

## Термопружний стан шаруватих термочутливих циліндрів і куль за конвективно-променевого теплообміну

Роман Кушнір<sup>1</sup>, Юрій Процюк<sup>2</sup>

<sup>1</sup> д. ф.-м. н., професор, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: kushnir@iapmm.lviv.ua

<sup>2</sup> Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: dept19@iapmm.lviv.ua

*Розроблено методичку розв'язування одновимірних статичних задач термопружності для шаруватих циліндрів і куль за конвективно-променевого нагрівання з урахуванням лінійної залежності коефіцієнтів теплопровідності та довільного характеру залежності інших фізико-механічних характеристик від температури. Задачі теплопровідності зведено, незалежно від кількості шарів, до розв'язування системи двох нелінійних алгебричних рівнянь. У задачах термопружності неперервні в межах кожного шару коефіцієнти рівнянь апроксимовано кусково-сталими функціями. Проведено числовий аналіз температурних полів і напружень у двошарових тілах.*

**Ключові слова:** шаруваті циліндр і куля, конвективно-променево нагрівання, температурна залежність характеристик, статичні температурні напруження.

**Вступ.** У багатьох областях сучасної техніки часто виникає потреба у використанні неоднорідних елементів конструкцій, зокрема, шаруваті структури, які у поєднанні з іншими до них вимогами, повинні характеризуватися високою жаротривкістю, здатністю працювати за високих температур і радіаційного нагрівання. Передбачити їх термомеханічну поведінку, оцінити міцність і надійність можна на основі визначених розподілів температури, переміщень і напружень. Поряд з існуючими, актуальною є розробка нових методик побудови розв'язків задач термопружності, які б давали змогу отримувати зручні аналітичні співвідношення для проведення числових розрахунків у багатошарових тілах з урахуванням температурної залежності фізико-механічних характеристик (ФМХ) за складного теплообміну.

У даній роботі викладено методичку визначення статичних температурних напружень у багатошарових циліндрах і кулях за конвективно-променевого нагрівання та припущення, що ФМХ залежать від температури.

### 1. Формулювання задач теплопровідності та їх розв'язування

Розглянемо два термочутливих багатошарових тіла, складених відповідно з концентрично розташованих ідеально контактуючих порожнистих ізотропних куль і необмежених циліндрів. Нагріваються тіла шляхом конвективно-променевого теплообміну. Вважаємо, що коефіцієнти теплопровідності матеріалу шарів лінійно

залежать від температури:  $\lambda_t^{(i)}(t_{ik}) = \lambda_0^{(i)}(1 + \beta_i t_{ik})$ , де  $i = \overline{1, n}$ ;  $n$  — кількість складників;  $k = 1, 2$  для циліндра та кулі відповідно. Обмежень на характер залежностей інших ФМХ не накладаємо. Для знаходження одновимірного стаціонарного температурного поля використовуємо відому систему рівнянь

$$\frac{d}{dr} \left[ r^k \lambda_t^{(i)}(t_{ik}) \frac{dt_{ik}}{dr} \right] = 0, \quad (1)$$

умови контакту на поверхнях поділу

$$\begin{aligned} \left[ t_{j+1,k} - t_{jk} \right] \Big|_{r=r_j} &= 0, \\ \left[ \lambda_t^{(j+1)}(t_{j+1,k}) \frac{dt_{j+1,k}}{dr} - \lambda_t^{(j)}(t_{jk}) \frac{dt_{jk}}{dr} \right] \Big|_{r=r_j} &= 0 \quad (j = \overline{1, n-1}) \end{aligned} \quad (2)$$

і граничні умови

$$\begin{aligned} \left\{ \lambda_t^{(1)}(t_{nk}) \frac{dt_{1k}}{dr} + \alpha_1(t_{nk})(t_{1k} - t_c^-) + \gamma_0 \varepsilon_1(t_{1k}) \left[ t_{nk}^4 - (t_c^-)^4 \right] \right\} \Big|_{r=r_0} &= 0, \\ \left\{ \lambda_t^{(n)}(t_{nk}) \frac{dt_{nk}}{dr} + \alpha_n(t_{nk})(t_{nk} - t_c^+) + \gamma_0 \varepsilon_n(t_{nk}) \left[ t_{nk}^4 - (t_c^+)^4 \right] \right\} \Big|_{r=r_n} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $r_0 = R_0/l$ ,  $r_i = R_i/l$ ,  $R_0$  — внутрішній радіус тіл,  $R_i$  — зовнішній радіус  $i$ -го складника,  $l$  — характерний лінійний розмір;  $\alpha_m(t)$ ,  $\varepsilon_m(t)$  ( $m = 1, n$ ) — коефіцієнти тепловіддачі та ступені чорноти;  $t_c^\pm$  — температури середовища всередині та зовні багат шарових тіл;  $\gamma_0$  — стала випромінювання Стефана-Больцмана.

