УДК 539.3

Моделі динаміки пружних збурень у неоднорідно деформованому континуумі

Василь Чекурін[1], Оксана Кравчишин[2]

[1] д. ф.-м. н., професор, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, e-mail: chekurin@iapmm.lviv.ua
[2] к. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів

Розвинуто нелінійну теорію пружності стосовно задач томографії тензорних полів у неоднорідно деформованих твердих тілах. За визначальні параметри локального термодинамічного стану, що відповідають процесові деформування, прийнято тензорні характеристики, означені щодо актуальної (деформованої) конфігурації — тензор напружень Коші та міри деформації Альманзі або Фінгера. У рамках запропонованої нелінійної теорії побудовано декілька варіантів системи рівнянь динаміки малих пружних збурень у неоднорідно деформованому твердому континуумі, лінеаризованої стосовно деформації збурення. Коефіцієнти отриманих рівнянь залежать від локальних параметрів початкового напружено-деформованого стану, заданих в актуальній конфігурації. У такому вигляді їх зручно застосовувати для опису хвильових процесів, які збуджують у неоднорідно деформованих тілах, щоб отримати апостеріорну інформацію про актуальний напружено-деформований стан цих об'єктів.

Ключові слова: нелінійна пружність, пружні хвилі в неоднорідно деформованих середовищах, акустична томографія тензорних полів.

Вступ. У випадках, коли зовнішні навантаження та/чи умови закріплення об'єкта апріорі невідомі, визначення його напружено-деформованого стану шляхом розв'язування відповідних прямих задач механіки стає неможливим, оскільки у такому разі математична модель поведінки (чи стану) механічної системи є незамкненою. Тоді вдаються до додаткової інформації, яку отримують шляхом фізичних вимірювань деяких параметрів шуканих полів напружень та деформацій і, використовуючи ті чи інші теоретичні уявлення, прагнуть відновити поля напружень та деформацій у всій повноті.

Відомий метод акустопружності. Цей метод базується на лінеаризованій теорії пружних хвиль у тілах із початковими деформаціями, в рамках якої встановлюють залежності швидкостей їх поширення від компонент початкових напружень чи деформацій. Такий підхід реалізовано на практиці, в основному, для випадків, коли зондувальні хвилі поширюються в головних напрямках тензора деформації й поле деформацій у цих напрямках однорідне [1-3]. Тут для відновлення напруженого стану використовують так звані співвідношення акустопружності, які встановлюють залежності зміни швидкостей поздовжніх та поперечних хвиль від компонент тензора деформації [1-3].

Разом із тим у літературі відомі лише окремі публікації, автори яких обмежуються дослідженням спеціальних, достатньо простих випадків неоднорідних розподілів початкових деформацій [1, 4, 5]. Однак теорія поширення пружних збурень у твердих тілах із неоднорідними початковими напруженнями ще далеко не вирішена. Така теорія необхідна, зокрема, для створення акустичних методів неруйнівного визначення неоднорідного напружено-деформованого стану твердих тіл. Для цього потрібно розвинути математичні моделі поширення пружних хвиль, що охоплюють випадки зондування об'єктів у напрямках, вздовж яких поле напружень істотно змінюється за величиною.

У статті отримано математичні моделі для опису поширення пружних збурень у неоднорідно деформованих твердих тілах, зорієнтовані на задачі акустичної томографії тензорних полів. Сюди, зокрема, належать обернені задачі неруйнівного визначення неоднорідного напружено-деформованого стану, у яких вхідною інформацією є дані зондування об'єктів акустичними полями, отримані в деякій множині напрямків, на які не накладають спеціальних вимог щодо їх орієнтації стосовно головних осей тензорів, що підлягають відновленню.

1. Параметри локального напружено-деформованого стану

Маючи на меті введення термодинамічних параметрів, що відповідають процесові деформування, розглянемо диференціальні параметри, які використовують у нелінійній механіці для опису локального деформованого стану [6].

У механіці суцільного середовища є декілька адекватних способів опису деформації континууму — матеріальний, відліковий, просторовий тощо [7]. При цьому, як правило, розглядають дві конфігурації тіла — відлікову $\mathbf{V_0} \subset E^3$, та біжучу (актуальну) $\mathbf{V} \subset E^3$. У відліковому описі матеріальні точки ототожнюють з місцями, які вони займали у відліковій конфігурації. Для цього кожній точці приписують деякий незмінний у процесі руху радіус-вектор, і деформація математично означається як відображення відлікової конфігурації на актуальну. За просторового опису, натомість, увага зосереджується на актуальній конфігурації, тобто на області простору $\mathbf{V}$, яку займає тіло у даний момент часу, і математична модель формулюється стосовно параметрів, що є функціями точок простору цієї конфігурації.

Усі перелічені способи опису руху в математичному сенсі еквівалентні. Разом із тим вибір конкретного способу впливає на множину визначальних параметрів напружено-деформованого стану, щодо яких формують рівняння моделі, а, відтак, на зручність їх використання у тих чи інших конкретних задачах. Так, у нелінійних прямих задачах пружності здебільшого використовують відліковий опис, в якому параметри задачі визначені в незмінній у часі і, зазвичай, заданій відліковій конфігурації.

