

7. Регіональна доповідь про стан навколишнього природного середовища в м. Києві у 2008 р. – К. : М-во охорони навколишнього природного середовища України, 2008. – 223 с.
8. Щомісячний бюлетень забруднення атмосферного повітря в Києві та містах Київської області № 7 (169) – К.: Центральна геофізична обсерваторія, 2008.
9. <http://www.cgo.kiev.ua/kyiv/data/lzapost.gif>

Поступила 18.01.2010р.

УДК 621.3.018.1

Ю.М. Романишин, д.т.н., Р.М. Якимів, Національний університет “Львівська політехніка”, м. Львів

ОСОБЛИВОСТІ ЧИСЛОВОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ УЗГОДЖЕННЯ СИГНАЛУ ТА ЙОГО НЕЙРОМЕРЕЖЕВА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ

The features of numerical solution of variation problem of matching of signal with band-pass filter – determination of minimum after energy input signal at the specified value of output signal - are considered. Procedure of determination of optimum input signal is based on the method of the dynamic programming. Neural network interpretation of the problem is considered.

Вступ. Узгодження вхідного сигналу з пристроєм його перетворення передбачає визначення оптимального (за деяким критерієм) вхідного сигналу [1]. В [2] на основі варіаційного методу була розглянута одна з задач узгодження сигналу зі смугопропускним фільтром другого порядку – визначення форми вхідного сигналу з мінімальною питомою енергією, яка забезпечує задане значення енергії сигналу на виході фільтру. Такий фільтр використовується в енергетичній моделі нейрона [3]. Однак отримані результати застосовні лише для використаної апроксимації характеристики фільтра другого порядку. В більш загальному випадку задачі узгодження необхідне використання числових методів.

Метою роботи є аналіз особливостей числового розв’язання варіаційної задачі узгодження сигналу зі смугопропускним фільтром на основі методу динамічного програмування та нейромережева інтерпретація процедури розв’язання.

Постановка задачі числового розв’язання варіаційної задачі узгодження. Нехай на вхід смугопропускного фільтра з заданою імпульсною характеристикою $g(t)$ діє вхідний сигнал $x(t)$ скінченної тривалості ($t \in [-T; T]$). Ставиться задача числового визначення форми вхідного

сигналу мінімальної питомої енергії при заданому рівні енергії E_0 вихідного сигналу.

При числовому розв'язанні задачі відрізок $[-T; T]$ розбивається на n часових інтервалів – значення часу $t_0 = -T, t_1, \dots, t_{n-2}, t_{n-1} = T$ з постійним кроком: $t_{i+1} - t_i = \Delta t = \text{const}$. Діапазон значень вхідного сигналу $[-A; A]$ теж розбивається на рівні: $s_0 = -A, s_1, \dots, s_{m-2}, s_{m-1} = A$ з постійним кроком квантування: $s_{j+1} - s_j = \Delta s = \text{const}$. Оскільки шукається лише оптимальна форма імпульсу, абсолютні числові значення не мають значення, їх можна пронормувати, наприклад, від -1 до +1 вздовж обох осей координат.

Обґрунтування алгоритму розв'язання варіаційної задачі. Алгоритм розв'язання варіаційної задачі базується на методі динамічного програмування. Процедуру визначення енергетично оптимального вхідного сигналу будемо розглядати як багатокроковий процес, при якому тривалість сигналу зростає від 0 до $2T$ з кроком Δt . Ця процедура складається з двох етапів – прямого та зворотного ходу. Прямий хід складається з $n-1$ кроку. Нехай після i -го кроку значення дискретного часу $t_i = -T + i \cdot \Delta t$. Розглянемо два сигнали тривалістю $[-T; t_i]$: $x_0(t)$ - оптимальний на даному кроці сигнал та $x_1(t)$ - довільний сигнал, який, очевидно, гірший від $x_0(t)$ за енергетичним критерієм. Для зручності будемо розглядати ці сигнали як сигнали неперервного аргумента.