Розв'язок задачі (1)-(3) знайдено за методикою, запропонованою у роботі [1]. У межах кожного складника температурне поле описується співвідношеннями

$$t_{ik} = t_{ik}(q_{0k}, t_{ck}, r) = \beta_i^{-1} \left( \sqrt{1 + 2\beta_i \theta_{ik}} - 1 \right), \quad (4)$$

в яких

$$\begin{aligned} \theta_{ik}(q_{0k}, t_{ck}, r) &= \theta_{ck} - Q r_0^{k-1} \left[ f_{ik}(r) - f_{ik}(r_n) \right] - \sum_{j=i}^{n-1} F_j \left[ \theta_{j+1,k}(q_{0k}, t_{ck}, r) \right] \Big|_{r=r_j}, \\ f_{i1}(r) &= \ln r + \sum_{j=1}^{i-1} H_j \ln \frac{r}{r_j}, \quad f_{i2}(r) = -\frac{1}{r} - \sum_{j=1}^{n-1} H_j \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_j} \right), \\ H_j &= \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(j+1)}} - \frac{\lambda_0^{(1)}}{\lambda_0^{(j)}}, \quad Q = \frac{q_{0k} R_0}{\lambda_0^{(1)}}, \quad \theta_{ck} = t_{ck} + \frac{\beta_i t_{ck}^2}{2}, \end{aligned}$$

$$F_j [\theta_{j+1,k}(q_{0k}, t_{ck}, r)] = \left(1 - \frac{\beta_j}{\beta_{j+1}}\right) \left[ \theta_{j+1,k}(q_{0k}, t_{ck}, r) - \frac{\sqrt{1 + 2\beta_{j+1} \theta_{j+1,k}(q_{0k}, t_{ck}, r) - 1}}{\beta_{j+1}} \right],$$

$$\theta_{nk}(q_{0k}, t_{ck}, r_{n-1}) = \theta_{ck} - Qr_0^{k-1} [f_{nk}(r_{n-1}) - f_{nk}(r_n)],$$

$$\theta_{ik}(q_{0k}, t_{ck}, r_{i-1}) = \theta_{ck} - Qr_0^{k-1} [f_{ik}(r_i) - f_{ik}(r_n)] - \sum_{j=i+1}^{n-1} F_j [\theta_{j+1,k}(q_{0k}, t_{ck}, r_j)],$$

$$i = \overline{1, n-1};$$

$q_{0k}, t_{ck}$  — розв'язки систем двох (незалежно від кількості шарів) нелінійних алгебричних рівнянь

$$-q_{0k} - \alpha_1 (t_{1k}(q_{0k}, t_{ck}, r_0)) [t_{1k}(q_{0k}, t_{ck}, r_0) - t_c^-] -$$

$$-\gamma_0 \varepsilon_1 (t_{1k}(q_{0k}, t_{ck}, r_0)) [t_{1k}^4(q_{0k}, t_{ck}, r_0) - (t_c^-)^4] = 0,$$

$$-q_{0k} (r_0/r_n)^k + \alpha_n (t_{nk}(q_{0k}, t_{ck}, r_n)) [t_{nk}(q_{0k}, t_{ck}, r_n) - t_c^+] +$$

$$+\gamma_0 \varepsilon_n (t_{nk}(q_{0k}, t_{ck}, r_n)) [t_{nk}^4(q_{0k}, t_{ck}, r_n) - (t_c^+)^4] = 0. \quad (5)$$

## 2. Постановка та побудова розв'язку задач термопружності

Для визначення температурних напружень у вільних від зовнішніх навантажень тілах використаємо залежності

$$\sigma_r^{(k)} = c^{(k)}(r) \left[ \frac{du^{(k)}}{dr} + k \frac{v^{(k)}(r)}{1-v^{(k)}(r)} \frac{u^{(k)}}{r} \right] - \frac{E^{(k)}(r)}{1-2v^{(k)}(r)} \Phi^{*(k)}(r),$$

$$\sigma_\phi^{(k)} = c^{(k)}(r) \left[ \frac{v^{(k)}(r)}{1-v^{(k)}(r)} \frac{du^{(k)}}{dr} + \left( \frac{1}{1-v^{(k)}(r)} \right)^{k-1} \frac{u^{(k)}}{r} \right] - \frac{E^{(k)}(r) \Phi^{*(k)}(r)}{1-2v^{(k)}(r)}, \quad (6)$$