Розробляючи математичні моделі, для обернених задач доцільно використовувати ті характеристики локального термодинамічного стану, від яких залежать інформативні параметри, що їх можна визначити шляхом фізичних вимірювань. Зокрема, в задачах томографії напружено-деформованого стану твердих тіл, на відміну від класичних задач механіки, відомою є не відлікова (ненапружена), а актуальна (деформована) конфігурація. До того ж, зондувальні збурення вводять в об'єкт у його актуальному стані, й вимірювані в результаті такого зондування інформативні характеристики природним чином залежать від параметрів напружено-деформованого стану, означених стосовно актуальної конфігурації, і від її координат. Тож і модель для опису збурень доцільно формулювати в термінах саме цих параметрів стану.

Розглянемо тверде тіло $\mathbf{B}$, яке в конфігурації $\mathbf{V}$ перебуває у стані пружної рівноваги за фіксованої температури T. Деформований стан тіла визначатимемо стосовно деякої ненапруженої відлікової конфігурації $\mathbf{V_0}$. Нехай $\mathbf{R} \in \mathbf{V}_0$ — радіус-вектор, який задає положення (місця) матеріальних точок $\mathbf{X} \in \mathbf{B}$ у відліковій конфігурації. Деформація тіла $\mathbf{B}$ при переході з відлікової конфігурації $\mathbf{V_0}$ в актуальну $\mathbf{V}$ визначається деяким відображенням [7]

$$\vec{r} = \vec{\kappa}\left(\vec{R}\right), \quad \vec{R} \in \mathbf{V_0}, \tag{1}$$

де $\vec{r} \in \mathbf{V}$ — радіус-вектор місця матеріальної точки $\mathbf{X}$ в актуальній конфігурації.

Якщо обмежитися розглядом достатньо гладких полів деформації, то відображення (1) слід приймати взаємно-однозначним і неперервно-диференційованим. При цьому існує обернене взаємно-однозначне і неперервно-диференційоване відображення $\vec{\chi} = \vec{\kappa}^{-1}$: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}_0$, таке що

$$\vec{R} = \vec{\chi}(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \mathbf{V} . \tag{2}$$

На основі відображень (1) та (2) вводять локальні тензорні міри деформації як функції, визначені в областях $\mathbf{V_0}$ та $\mathbf{V}$.

Характеристиками локального деформованого стану, визначеними в просторі відлікової конфігурації, є міра деформації Коші-Гріна $\hat{G}$ та однойменний тензор деформації $\hat{C}$ [6]. Тензор $\hat{G}$ визначають через градієнт вектор-функції $\vec{\kappa}$ у просторі $\mathbf{V_0}$, а її компонентами в локальній базі супровідної системи координат відлікової конфігурації $\{\vec{e}_i^{\,0}\}$ є елементи базових матриць g_{ij}

$$\hat{G} = \hat{E} + 2\hat{C} = \vec{\nabla}_0 \vec{r} \cdot \vec{\nabla}_0 \vec{r}^{\,T} = \vec{e}_0^{\,i} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \vec{e}_0^{\,j} = g_{ij} \vec{e}_0^{\,i} \vec{e}_0^{\,j} . \tag{3}$$

Тут і надалі використовуємо правило сумування: за парою однакових індексів, один із яких — верхній, а інший — нижній; сумуємо, надаючи їм значення від 1 до 3. Індекс T вказує на операцію транспонування тензора.

Тензори $\hat{G}$ та $\hat{C}$ можна виразити через вектор переміщення $\vec{u} = \vec{r} - \vec{R}$, наприклад, для тензора деформації Коші-Гріна маємо [6]

$$\hat{C} = 1/2\left(\left(\vec{\nabla}_0\vec{u}\right)^T + \vec{\nabla}_0\vec{u} + \vec{\nabla}_0\vec{u}\cdot\left(\vec{\nabla}_0\vec{u}\right)^T\right). \tag{4}$$

Тензори деформації Альманзі $\hat{g}$ та Фінґера $\hat{F}$, натомість, є параметрами локального деформованого стану, що відповідають просторовому описові руху. Їх розглядають як функції радіус-векторів точок актуальної конфігурації $\vec{r} \in \mathbf{V}$ і визначають через градієнт вектор-функції $\vec{\chi}$ у просторі актуальної конфігурації, а їх компонентами в локальних базах супровідної системи координат актуальної конфігурації коваріантній $\{\vec{e}_i\}$ та контрваріантній $\{\vec{e}^{\,i}\}$ є базові (метричні) матриці $g^{\,0}_{ij}$ та g^{ij}_0 відповідно [6]

$$\hat{g} = \vec{\nabla}\vec{R}\cdot\vec{\nabla}\vec{R}^T = \vec{e}^{\,i}\vec{e}^{\,0}_{i}\cdot\vec{e}^{\,0}_{j}\vec{e}^{\,j} = g^{\,0}_{ij}\vec{e}^{\,i}\vec{e}^{\,j},$$

$$\hat{F} = \left(\vec{\nabla}\vec{R}\cdot\vec{\nabla}\vec{R}^T\right)^{-1} = \left(\vec{\nabla}_0\vec{r}\right)^T\cdot\vec{\nabla}_0\vec{r} = \vec{e}_i\vec{e}^{\,i}_0\cdot\vec{e}^{\,j}_0\vec{e}_j = g^{ij}_0\vec{e}_i\vec{e}_j. \tag{5}$$

