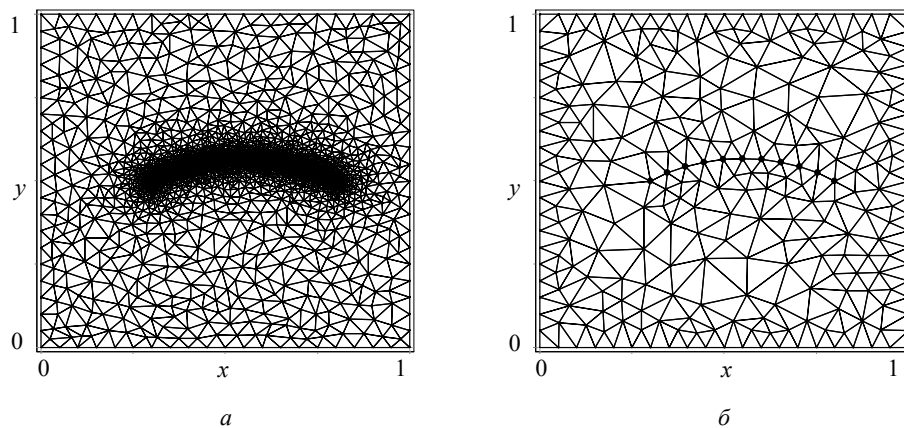


Рис. 3. Сітки Делоне для двовимірного (12700 елементів, 25481 вузлів, рис. а) та полівимірного підходів (300 елементів, 518 вузлів, рис. б)

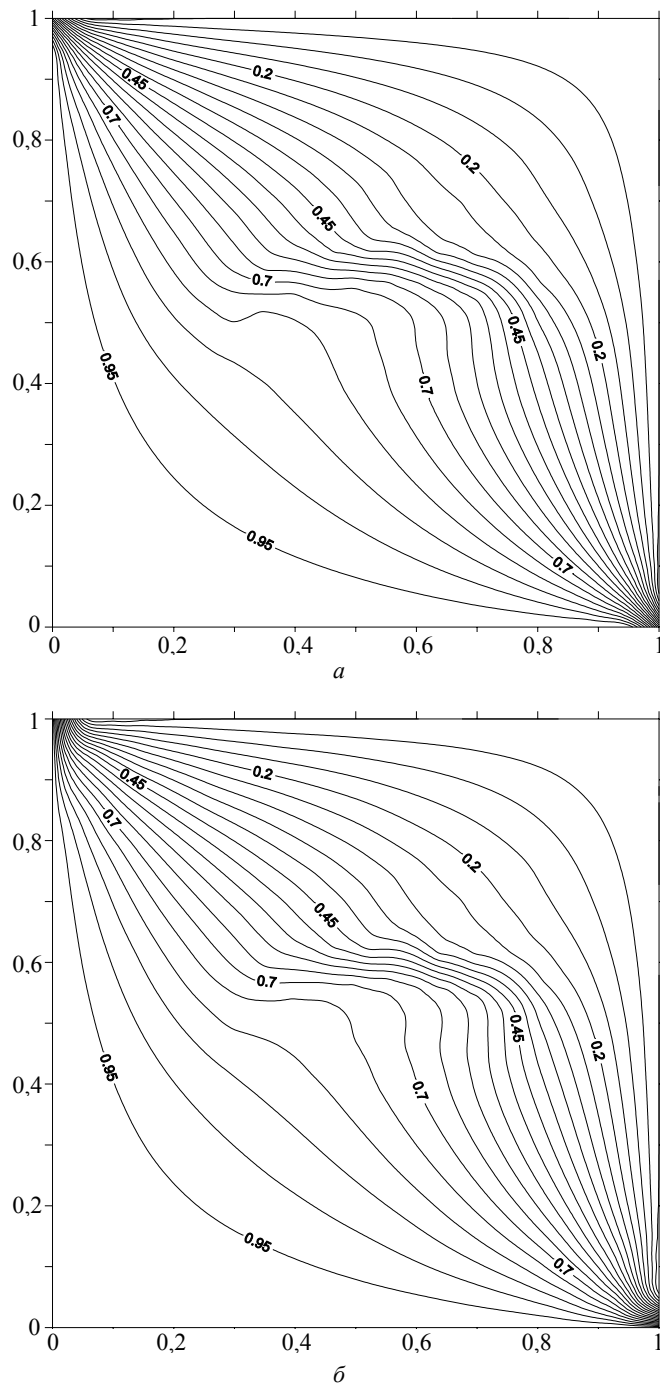


Рис. 4. Розподіл відносної концентрації забруднення, отриманий на основі класичного двовимірного підходу (а) та полівимірного підходу (б)