де переміщення  $u^{(k)} = u^{(k)}(r)$  задовольняє рівняння рівноваги для неоднорідних тіл із кусково-неперервними коефіцієнтами

$$\frac{d}{dr} \left[ c^{(k)}(r) \frac{du^{(k)}}{dr} \right] + k \frac{d}{dr} \left[ c^{(k)}(r) \frac{v^{(k)}(r)}{1-v^{(k)}(r)} \frac{u^{(k)}}{r} \right] +$$

$$+ kc^{(k)}(r) \frac{1-2v^{(k)}(r)}{[1-v^{(k)}(r)]r} \left( \frac{du^{(k)}}{dr} - \frac{u^{(k)}}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left[ \frac{E^{(k)}(r)}{1-2v^{(k)}(r)} \Phi^{*(k)}(r) \right] \quad (7)$$

і граничні умови

$$\sigma_r^{(k)}(r_0) = 0, \quad \sigma_r^{(k)}(r_n) = 0. \quad (8)$$

Тут  $c^{(k)}(r) = \frac{E^{(k)}(r)[1 - \nu^{(k)}(r)]}{[1 + \nu^{(k)}(r)][1 - 2\nu^{(k)}(r)]}$ ;  $E^{(k)}(r)$ ,  $\nu^{(k)}(r)$ ,  $\Phi^{*(k)}(r)$  — кусково-неперервні функції, які в межах  $i$ -го складника співпадають відповідно з

$$E_i^{(k)}(r) = E_i(t_{ik}), \quad \nu_i^{(k)}(r) = \nu_i(t_{ik}), \quad \Phi_i^{*(k)}(r) = \int_{t_0^*}^{t_{ik}(r)} \alpha_t^{(i)}(\zeta) d\zeta; \quad (9)$$

$E_i(t_{ik})$ ,  $\nu_i(t_{ik})$ ,  $\alpha_i(t_{ik})$  — модулі пружності, коефіцієнти Пуассона та лінійного теплового розширення  $i$ -го шару.

Задачу (7), (8) розв'язуємо аналогічно, як і у праці [2]. Апроксимуючи неперервні функції  $E_i^{(k)}(r)$ ,  $\nu_i^{(k)}(r)$  кусково-сталими, прийдемо до задач термопружності для багатшарових циліндра та кулі з  $N = \sum_{j=1}^n n_j$  складниками, в яких від температури залежать лише коефіцієнти лінійного теплового розширення ( $n_j$  — кількість частин, на які поділений  $j$ -ий шар  $n$ -шарового циліндра та кулі). Розв'язки їх отримаємо з використанням результатів робіт [2, 3]. Температурні переміщення та напруження в  $p$ -му шарі  $N$ -шарових циліндрів (із закріпленими торцями) та кулі визначаємо за формулами

$$\begin{aligned} u_p^{(k)} &= \frac{r^{1/k}}{2q_k Q_n^{(k)} r} [\phi_{2p}^{(k)}(r) S_{1p}^{(k)} + \phi_{1p}^{(k)}(r) S_{2p}^{(k)}] + \frac{1 + \tilde{\nu}_p^{(k)}}{1 - \tilde{\nu}_p^{(k)}} \frac{1}{r} V_p^{(k)}(r); \\ \sigma_{rp}^{(k)} &= \frac{\tilde{c}_p^{(k)} r^{1/k}}{2q_k Q_n^{(k)} r^2} [g_{2p}^{(k1)}(r) S_{1p}^{(k)} + g_{1p}^{(k1)}(r) S_{2p}^{(k)}] - \frac{k \tilde{E}_p^{(k)}}{1 - \tilde{\nu}_p^{(k)}} \frac{1}{r^2} V_p^{(k)}(r), \\ \sigma_{\phi p}^{(k)} &= \frac{\tilde{c}_p^{(k)} r^{1/k}}{2q_k Q_n^{(k)} r^2} \left( \frac{\tilde{\nu}_p^{(k)}}{1 - \tilde{\nu}_p^{(k)}} \right)^{k-1} [g_{2p}^{(k2)}(r) S_{1p}^{(k)} + g_{1p}^{(k2)}(r) S_{2p}^{(k)}] + \\ &+ \frac{\tilde{E}_p^{(k)}}{1 - \tilde{\nu}_p^{(k)}} \left[ \frac{1}{r^2} V_p^{(k)}(r) - \Phi_p^{*(k)}(r) \right], \quad p = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} \phi_{1p}^{(k)}(r) &= M_{1p}^{(k)+} \left( \frac{r}{r_p} \right)^{q_k} + M_{1p}^{(k)-} \left( \frac{r_{p-1}^2}{r r_p} \right)^{q_k}, \\ \phi_{2p}^{(k)}(r) &= M_{2p}^{(k)+} \left( \frac{r_{p-1}}{r} \right)^{q_k} - M_{2p}^{(k)-} \left( \frac{r r_{p-1}}{r_p^2} \right)^{q_k}, \end{aligned}$$