У випадку руху тіла як абсолютно жорсткого міри деформації $\hat{g}$ та $\hat{F}$, як і $\hat{G}$, є одиничними тензорами другого рангу $\hat{E}$. Деколи замість мір деформації $\hat{g}$ та $\hat{F}$ зручно використовувати відповідні тензори деформації $\hat{\epsilon} = 1/2\left(\hat{E} - \hat{g}\right)$, $\hat{\varepsilon} = 1/2\left(\hat{F} - \hat{E}\right)$. Ці тензори, як і тензор деформації Коші-Гріна $\hat{C}$, є нульовими, якщо тіло рухається як абсолютно жорстке. Тензори деформації $\hat{\epsilon}$ та $\hat{\varepsilon}$ виражаються через вектор переміщення співвідношеннями

$$\hat{\epsilon} = 1/2\left(\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^T + \vec{\nabla}\vec{u} - \vec{\nabla}\vec{u}\cdot\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^T\right),\ \hat{\varepsilon} = 1/2\left(\left(\vec{\nabla}_0\vec{u}\right)^T + \vec{\nabla}_0\vec{u} + \left(\vec{\nabla}_0\vec{u}\right)^T\cdot\vec{\nabla}_0\vec{u}\right). \tag{6}$$

У формулах (3)-(6) використано позначення $\vec{\nabla}$ та $\vec{\nabla}_0$ для операторів градієнта в актуальній та відліковій конфігураціях

$$\vec{\nabla} = \left(\partial\ldots/\partial\vec{r}\right)^T = \vec{e}_i\,\partial\ldots/\partial\xi^i,\ \left(\xi^1,\xi^2,\xi^3\right)\in\theta,$$

$$\vec{\nabla}_0 = \left(\partial\ldots/\partial\vec{R}\right)^T = \vec{e}^{\,0}_i\,\partial\ldots/\partial\xi^i,\ \left(\xi^1,\xi^2,\xi^3\right)\in\theta_0, \tag{7}$$

Тут $\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3\right)$ — матеріальні координати.

Для опису деформації континууму в актуальній конфігурації надалі також використовуватимемо міру деформації Генкі $\hat{H}$, що пов'язана із мірою Фінґера співвідношенням [6]

$$\hat{H} = \ln\sqrt{\hat{F}}. \tag{8}$$

Напружений стан визначають тензором напружень Коші $\hat{\sigma}$, який вводять у актуальній конфігурації і задають контрваріантними компонентами σ^{ij} стосовно бази $\{\vec{e}_i\}$, означеної у цій конфігурації [6]

$$\hat{\sigma} = \sigma^{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j\,. \tag{9}$$

Компоненти σ^{ij} тензора напружень Коші мають прозорий фізичний зміст: це — компоненти вектора напружень, які діють на координатних площинках в актуальній конфігурації.

Окрім тензора напружень Коші використовують також енергетичний тензор напружень $\hat{T}$, який у базі супровідної системи координат відлікової конфігурації визначається у вигляді

$$\hat{T} = \sigma^{ij}\vec{e}_i^{\,0}\vec{e}_j^{\,0}\,, \tag{10}$$

та тензор напружень Піоли, який виражається через тензори $\hat{\sigma}$ та $\hat{T}$ співвідношеннями

$$\hat{P} = \sqrt{g/g_0}\,\hat{T}\cdot\vec{\nabla}_0\vec{r} = \sqrt{g/g_0}\left(\vec{\nabla}\vec{R}\right)^T\cdot\hat{\sigma}\,. \tag{11}$$

2. Термодинаміка деформування. Рівняння Гіббса

Згідно із першим законом термодинаміки [8], диференціал dU внутрішньої енергії U тіла **B** визначається як сума двох складових — припливу тепла δQ та роботи деформації $\delta A_{(e)}$

$$dU = \delta Q + \delta A_{(e)}\,. \tag{12}$$

Подаючи прирости δQ та $\delta A_{(e)}$ у цій формулі через відповідні термодинамічні параметри, отримаємо вираз для повного диференціалу внутрішньої енергії, на підставі якого можна встановити нелінійні співвідношення пружності.

Згідно з другим законом термодинаміки [8] для рівноважних процесів приріст δQ визначається як

$$\delta Q = TdS\,, \tag{13}$$

де S — ентропія системи.