Відповідні вихідні сигнали:

$$y_k(t) = \int_{-T}^t x_k(\tau) g(t-\tau) d\tau; \quad k = 0; 1. \quad (1)$$

При однакових порогових значеннях питомої енергії:

$$\int_{-T}^{\infty} y_k^2(t) dt = \int_{-T}^{\infty} \left(\int_{-T}^t x_k(\tau) g(t-\tau) d\tau \right)^2 dt = E_0. \quad (2)$$

При цьому, в силу оптимальності вхідного сигналу $x_0(t)$, справедлива нерівність для питомих енергій вхідних сигналів:

$$\int_{-T}^{t_i} x_1^2(t) dt > \int_{-T}^{t_i} x_0^2(t) dt. \quad (3)$$

Нехай тривалість сигналу збільшена на Δt і при цьому на інтервалі $[t_i; t_i + \Delta t]$ обидва сигнали описуються однаковими функціями $a(t)$, тобто вхідні сигнали стають рівними $x_0(t) + a(t)$ та $x_1(t) + a(t)$. При цьому $x_0(t) = x_1(t) = 0$ при $t \in [t_i; t_i + \Delta t]$, а $a(t) = 0$ при $t \in [-T; t_i]$.

Вихідні сигнали:

$$\tilde{y}_k(t) = \begin{cases} \int_{-T}^t x_k(\tau)g(t-\tau)d\tau & \text{пу } -T \leq t \leq t_i \\ \int_{-T}^{t_i} x_k(\tau)g(t-\tau)d\tau + \int_{t_i}^t a(\tau)g(t-\tau)d\tau & \text{пу } t_i \leq t < \infty \end{cases}; k = 0; 1. \quad (4)$$

Порогові значення енергій вихідних сигналів (з необхідними для цього нормуючими множниками K_k^2):

$$K_k^2 \left[\int_{-T}^{t_i} \left(\int_{-T}^t x_k(\tau)g(t-\tau)d\tau \right)^2 dt + \int_{t_i}^{\infty} \left(\int_{-T}^{t_i} x_k(\tau)g(t-\tau)d\tau + \int_{t_i}^t a(\tau)g(t-\tau)d\tau \right)^2 dt \right] = E_0. \quad (5)$$

Звідси нормуючі множники :

$$K_k^2 = \frac{E_0}{\int_{-T}^{t_i} \left(\int_{-T}^t x_k(\tau)g(t-\tau)d\tau \right)^2 dt + \int_{t_i}^{\infty} \left(\int_{-T}^{t_i} x_k(\tau)g(t-\tau)d\tau + \int_{t_i}^t a(\tau)g(t-\tau)d\tau \right)^2 dt}. \quad (6)$$

Розглянемо різницю енергій вхідних сигналів (з врахуванням нормуючих множників) та визначимо її знак:

$$\Delta E = K_1^2 \left[\int_{-T}^{t_i} x_1^2(t)dt + \int_{t_i}^{t_i+\Delta t} a^2(t)dt \right] - K_0^2 \left[\int_{-T}^{t_i} x_0^2(t)dt + \int_{t_i}^{t_i+\Delta t} a^2(t)dt \right]. \quad (7)$$

Оскільки вирази у знаменниках для K_k^2 є додатніми, величина E_0 також додатня, після зведення до спільного множника обох дробів знак виразу (7) співпадає зі знаком виразу:

$$\begin{aligned} \Delta E_1 = & \left[\int_{-T}^{t_i} x_k^2(t)dt + \int_{t_i}^{t_i+\Delta t} a^2(t)dt \right] \times \left[\int_{-T}^{t_i} \left(\int_{-T}^t x_0(\tau)g(t-\tau)d\tau \right)^2 dt + \right. \\ & \left. + \int_{t_i}^{\infty} \left(\int_{-T}^t x_0(\tau)g(t-\tau)d\tau + \int_{t_i}^t a(\tau)g(t-\tau)d\tau \right)^2 dt \right] - \\ & - \left[\int_{-T}^{t_i} x_0^2(t)dt + \int_{t_i}^{t_i+\Delta t} a^2(t)dt \right] \times \left[\int_{-T}^{t_i} \left(\int_{-T}^t x_1(\tau)g(t-\tau)d\tau \right)^2 dt + \right. \\ & \left. + \int_{t_i}^{\infty} \left(\int_{-T}^t x_1(\tau)g(t-\tau)d\tau + \int_{t_i}^t a(\tau)g(t-\tau)d\tau \right)^2 dt \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