$$g_{2p}^{(km)}(r) = -d_{mp}^{(k)-} M_{2p}^{(k)+} \left( \frac{r_{p-1}}{r} \right)^{q_k} - d_{mp}^{(k)+} M_{2p}^{(k)-} \left( \frac{r r_{p-1}}{r_p^2} \right)^{q_k},$$

$$g_{1p}^{(km)}(r) = d_{mp}^{(k)+} M_{1p}^{(k)+} \left( \frac{r}{r_p} \right)^{q_k} - d_{mp}^{(k)-} M_{1p}^{(k)-} \left( \frac{r_{p-1}^2}{r r_p} \right)^{q_k}, \quad m = 1, 2,$$

$$V_p^{(k)}(r) = r^{1-k} \int_{r_{p-1}}^r \rho^k \Phi_p^{*(k)}(\rho) d\rho; \quad q_1 = 1; \quad q_2 = 3/2,$$

$$M_{11}^{(k)\pm} = 2q_k(q_k \mp \beta_{k1}),$$

$$M_{1p}^{(k)\pm} = \Phi_{p-1}^{(k0)}(r_{p-1}) \left( q_k \pm K_p^{(k)} \right) \pm \Phi_{p-1}^{(k1)}(r_{p-1}) K_{cp}^{(k)}, \quad p = \overline{2, N},$$

$$M_{2p}^{(k)\pm} = \kappa_{N,p}^{(k2)} + \beta_{kN} \kappa_{N,p}^{(k1)} \pm q_k \left( \kappa_{N,p}^{(k4)} + \beta_{kN} \kappa_{N,p}^{(k3)} \right),$$

$$Q_N^{(k)} = \Phi_N^{(k1)}(r_N) + \beta_{kN} \Phi_N^{(k0)}(r_N),$$

$$\Phi_1^{(km)}(r) = \left[ q_k - \beta_{k1} + (-1)^m (q_k + \beta_{k1}) (r_0/r)^{2q_k} \right] q_k^m,$$

$$\Phi_p^{(km)}(r) = \Phi_{p-1}^{(k0)}(r_{p-1}) f_{p1}^{(km)}(r) + \Phi_{p-1}^{(k1)}(r_{p-1}) f_{p2}^{(km)}(r),$$

$$f_{p1}^{(km)}(r) = q_k^{m-1} \frac{1}{2} \left[ q_k + K_p^{(k)} + (-1)^m (q_k - K_p^{(k)}) (r_{p-1}/r)^{2q_k} \right],$$

$$f_{p2}^{(km)}(r) = q_k^{m-1} K_{cp}^{(k)} \frac{1}{2} \left[ 1 - (-1)^m (r_{p-1}/r)^{2q_k} \right], \quad m = 0, 1,$$

$$\kappa_{N,p}^{(k1)} = f_{N1}^{(k0)}(r_N) \kappa_{N-1,p}^{(k1)} + f_{N2}^{(k0)}(r_N) \kappa_{N-1,p}^{(k2)},$$

$$\kappa_{N,p}^{(k2)} = f_{N1}^{(k1)}(r_N) \kappa_{N-1,p}^{(k1)} + f_{N2}^{(k1)}(r_N) \kappa_{N-1,p}^{(k2)},$$

$$\kappa_{N,p}^{(k3)} = f_{N1}^{(k0)}(r_N) \kappa_{N-1,p}^{(k3)} + f_{N2}^{(k0)}(r_N) \kappa_{N-1,p}^{(k4)},$$

$$\kappa_{N,p}^{(k4)} = f_{N1}^{(k1)}(r_N) \kappa_{N-1,p}^{(k3)} + f_{N2}^{(k1)}(r_N) \kappa_{N-1,p}^{(k4)},$$