Для конкретизації другого доданку у формулі (12) розглянемо вираз для віртуальної роботи внутрішніх поверхневих сил $\vec{t}$, які діють на замкнутій поверхні S, що обмежує область **V** деякого макроелемента тіла **B**. Використовуючи теорему Коші, згідно якої $\vec{t} = \vec{n}\cdot\hat{\sigma}$, де $\vec{n}$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до S, та теорему Остроградського-Гауса, за відсутності масових сил отримуємо [6]

$$\delta A_{(e)} = \iint_S \vec{t}\cdot\delta\vec{r}dS = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\hat{\sigma}\cdot\delta\vec{r}dV + \iiint_V \hat{\sigma}\cdot\cdot\left(\vec{\nabla}\delta\vec{r}\right)^T dV\,. \tag{14}$$

Беручи до уваги, що тіло перебуває у стані механічної рівноваги, маємо наступний вираз для віртуальної роботи

$$\delta A_{(e)} = \iiint\limits_{V} \hat{\sigma} \cdot\cdot \left(\vec{\nabla}\delta\vec{r}\right)^{T} dV . \tag{15}$$

Виходячи з означення мір деформації Альманзі та Фінґера, запишемо тензор $\left(\vec{\nabla}\delta\vec{r}\right)^{T}$ у формулі (15) у вигляді

$$\delta\hat{g} = \delta\left(\vec{\nabla}\vec{R} \cdot \left(\vec{\nabla}\vec{R}\right)^{T}\right) = -\left(\vec{\nabla}\delta\vec{r} \cdot \hat{g} + \hat{g} \cdot \left(\vec{\nabla}\delta\vec{r}\right)^{T}\right),$$

$$\delta\hat{F} = \delta\left(\left(\vec{\nabla}_0\vec{r}\right)^{T} \cdot \vec{\nabla}_0\vec{r}\right) = \left(\vec{\nabla}\delta\vec{r}\right)^{T} \cdot \hat{F} + \hat{F} \cdot \vec{\nabla}\delta\vec{r} .$$

Звідси випливають співвідношення

$$\left(\vec{\nabla}\delta\vec{r}\right)^{T} = -\hat{g}^{-1} \cdot \left(\delta\hat{g} + \vec{\nabla}\delta\vec{r} \cdot \hat{g}\right), \quad \left(\vec{\nabla}\delta\vec{r}\right)^{T} = \left(\delta\hat{F} - \hat{F} \cdot \vec{\nabla}\delta\vec{r}\right) \cdot \hat{F}^{-1} . \tag{16}$$

Із врахуванням останніх виразів та симетрії тензора напружень Коші ($\hat{\sigma}^{T} = \hat{\sigma}$), формулу (16) зводимо до вигляду

$$\delta A_{(e)} = \iiint\limits_{V} \left(-\hat{\sigma} \cdot \hat{g}^{-1} \cdot\cdot \delta\hat{g} - \hat{g} \cdot \hat{\sigma} \cdot \hat{g}^{-1} \cdot\cdot \vec{\nabla}\delta\vec{r}\right) dV$$

або

$$\delta A_{(e)} = \iiint\limits_{V} \left(\hat{F}^{-1} \cdot \hat{\sigma} \cdot\cdot \delta\hat{F} - \hat{F}^{-1} \cdot \hat{\sigma} \cdot \hat{F} \cdot\cdot \vec{\nabla}\delta\vec{r}\right) dV . \tag{17}$$

У випадку ізотропного тіла тензори $\hat{\sigma}$ та $\hat{g}$ або $\hat{\sigma}$ та $\hat{F}$ комутують [6], тому формули (17), із врахуванням співвідношень (15), запишуться наступним чином

$$\delta A_{(e)} = -1/2 \iiint\limits_{V} \hat{\sigma} \cdot\cdot \delta\hat{g} \cdot \hat{g}^{-1} dV \quad \text{або} \quad \delta A_{(e)} = 1/2 \iiint\limits_{V} \hat{\sigma} \cdot\cdot \hat{F}^{-1} \cdot \delta\hat{F}\, dV . \tag{18}$$

А для міри Генкі матимемо

$$\delta A_{(e)} = \iiint\limits_{V} \hat{\sigma} \cdot\cdot \delta\hat{H} dV . \tag{19}$$

Переходячи у формулі (12) до густин внутрішньої енергії u та ентропії s, віднесених до одиниці об'єму актуальної конфігурації, та беручи до уваги співвідношення (18), (19), отримаємо три варіанти рівнянь Гіббса для деформованого тіла, в яких використані параметри локального напружено-деформованого стану, визначені в актуальній конфігурації

$$du = Tds + \hat{\sigma} \cdot\cdot d\hat{H} , \; du = Tds - \frac{1}{2}\hat{\sigma} \cdot\cdot d\hat{g} \cdot \hat{g}^{-1} , \; du = Tds + \frac{1}{2}\hat{\sigma} \cdot\cdot \hat{F}^{-1} \cdot d\hat{F} . \tag{20}$$

Ці рівняння визначають повний диференціал густини внутрішньої енергії, як функції незалежних змінних $\left(s, \hat{g}\right)$, $\left(s, \hat{F}\right)$ та $\left(s, \hat{H}\right)$ відповідно. Якщо функції