В результаті перетворення цього виразу отримуємо:

$$\begin{aligned}
\Delta E_1 = \sum_{j=1}^7 \Delta E_{1j} = & \left[\left(\int_{-T}^{t_i} x_1^2(t) dt \right) - \left(\int_{-T}^{t_i} x_0^2(t) dt \right) \right] \times E_0 + \\
& + 2 \left(\int_{-T}^{t_i} x_1^2(t) dt \right) \times \left(\int_{t_i}^{\infty} \left(\int_{-T}^t x_0(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) \left(\int_{t_i}^t a(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) dt \right) + \\
& + \left(\int_{-T}^{t_i} x_1^2(t) dt \right) \times \left(\int_{t_i}^{\infty} \left(\int_{t_i}^t a(\tau) g(t-\tau) d\tau \right)^2 dt \right) + \\
& + 2 \left(\int_{t_i}^{t_i+\Delta t} a^2(t) dt \right) \times \left(\int_{t_i}^{\infty} \left(\int_{-T}^t x_0(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) \left(\int_{t_i}^t a(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) dt \right) - \\
& - 2 \left(\int_{-T}^{t_i} x_0^2(t) dt \right) \times \left(\int_{t_i}^{\infty} \left(\int_{-T}^t x_1(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) \left(\int_{t_i}^t a(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) dt \right) - \\
& - \left(\int_{-T}^{t_i} x_0^2(t) dt \right) \times \left(\int_{t_i}^{\infty} \left(\int_{t_i}^t a(\tau) g(t-\tau) d\tau \right)^2 dt \right) - \\
& - 2 \left(\int_{t_i}^{t_i+\Delta t} a^2(t) dt \right) \times \left(\int_{t_i}^{\infty} \left(\int_{-T}^t x_1(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) \left(\int_{t_i}^t a(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) dt \right). \tag{9}
\end{aligned}$$

Для кожного з семи доданків, крім першого, отриманого виразу можна отримати оцінки їх абсолютних величин, використовуючи інтегральну нерівність Коші-Буняковського:

$$\left| \int_a^b x(t)y(t)dt \right| \leq \left(\int_a^b x^2(t)dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b y^2(t)dt \right)^{1/2}. \tag{10}$$

Наприклад, для другого доданку отримуємо:

$$\begin{aligned}
\Delta E_{12} = & 2 \left(\int_{-T}^{t_i+\Delta t} x^2(t) dt \right) \times \left(\int_{t_i}^{\infty} \left(\int_{-T}^t x_0(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) \left(\int_{t_i}^t a(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) dt \right) \leq \\
\leq & 2C_1 \times \left(\int_{t_i}^{\infty} \left(\int_{-T}^t x_0(\tau) g(t-\tau) d\tau \right)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{t_i}^{\infty} \left(\int_{t_i}^t a(\tau) g(t-\tau) d\tau \right)^2 dt \right)^{1/2} \leq \\
\leq & 2C_1 C_2 \left(\int_{t_i}^{\infty} \left(\int_{t_i}^t a^2(\tau) d\tau \right) \left(\int_{t_i}^t g^2(t-\tau) d\tau \right) dt \right)^{1/2} \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2C_1C_2 \left(\int_{t_i}^{\infty} \left(\int_{t_i}^t a^2(\tau) d\tau \right)^2 dt \right)^{1/4} \left(\int_{t_i}^{\infty} \left(\int_{t_i}^t g^2(t-\tau) d\tau \right)^2 dt \right)^{1/4} = \\
&= 2C_1C_2C_3 \left(\int_{t_i}^{\infty} \left(\int_{t_i}^t a^2(\tau) d\tau \right)^2 dt \right)^{1/4} \leq 2C_1C_2C_3 \left(\int_{t_i}^{t_i+\Delta t} \left(\int_{t_i}^{t_i+\Delta t} C_4^2 d\tau \right)^2 dt \right)^{1/4} = \\
&= 2C_1C_2C_3C_4(\Delta t)^{3/4}, \tag{11}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
C_1 &= \left(\int_{-T}^{t_i+\Delta t} x^2(t) dt \right); \quad C_2 = \left(\int_{t_i}^{\infty} \left(\int_{-T}^t x_0(\tau) g(t-\tau) d\tau \right)^2 dt \right)^{1/2}; \\
C_3 &= \left(\int_{t_i}^{\infty} \left(\int_{t_i}^t g^2(t-\tau) d\tau \right)^2 dt \right)^{1/4}; \quad C_4 = \max_{\tau \in [t_i; t_i+\Delta t]} |a(\tau)| - \text{скінченні величини.}
\end{aligned}$$