$$\kappa_{p+1,p}^{(k1)} = f_{p+1,1}^{(k0)}(r_{p+1}), \quad \kappa_{p+1,p}^{(k2)} = f_{p+1,1}^{(k1)}(r_{p+1}),$$

$$\kappa_{p+1,p}^{(k3)} = f_{p+1,2}^{(k0)}(r_{p+1}), \quad \kappa_{p+1,p}^{(k4)} = f_{p+1,2}^{(k1)}(r_{p+1}), \quad p < N,$$

$$\kappa_{N,N}^{(k1)} = \kappa_{N,N}^{(k4)} = 1, \quad \kappa_{N,N}^{(k2)} = \kappa_{N,N}^{(k3)} = 0,$$

$$S_{1p}^{(k)} = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\tilde{c}_j^{(k)}}{\tilde{c}_p^{(k)}} M_{1j}^{(k)+} P_{jp}^{(k)} J_j^{(k)}(r_j),$$

$$S_{2p}^{(k)} = - \sum_{j=p+1}^n \left( r_{j-1}/r_j \right)^{q_k} M_{2j}^{(k)-} P_{pj}^{(k)} J_j^{(k)}(r_j) - M_{2p}^{(k)-} J_p^{(k)}(r_p),$$

$$\begin{aligned}
P_{jp}^{(k)} &= (r_j/r_{p-1})^{q_k}; & J_p^{(k)}(r) &= \frac{1 + \tilde{v}_p^{(k)}}{1 - \tilde{v}_p^{(k)}} r^{-1/k} V_p^{(k)}(r), \\
K_p^{(k)} &= K_{cp}^{(k)} \beta_{k,p-1} - \beta_{kp}, & K_{cp}^{(k)} &= \frac{\tilde{c}_{p-1}^{(k)}}{\tilde{c}_p^{(k)}}, & \tilde{c}_p^{(k)} &= \frac{\tilde{E}_p^{(k)} (1 - \tilde{v}_p^{(k)})}{(1 + \tilde{v}_p^{(k)}) (1 - 2\tilde{v}_p^{(k)})}, \\
2\beta_{2p} &= \frac{5\tilde{v}_p^{(2)} - 1}{1 - \tilde{v}_p^{(2)}}, & d_{1p}^{(2)-} &= 2 \frac{1 - 2\tilde{v}_p^{(2)}}{1 - \tilde{v}_p^{(2)}}, & d_{1p}^{(2)+} &= \frac{1 + \tilde{v}_p^{(2)}}{1 - \tilde{v}_p^{(2)}}, & d_{2p}^{(2)-} &= \frac{2\tilde{v}_p^{(2)} - 1}{\tilde{v}_p^{(2)}}, \\
d_{2p}^{(2)+} &= \frac{1 + \tilde{v}_p^{(2)}}{\tilde{v}_p^{(2)}}, & \beta_{1p} &= \frac{\tilde{v}_p^{(1)}}{1 - \tilde{v}_p^{(1)}}, & d_{mp}^{(1)+} &= \frac{1}{1 - \tilde{v}_p^{(1)}}, & d_{mp}^{(1)-} &= (-1)^{m+1} \frac{1 - 2\tilde{v}_p^{(1)}}{1 - \tilde{v}_p^{(1)}}, \\
\tilde{E}_p^{(k)} &= E^{(k)}(r_p^*), & \tilde{v}_p^{(k)} &= v^{(k)}(r_p^*), & r_{p-1} &< r_p^* < r_p.
\end{aligned}$$

### 3. Числові приклади

Досліджували температуру та напруження  $\sigma_\beta^* = \frac{\sigma_{\beta\beta}}{E_1(0)\alpha_t^{(1)}(0)(t_c^- - 273)}$  ( $\beta = r, \phi$ )

у двошарових циліндрі та кулі, складники яких виготовлені з вольфраму ( $\lambda_t^{(1)}(t) = 161,25(1 - 0,000459t)$  Вт/(м·К),  $\alpha_t^{(1)}(t) = (3,8033 + 0,00502t - 4,8062 \cdot 10^{-6}t^2) \cdot 10^{-6}$  К<sup>-1</sup>,  $E_1(t) = (3,8976 - 0,00048t + 5,9524 \cdot 10^{-8}t^2) \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu_1(t) = 0,3395 + 0,00002t$ ) та кераміки ( $\lambda_t^{(2)}(t) = 16,8(1 + 0,0115t)$  Вт/(м·К),  $\alpha_t^{(2)}(t) = (4,6095 + 0,01368t - 1,12 \cdot 10^{-6}t^2) \times 10^{-6}$  К<sup>-1</sup>,  $E_2(t) = (3,941 - 0,00018t - 2,0238 \cdot 10^{-7}t^2) \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu_1(t) = 0,2327 + 0,00001t$ ). У випадку незалежних від температури ФМХ їхні значення приймали такі ж, як і за нульової температури.