$u(s,\hat{g})$, $u(s,\hat{F})$ та $u(s,\hat{H})$ відомі, то на підставі (20) можна визначити температуру T і тензор напружень Коші $\hat{\sigma}$, оскільки ці функції є термодинамічними потенціалами. Наприклад, для термодинамічного потенціалу $u(s,\hat{H})$, використовуючи означення похідної скалярної функції за тензорним аргументом, отримуємо

$$T = (\partial u/\partial s)\big|_{\hat{H}}, \quad \hat{\sigma} = \left(\partial u/\partial \hat{H}\right)\Big|_{s}. \tag{21}$$

Вводячи густину вільної енергії f (f — термодинамічний потенціал, який пов'язаний із густиною внутрішньої енергії перетворенням Лежандра $f = u - Ts$), отримуємо наступні рівняння Гіббса

$$df = -sdT + \hat{\sigma}\cdot\cdot d\hat{H}, \; df = -sdT - \frac{1}{2}\hat{\sigma}\cdot\cdot d\hat{g}\cdot\hat{g}^{-1}, \; df = -sdT + \frac{1}{2}\hat{\sigma}\cdot\cdot\hat{F}^{-1}\cdot d\hat{F}. \tag{22}$$

У цих термодинамічних потенціалах незалежними змінними є $(T,\hat{g})$, $(T,\hat{F})$ та $(T,\hat{H})$ відповідно.

Для ізотермічних процесів приріст вільної енергії визначається лише роботою деформації. Тож f із точністю до адитивної константи співпадає з густиною пружного потенціалу Φ. З огляду на це, з формул (22) випливають співвідношення

$$\hat{\sigma} = \partial\Phi/\partial\hat{H}, \; \hat{\sigma} = -2\,\partial\Phi/\partial\hat{g}\cdot\hat{g}, \; \hat{\sigma} = 2\hat{F}\cdot\partial\Phi/\partial\hat{F}, \tag{23}$$

які далі використаємо для отримання нелінійних співвідношень пружності.

Переходячи у формулі (15) до інтегрування в області відлікової конфігурації $\mathbf{V_0}$, можна вираз для роботи подати двояко

$$\delta A_{(e)} = \iiint\limits_{V_0} \hat{P}\cdot\cdot\delta\left(\vec{\nabla}_0\vec{r}\right)^T dV_0 = \iiint\limits_{V_0} \sqrt{g/g_0}\,\hat{T}\cdot\cdot\vec{\nabla}_0\vec{r}\cdot\delta\left(\vec{\nabla}_0\vec{r}\right)^T dV_0. \tag{24}$$

Звідси, використовуючи означення міри та тензора деформації Коші-Гріна (3), (4), отримаємо подання для елементарної роботи деформації, записані в параметрах відлікової конфігурації

$$\delta A_{(e)} = \frac{1}{2}\iiint\limits_{V_0} \sqrt{g/g_0}\,\hat{T}\cdot\cdot\delta\hat{G}dV_0 = \iiint\limits_{V_0} \sqrt{g/g_0}\,\hat{T}\cdot\cdot\delta\hat{C}dV_0. \tag{25}$$

Виражаючи у цих формулах градієнти вектора місця у відліковій конфігурації через міру та тензор деформації Коші-Гріна, прийдемо до наступних рівнянь Гіббса, записаних щодо густини внутрішньої енергії u_0,

$$du_0 = Tds_0 + \frac{1}{2}\sqrt{g/g_0}\,\hat{T}\cdot\cdot d\hat{G}, \tag{26}$$

а також густини вільної енергії f_0

$$df_0 = -s_0 dT + \frac{1}{2}\sqrt{g/g_0}\,\hat{T}\cdot\cdot d\hat{G}, \tag{27}$$

обчислених на одиницю об'єму відлікової конфігурації. Нелінійні співвідношення пружності в термінах відлікової конфігурації аналогічно (23) будуть такими

$$\hat{T} = \sqrt{g_0/g}\,\partial\Phi_0\big/\partial\hat{C} = 2\sqrt{g_0/g}\,\partial\Phi_0\big/\partial\hat{G}\,. \tag{28}$$

Тут Φ_0 — густина потенціальної енергії деформації віднесена до одиниці об'єму відлікової конфігурації $\mathbf{V}_0$.

3. Нелінійні співвідношення пружності для ізотропного тіла: зв'язок тензора напружень Коші з мірами деформації Альманзі та Фінґера

Для ізотропного матеріалу скалярну функцію тензорного аргументу можна задати як функцію інваріантів цього тензора [6]. Тому, відповідно до подання (24), розглядатимемо густину потенціальної енергії Φ як функцію інваріантів мір деформації Альманзі або Фінґера

$$\Phi = \Phi\left(g_1, g_2, g_3\right),\quad \Phi = \Phi\left(F_1, F_2, F_3\right),$$

де g_1, g_2, g_3 — головні інваріанти міри деформації Альманзі, F_1, F_2, F_3 — головні інваріанти міри деформації Фінґера.