Таким чином, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta E_{12}| = 0$. Аналогічним чином можна показати, що і для всіх інших складових ΔE_{1j} ($j = \overline{3;7}$), крім першого, у виразі (9) справедливі співвідношення: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta E_{1j}| = 0$. Це означає, що для довільного $\delta > 0$ можна вибрати таке мале значення Δt^* , що при $\Delta t < \Delta t^*$ буде виконуватися нерівність $|\Delta E_{1j}| < \delta$. Таким чином, оскільки $\Delta E_{11} > 0$ і не залежить від Δt , при відповідному виборі Δt оптимальний сигнал на $(i+1)$ -му кроці може бути отриманий на основі оптимального сигналу на i -му кроці з додатковим обчисленням енергій сигналів при переході від i -го до $(i+1)$ -го кроку.

Нейромережева інтерпретація варіаційної задачі узгодження. В нейромережеві інтерпретації процедура числового розв'язання задачі визначення форми енергетично оптимального імпульсу може бути представлена нейронною мережею Кохонена з шаровою структурою (рис. 1) [4]. Шари нейронної мережі ($i = \overline{0; n-1}$) відповідають дискретним моментам часу t_0, t_1, \dots, t_{n-1} . Кожний шар містить m нейронів s_{ij} , що відповідають рівням квантування вхідного сигналу (i - номер шару; j - номер рівня). Активація нейронів в мережі відбувається таким чином, що в кожному шарі активується лише один нейрон. При цьому послідовність таких активованих нейронів $s_{0,j_0}, s_{1,j_1}, \dots, s_{n-1,j_{n-1}}$ однозначно визначає дискретизований вхідний сигнал.