Залежність коефіцієнтів тепловіддачі від температури була лінійна

$$\alpha_m(t) = (100 + 2t) \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}). \quad (12)$$

**3.1. Двошаровий циліндр.** Нагрівання здійснюється конвективно-променевим способом за однакових з обох поверхонь коефіцієнтів тепловіддачі та ступенів чорноти. Розрахунки проведено при  $R_0 = 0,02$  м,  $R_1 = 0,04$  м,  $R_2 = 0,08$  м,  $t_c^- = 1473$  К,  $t_c^+ = 293$  К,  $\gamma_0 \varepsilon(t_{m1}) = 1,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>).

Рис. 1 ілюструє єдиність розв'язку системи (5) ( $k = 1$ ) за коефіцієнтів тепловіддачі, які змінюються за законом (12). Точці перетину лінії, що належить двом лівим частинам, із площиною  $z = 0$  відповідають значення  $t_{c1} = 385,992$  К,  $q_{01} = 8,14 \cdot 10^5$  Вт/(м<sup>2</sup>·К), які отримані в результаті розв'язування системи (5) з використанням методу Ньютона.

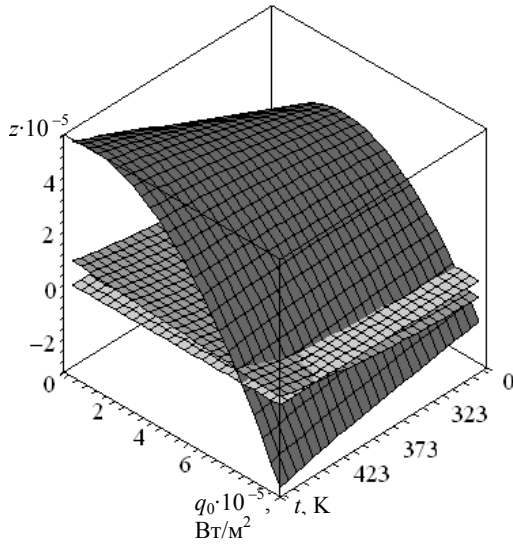


Рис. 1

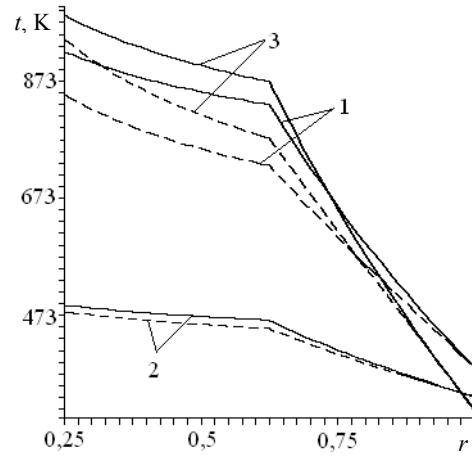


Рис. 2

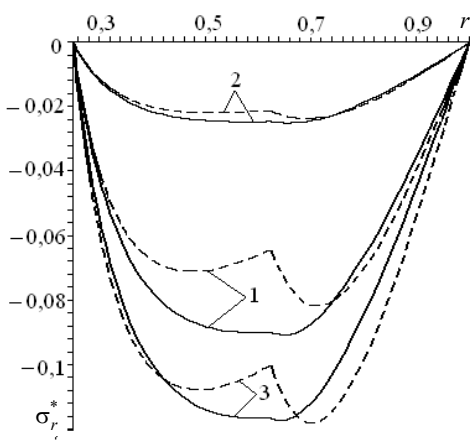


Рис. 3

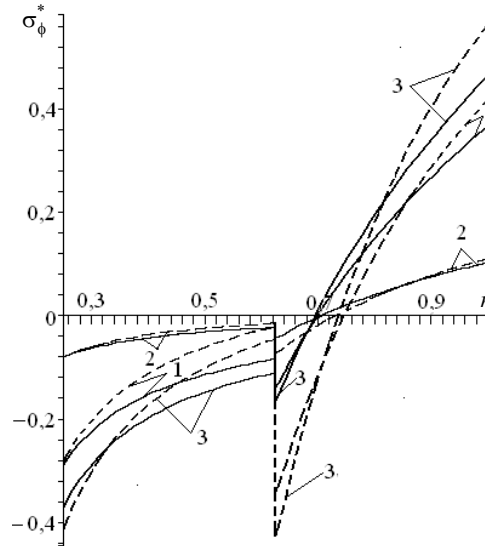


Рис. 4

Розподіл температури, радіальних і кільцевих напружень за товщиною подано на рис. 2-4. Тут і далі суцільні лінії побудовані за сталем ФМХ, а штрихові — у разі їх залежності від температури. Криві 1 відповідають коефіцієнтам тепловіддачі (12), криві 2 та 3 — відповідно сталим  $\alpha_m = 200 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$  та  $\alpha_m = 2000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ .

Радіальні напруження у внутрішніх точках циліндра — стискальні, а кільцеві — стискальні у першому шарі, а у другому шарі зі стискальних на внутрішній поверхні