Використовуючи теорему Гамільтона-Келлі, з (23) отримаємо загальний вигляд для нелінійних співвідношень пружності, які виражають тензор напружень Коші $\hat{\sigma}$ через міри деформації Альманзі та Фінґера

$$\hat{\sigma} = 2\left(a_0'\hat{E} + a_1'\hat{g} + a_2'\hat{g}^2\right) \quad \text{та} \quad \hat{\sigma} = 2\left(a_0\hat{E} + a_1\hat{F} + a_2\hat{F}^2\right). \tag{29}$$

Скалярні коефіцієнти a_i' та a_i у формулі є функціями головних інваріантів мір деформації Альманзі та Фінґера і подаються через пружний потенціал наступним чином

$$a_0' = -g_3\partial\Phi/\partial g_3,\ a_1' = -\left(\partial\Phi/\partial g_1 + g_1\,\partial\Phi/\partial g_2\right),\ a_2' = \partial\Phi/\partial g_2\,,$$
$$a_0 = F_3\,\partial\Phi/\partial F_3\,,\ a_1 = \partial\Phi/\partial F_1 + F_1\,\partial\Phi/\partial F_2\,,\ a_2 = -\partial\Phi/\partial F_2\,. \tag{30}$$

У разі використання міри деформації Генкі нелінійні співвідношення пружності для ізотропного тіла є такими

$$\hat{\sigma} = b_0\hat{E} + b_1\hat{H} + b_2\hat{H}^2\,, \tag{31}$$

де $b_0 = \partial\Phi/\partial H_1 + H_1\,\partial\Phi/\partial H_2 + H_2\,\partial\Phi/\partial H_3$, $b_1 = -\left(\partial\Phi/\partial H_2 + H_1\,\partial\Phi/\partial H_3\right)$, $b_2 = \partial\Phi/\partial H_3$; H_1, H_2, H_3 — головні інваріанти тензора $\hat{H}$.

Отримані нелінійні рівняння стану (29) та (31) пов'язують тензор напружень Коші і міри деформації Альманзі, Фінґера та Генкі.

Конкретна аналітична структура співвідношень пружності (29) та (31) визначається функціональними залежностями пружної енергії Φ від інваріантів мір деформації $\hat{g}$ та $\hat{F}$. Зокрема, виберемо потенціал пружності у формі Сіньоріні $\Phi(\hat{g})$, яка є функцією від головних інваріантів міри деформації Альманзі g_1, g_2, g_3 [6]

$$\Phi = \left(m_1\left(g_2+1\right)+m_2\left(g_1^{\,2}+3\right)+m_3\left(g_1-1\right)\right)\Big/\sqrt{g_3}\,, \tag{32}$$

де $m_1 = c/4$, $m_2 = \left(\lambda+\mu-c/2\right)/8$, $m_3 = -\left(3\lambda+\mu-c/2\right)/4$, λ, μ — сталі Ляме, c — пружна стала третього порядку.

На основі формул (29) та (32) отримаємо співвідношення пружності у вигляді

$$\hat{\sigma} = 1/2\sqrt{g_3}\left\{c\hat{g}^2 - \left[\left(\lambda+\mu+c/2\right)g_1 - \left(3\lambda+\mu-c/2\right)\right]\hat{g} + \right.$$

$$\left. +\left[c/2\left(g_2+1\right)+\left[2\left(\lambda+\mu\right)-c\right]/8\left(g_1^{\,2}+3\right)-\left[2\left(3\lambda+\mu\right)-c\right]/8\left(g_1-1\right)\right]\hat{E}\right\},$$

$$\hat{\sigma} = \left[\lambda\epsilon_1 + c\epsilon_2 + \left(3\lambda+\mu-c/2\right)\epsilon_1^{\,2}\right]\hat{E} + 2\left[\mu-\left(\lambda+c/2\right)\epsilon_1\right]\hat{\epsilon} + 2c\hat{\epsilon}^2, \tag{33}$$

де $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ — головні інваріанти тензора деформації Альманзі, що пов'язані з інваріантами відповідної міри співвідношеннями

$$g_1 = 3-2\epsilon_1,\ g_2 = 3-4\epsilon_1+4\epsilon_2,\ g_3 = 1-2\epsilon_1+4\epsilon_2-8\epsilon_3\,.$$

Використовуючи подання Мурнагана, розглядатимемо питому потенціальну енергію деформації $\Phi(\hat{\varepsilon})$ ізотропного тіла, розраховану на одиницю його об'єму в актуальній конфігурації, як функцію від інваріантів міри деформації Фінґера

$$\Phi(\hat{F}) = \frac{1}{4}\left\langle\left\{-3\lambda-2\mu+\left[9\left(a+b\right)+c\right]/2\right\}F_1 + \left(\lambda+2\mu-3a-5b-c\right)/2\,F_1^2 + \right.$$

$$\left. +\left(-2\mu+3b+c\right)F_2 - \left(b+c/2\right)F_1F_2 + \left(a+3b+c\right)/6\,F_1^3 + c/2\left(F_3-1\right)\right\rangle. \tag{34}$$