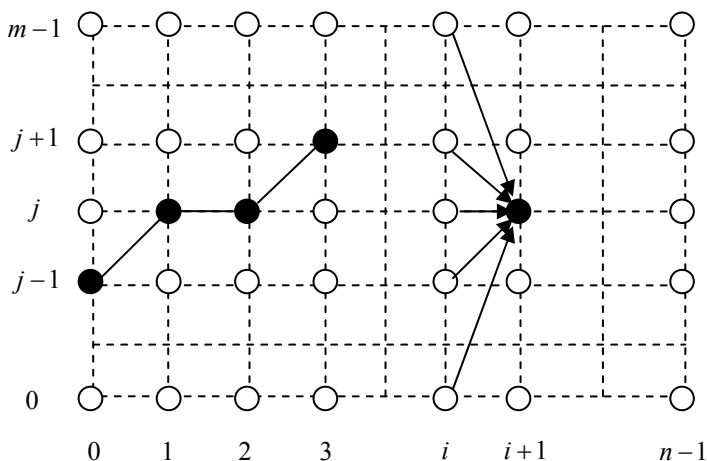


Рис. 1. Нейромережева інтерпретація розв'язання варіаційної задачі узгодження

Пошук оптимальної послідовності активованих нейронів може здійснюватися двома способами. При першому способі процедура пошуку оптимального вхідного сигналу відповідає алгоритму динамічного програмування і реалізується прямим і зворотнім ходом, які складаються з $(n-1)$ -го кроку. На i -му кроці прямого ходу для кожної пари нейронів у вхідному шарі та i -му шарі визначається оптимальний для даної пари шлях між ними (оптимальна форма імпульсу) у відповідності з наведеними вище співвідношеннями. На $(n-1)$ -му кроці отримується m^2 оптимальних послідовностей між кожною парою нейронів вхідного та вихідного шарів. Кожна з цих послідовностей характеризується значенням, що відповідає енергії вхідного сигналу. Серед цих значень вибирається мінімальне, яке відповідає енергетично оптимальному вхідному сигналу з визначеними початковим та кінцевим значеннями. На зворотньому ході отримується послідовність нейронів в кожному з внутрішніх шарів, яка представляє дискретизований оптимальний вхідний сигнал. Хоча ця процедура є достатньо затратною з обчислювальної точки зору, вона забезпечує отримання оптимального сигналу активації.

Інший можливий спосіб розв'язання задачі близький до традиційних нейромережевих алгоритмів навчання нейронної мережі з отриманням деякого початкового наближення та ітераційною процедурою його послідовного покращення. Початкове наближення може бути отримане при прямому проході з вибором оптимального нейрона в i -му шарі при

фіксованих активованих нейронах в кожному з попередніх шарів, вибраних в якості оптимальних на попередніх кроках. Звичайні градієнтні алгоритми пошуку мінімуму функціонала енергії в даному випадку малоприсадибні внаслідок складності отримання в явному вигляді залежності енергії сигналу від положень нейронів в шарах мережі. У зв'язку з цим можливе використання евристичних процедур вибору нейронів, для яких здійснюється їх переміщення в шарі з метою зменшення функціоналу вхідної енергії, наприклад, в якості такого нейрона може бути вибраний нейрон, для якого є максимальним значення $|s_{ij}|$.

Висновки. При моделюванні нейронних структур важливим є визначення оптимальних сигналів (імпульсів) активації нейронів, зокрема, за енергетичним критерієм. Ці задачі відносяться до варіаційних задач узгодження сигналу з пристроєм його обробки. Лише в конкретних часткових випадках ця варіаційна задача може бути розв'язана в аналітичному вигляді. В загальному випадку необхідним є числове розв'язання задачі. На відміну від відомих числових методів розв'язання варіаційних задач, нейромережеві підходи забезпечують можливість розпаралелювання обчислювальних процедур. Отримані результати дають можливість обґрунтувати побудову алгоритму визначення форми енергетично оптимальних імпульсів на вході смугопропускнуго фільтра в частотновибірній моделі нейрона при заданому значенні енергії вихідного сигналу. Алгоритм має нейромережеву інтерпретацію у вигляді нейронної мережі Кохонена з шаровою структурою, в якій послідовність нейронів, які активуються, формують дискретну траєкторію, що визначає оптимальну форму вхідного імпульсу.

1. Ямпольский Э.М. Вариационные принципы согласования сигналов с каналом связи. – М.: Радио и связь, 1987. – 136 с.
2. Романишин Ю.М., Смердов А.А., Смолий Б.И. Особенности согласования сигнала с полосовым фильтром второго порядка // Изв. высш. учеб. заведений. Радиоэлектроника. - 1989. – Т. 32, № 3. – С.10-15.
3. Смердов А.А., Романишин Ю.М. Электрическая модель нейрона при одиночном возбуждении // Вопросы кибернетики: Биомедицинформатика и ее приложения. - М.: Изд-во АН СССР. - 1988. – С. 168-174.
4. Нейроматематика (Нейрокомпьютеры и их применение. Кн. 6): Учеб. пособие для вузов / А.Д. Агеев, А.Н. Балухто, А.В. Бычков и др. / Под общ. ред. А.И. Галушкина. – М.: ИПРЖР, 2002. – 448 с.

Поступила 1.02.2010р.