переходять у розтягувальні на зовнішній. Найістотніший вплив температурної залежності ФМХ на температуру, радіальні та кільцеві напруження на границі поділу шарів. Їх величина залежить також і від коефіцієнта тепловіддачі. Радіальні напруження, обчислені з урахуванням температурної залежності ФМХ, у внутрішніх точках кожного шару мають чітко виражені максимуми (криві 1, 3).

**3.2. Двошарова куля.** Вважаємо, що на внутрішній поверхні підтримується температура  $t_c^- = 1273 \text{ K}$ , а на зовнішній реалізується конвективно-променеви теплообмін. Розрахунки проведено для  $R_0 = 0,04 \text{ м}$ ,  $R_1 = 0,07 \text{ м}$ ,  $R_2 = 0,1 \text{ м}$ ,  $t_c^+ = 293 \text{ K}$ ,  $\gamma_0 \varepsilon(t_{m1}) = 1,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{K}^4)$ .

У цьому випадку у другому рівнянні системи (5) слід прийняти  $k = 2$ , а перше буде мати вигляд  $t_{12}(q_{02}, t_c, r_0) - t_c^- = 0$ . Рис. 5 ілюструє єдиність розв'язку такої системи, якщо коефіцієнт тепловіддачі змінюється за законом (12). Точці перетину лінії, що належить двом лівим частинам, із площиною  $z = 0$  відповідають значення  $t_{c2} = 420,771 \text{ K}$ ,  $q_{01} = 1,8929 \cdot 10^6 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{K})$ , отримані аналогічно, як і у попередньому випадку.

Розподіл температури, радіальних і кільцевих напружень за товщиною подано на рис. 6-8. Криві 1 побудовані за коефіцієнта тепловіддачі, що змінюється згідно формули (12), а 2 — за сталого  $\alpha_2 = 200 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{K})$ .

Як і слід було очікувати, температура на внутрішній поверхні кулі, обчислена як за, так і без урахування температурної залежності коефіцієнта теплопровідності, співпадає з заданою. Найістотніший вплив температурної залежності, як і у випадку циліндра, на поверхні поділу шарів. Найбільше значення температури на цій поверхні досягається за сталого коефіцієнта тепловіддачі. При цьому ж коефіцієнті тепловіддачі найістотніший вплив температурної залежності ФМХ на радіальні та кільцеві напруження.