Враховуючи формули зв'язку між головними інваріантами міри F_1, F_2, F_3 та тензора деформації Фінґера $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$,

$$F_1 = 3+2\varepsilon_1,\ F_2 = 3+4\varepsilon_1+4\varepsilon_2,\ F_3 = 1+2\varepsilon_1+4\varepsilon_2+8\varepsilon_3\,,$$

вираз (34) перепишемо у вигляді кубічного полінома за степенями компонент тензора деформації Фінґера з постійними коефіцієнтами

$$\Phi(\hat{\varepsilon}) = \lambda/2\,\varepsilon_1^{\,2} - 2\mu\varepsilon_2 + \left(a+3b+c\right)/3\,\varepsilon_1^{\,3} - \left(2b+c\right)\varepsilon_1\varepsilon_2 + c\varepsilon_3$$

або

$$\Phi(\hat{\varepsilon}) = \lambda/2\,A_1^{\,2} + \mu A_2 + a/3\,A_1^{\,3} + bA_1A_2 + c/3\,A_3\,. \tag{35}$$

Тут a, b, c — пружні сталі третього порядку, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — головні інваріанти тензора деформації Фінґера, $A_1 = \varepsilon_1$, $A_2 = I_1(\hat{\varepsilon}^2) = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}$, $A_3 = I_1(\hat{\varepsilon}^3) = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki}$ — алгебричні інваріанти тензора деформації Фінґера.

Використовуючи подання енергії деформації функцією (35), запишемо співвідношення пружності згідно другої формули з (29). Для цього визначимо коефіцієнти a_0, a_1, a_2. У результаті отримаємо

$$a_1 = \left[-6\lambda - 4\mu + 9(a+b) + c + 2(\lambda - 3a - 2b)F_1 + (a+b)F_1^2 - (2b - cF_2)\right]/8,$$
$$a_0 = c/8F_3, \quad a_2 = \left(2\mu - 3b - c + (b + c/2)F_1\right)/4. \tag{36}$$

Таким чином, для тензора напружень маємо наступне подання

$$\hat{\sigma} = c/4F_3\hat{E} + \left[2\mu - 3b - c + (b + c/2)F_1\right]\hat{F}^2 + 1/2\left[-3\lambda - 2\mu + 9(a+b)/2 + \right.$$
$$\left. + c/2 + (\lambda - 3a - 2b)F_1 + (a+b)/2F_1^2 - (b - c/2)F_2\right]\hat{F}.$$

Або, переходячи до тензора деформації,

$$\hat{\sigma} = \left[4\mu + c + 2(2b + c)\varepsilon_1\right]\hat{\varepsilon}^2 + 2\left[\mu + (\lambda + b)\varepsilon_1 + (a+b)\varepsilon_1^2 - (2b + c)\varepsilon_2\right]\hat{\varepsilon} +$$
$$+\left[\lambda\varepsilon_1 + (a+b)\varepsilon_1^2 - 2b\varepsilon_2 + 2c\varepsilon_3\right]\hat{E}. \tag{37}$$

Замінюючи у співвідношеннях (37) головні інваріанти $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ алгебричними A_1, A_2, A_3, отримаємо

$$\hat{\sigma} = \left[\lambda A_1\hat{E} + 2\mu\hat{\varepsilon} + (aA_1^2 + bA_2)\hat{E} + 2bA_1\hat{\varepsilon}\right]\cdot(\hat{E} + 2\hat{\varepsilon}) +$$
$$+c\left[\hat{\varepsilon}^2 + 2A_1\hat{\varepsilon}^2 - (A_1^2 - A_2)\hat{\varepsilon} + 1/3(A_1^3 - 3A_1A_2 + 2A_3)\hat{E}\right]. \tag{38}$$

Вважаючи початкові деформації достатньо малими, знехтуємо у попередній формулі доданками, що містять степені $\hat{\varepsilon}$, вищі другого. У підсумку матимемо

$$\hat{\sigma} = (\lambda A_1\hat{E} + 2\mu\hat{\varepsilon})\cdot(\hat{E} + 2\hat{\varepsilon}) + (aA_1^2 + bA_2)\hat{E} + 2bA_1\hat{\varepsilon} + c\hat{\varepsilon}^2. \tag{39}$$

Таким чином, формули (33), (39) є квадратичними співвідношеннями пружності, які в актуальній конфігурації пов'язують тензор напружень Коші з тензорами деформації Альманзі та Фінґера відповідно.