На рис. 3 зображено сітки методу скінченних елементів, застосованих у кожному з підходів. Наведені сітки є триангуляціями Делоне, які мають важливу для методу скінченних елементів властивість регулярності. Значне згущення триангуляції, зображеної на рис. 3а зумовлене необхідністю дискретизації всередині двовимірної області включення. Бачимо, що застосування полівимірного підходу у цьому випадку дозволяє майже в 50 разів зменшити кількість вузлових параметрів. Наведені на рис. 4 графіки дозволяють порівняти отримані на основі обох підходів результати.

Висновки. Сформульовано крайові задачі адвекції-дифузії з умовами спряження, які отримані на основі методу малого параметра. Шляхом порівняння розв'язків задач адвекції-дифузії, одержаних на основі полівимірного підходу, з результатами, отриманими з допомогою класичної двовимірної схеми, проілюстровано обчислювальну ефективність застосування різновимірних крайових задач.

Література

- [1] Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. — Киев.: Наук. думка, 1998. — 615 с.
- [2] Дейнека В. С., Сергиенко И. В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. — Киев.: Наук. думка, 2001. — 605 с.
- [3] Сулим Г. Т., Піскозуб Й. З. Умови контактної взаємодії тіл (огляд) // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2004. — Вип. 47(3). — С. 110-125.
- [4] Дяконюк Л., Кухарський В., Савула Я. Математичне моделювання процесів теплопровідності у багатшарових середовищах із тонкими включеннями // *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. У 2-х т.* — Львів: 2000. — Т. 1. — С. 212-216.
- [5] Савула Я. Г., Сина І. М., Струтинський І. В. Математичні моделі теплопровідності для тіл з тонкими покриттями та включеннями // *Вісник Львів. ун-ту. Серія. мех. матем.* — 1992. — Вип. 37. — С. 39-45.
- [6] Savula Ya. H., Koukharskyj V. M., Chaplia Ye. Ya. Numerical analysis of advection-diffusion in the continuum with thin canal // *Numerical Heat Transfer / Part A.* — 1998. — Issue 33 (3). — P. 341-351.
- [7] Мандзак Т. І., Савула Я. Г. Пониження вимірності математичної моделі адвекції-дифузії у тонкому включенні з використанням експоненційних апроксимацій // *Волинський математичний вісник. Сер. прикл. матем.* — 2004. — Вип. 2(11). — С. 52-57.
- [8] Савула Я., Мандзак Т. Гетерогенна крайова задача математичної моделі адвекції-дифузії у середовищі з включенням // *Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології.* — 2006. — Вип. 3. — С. 150-158.
- [9] Савула Я. Г., Мандзак Т. И. Разномерная задача математической модели адвекции-диффузии в среде с тонким включением // *Компьютерная математика.* — 2007. — Вып. 2. — С.59-70.
- [10] Song Wang, Zi-Cai Li. An analysis of a conforming exponentially fitted finite element method for a convection-diffusion problem // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* — 2002. — Issue 143. — P. 291-310.

Numerical analysis of polydimensional boundary value problems of advection-diffusion in media with thin inclusions

Yarema Savula, Taras Mandzak, Vitalii Koukharskyi

Two-dimensional and polydimensional boundary value problems have been formulated with use of the method of small parameter for junction conditions. Results of comparative numerical analysis of polydimensional and two-dimensional advection-diffusion boundary value problems in media with thin curvilinear inclusion are presented. Efficiency of polydimensional approach is shown. Corresponding numerical schemes are built on the basis of Delaney triangulations and approximations of exponential adjusting method.

Численный анализ размерных краевых задач адвекции-диффузии в средах с тонкими включениями

Ярема Савула, Тарас Мандзак, Віталій Кухарський

Сформулированы двухмерная и размерная краевые задачи адвекции-диффузии в среде с тонким криволинейным включением с применением метода малого параметра в условиях сопряжения. Приведены результаты сравнительного численного анализа обоих подходов, отмечена эффективность применения размерного подхода. Соответствующие численные схемы построены с использованием триангуляций Делоне и аппроксимаций экспоненциальной подгонки.

Отримано 21.05.08