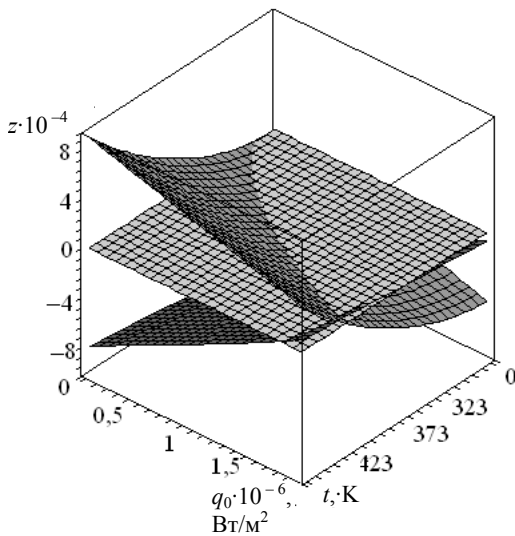


Рис. 5

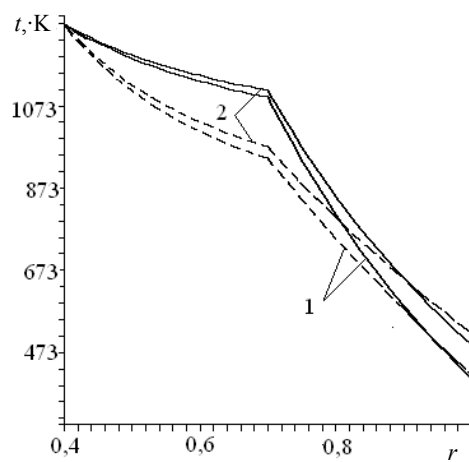


Рис. 6



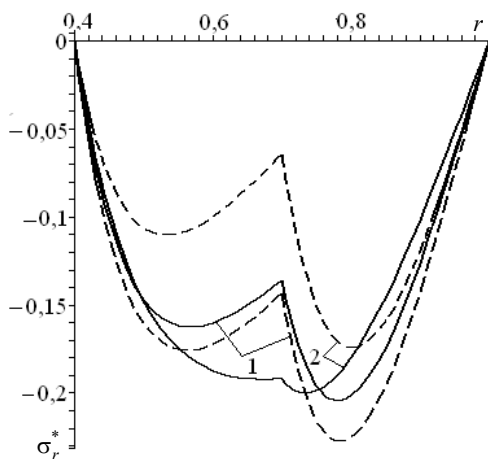


Рис. 7

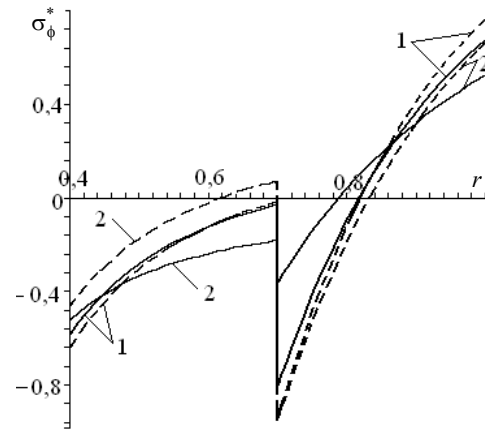


Рис. 8

**Висновки.** Викладена методика дає змогу з єдиних позицій будувати ефективні розв'язки одновимірних статичних задач термопружності для шаруватих куль і необмежених порожнистих циліндрів за конвективно-променевого теплообміну, урахування лінійної залежності від температури коефіцієнтів теплопровідності та довільного характеру залежностей інших ФМХ від температури.

### Література

- [1] Кушнір Р. М., Процюк Ю. Б. Температурні поля в шаруватих термочутливих тілах канонічної форми за різних способів нагріву // 8-ий міжн. симп. укр. інж.-механіків у Львові. Тези доп. — Львів: КІНПАТРИ ЛГД, 2007. — С. 65.
- [2] Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М. Квазістатичні температурні напруження в багатошаровому термочутливому циліндрі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2004. — № 4. — С. 7-16.
- [3] Процюк Б. В. Застосування методу функцій Гріна до визначення термопружного стану шаруватих трансверсально-ізотропних сферичних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — Т. 47, № 3. — С. 95-109.

## **Thermoelastic state of the layered thermosensitive cylinders and spheres by convective and radiation heat transfer**

Roman Kushnir, Yuriy Protsuik

*The method for solving one-dimensional static thermoelasticity problems is developed for layered cylinders and spheres under convective and radiation heating, taking into account linear dependence of heat conductivity coefficients and arbitrary character of dependence of other physical and mechanical characteristics on a temperature. Problems of heat conductivity have been reduced to the system of two nonlinear algebraic equations regardless of the number of layers. In the thermoelasticity problems the continuous within every layer coefficients of equations are approximated by piecewise constant functions. The numerical analysis of the temperature fields and stresses is conducted for two-layered bodies.*

## **Термоупругое состояние слоистых термочувствительных цилиндров и шаров при конвективно-лучистом теплообмене**

Роман Кушнір, Юрій Процюк

*Разработана методика решения одномерных статических задач термоупругости для слоистых цилиндров и сфер при конвективно-лучевом нагреве с учетом линейной зависимости коэффициентов теплопроводности и произвольного характера зависимости других физико-механических характеристик от температуры. Задачи теплопроводности сведены, независимо от количества слоев, к решению системы двух нелинейных алгебраических уравнений. В задачах термоупругости непрерывные в пределах каждого слоя коэффициенты уравнений аппроксимированы кусочно-постоянными функциями. Проведен численный анализ температурных полей и напряжений в двухслойных телах.*

Отримано 25.06.08