4. Співвідношення пружності для малих пружних збурень

Нехай на початковий напружено-деформований стан накладається мале пружне збурення, зумовлене, наприклад, акустичною хвилею. Тоді поряд із відліковою $\mathbf{V}_0$ та актуальною (незбуреною) $\mathbf{V}$ конфігураціями тіла розглядатимемо збурену $\tilde{\mathbf{V}}$, яка відповідає його станові у довільний момент часу t після збурення. Радіус-вектори $\vec{R}$, $\vec{r}$ та $\vec{\tilde{r}}$ визначають положення у просторі довільної матеріальної точки $\mathbf{X}$ у цих конфігураціях. При відліковому та просторовому описах закони руху для збуреної конфігурації задаються відображеннями

$$\vec{\tilde{r}} = \vec{\tilde{\kappa}}_0(\vec{R}, t), \text{ та } \vec{R} = \vec{\tilde{\chi}}_0\left(\vec{\tilde{r}}, t\right). \tag{40}$$

Використовуючи опис початкового деформованого стану у формі (2), приходимо до закону руху для збуреного стану у вигляді

$$\vec{\tilde{r}} = \vec{\tilde{\kappa}}(\vec{r}, t), \text{ де } \vec{\tilde{\kappa}} = \vec{\tilde{\kappa}}_0 \circ \chi . \tag{41}$$

Відображення (41) визначає деформацію у збуреній конфігурації стосовно актуальної. Таке подання закону руху для збуреної конфігурації називатимемо відносним описом руху [6].

Міри деформації Альманзі $\hat{\tilde{g}}$ та Фінґера $\hat{\tilde{F}}$ для збуреної конфігурації визначаються, згідно формул (5), так

$$\hat{\tilde{g}} = \vec{\tilde{\nabla}}\vec{R} \cdot \left(\vec{\tilde{\nabla}}\vec{R}\right)^T = \vec{\tilde{e}}^i \vec{e}\,{}^0_i \cdot \vec{e}\,{}^0_j \vec{\tilde{e}}^j = g\,{}^0_{ij} \vec{\tilde{e}}^i \vec{\tilde{e}}^j ,$$

$$\hat{\tilde{F}} = \left(\vec{\tilde{\nabla}}\vec{R} \cdot \left(\vec{\tilde{\nabla}}\vec{R}\right)^T\right)^{-1} = \left(\vec{\nabla}_0 \vec{\tilde{r}}\right)^T \cdot \vec{\nabla}_0 \vec{\tilde{r}} = \vec{\tilde{e}}_i \vec{e}\,{}^i_0 \cdot \vec{e}\,{}^j_0 \vec{\tilde{e}}_j = g^{ij}_0 \vec{\tilde{e}}_i \vec{\tilde{e}}_j . \tag{42}$$

Тут $\vec{\tilde{e}}_i$ та $\vec{\tilde{\nabla}}$ — вектори локальної бази супровідної системи координат у збуреній конфігурації та оператор градієнта у цій конфігурації.

Ці міри задають деформацію континууму у збуреній конфігурації стосовно відлікової.

Базуючись на відносному способі опису руху (41), введемо тензорні міри $\hat{\tilde{p}}$ і $\hat{\tilde{Q}}$, аналогічні мірам Альманзі і Фінґера, які визначають деформацію континууму у конфігурації $\tilde{\mathbf{V}}$ щодо незбуреної конфігурації $\mathbf{V}$ [9]

$$\hat{\tilde{p}} = \vec{\tilde{\nabla}}\vec{r} \cdot \left(\vec{\tilde{\nabla}}\vec{r}\right)^T = \vec{\tilde{e}}^i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \vec{\tilde{e}}^j = g_{ij} \vec{\tilde{e}}^i \vec{\tilde{e}}^j ,$$

$$\hat{\tilde{Q}} = \left(\vec{\tilde{\nabla}}\vec{r} \cdot \left(\vec{\tilde{\nabla}}\vec{r}\right)^T\right)^{-1} = \left(\vec{\nabla}\vec{\tilde{r}}\right)^T \cdot \vec{\nabla}\vec{\tilde{r}} = \vec{\tilde{e}}_i \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j \vec{\tilde{e}}_j = g^{ij} \vec{\tilde{e}}_i \vec{\tilde{e}}_j . \tag{43}$$

Введемо вектори переміщення $\vec{\tilde{u}}$ із відлікової та $\vec{w}$ із актуальної конфігурацій у збурену $\vec{\tilde{u}} = \vec{\tilde{r}} - \vec{R}$, $\vec{w} = \vec{\tilde{r}} - \vec{r}$.

Із використанням співвідношень, які пов’язують локальні бази у збуреній і актуальній конфігураціях, отримаємо

$$\hat{\tilde{g}} = \vec{\tilde{\nabla}}\vec{R} \cdot \vec{\tilde{\nabla}}\vec{R}^T = \hat{g} - \vec{\nabla}\vec{w} \cdot \hat{g} - \hat{g} \cdot \left(\vec{\nabla}\vec{w}\right)^T + \vec{\nabla}\vec{w} \cdot \hat{g} \cdot \left(\vec{\nabla}\vec{w}\right)^T , \tag{44}$$

$$\hat{\tilde{F}} = \left(\vec{\tilde{\nabla}}\vec{R} \cdot \left(\vec{\tilde{\nabla}}\vec{R}\right)^T\right)^{-1} = \hat{F} + \hat{F} \cdot \vec{\nabla}\vec{w} + \left(\vec{\nabla}\vec{w}\right)^T \cdot \hat{F} + \left(\vec{\nabla}\vec{w}\right)^T \cdot \hat{F} \cdot \vec{\nabla}\vec{w}, \tag{45}$$

$$\hat{\tilde{p}} = \vec{\tilde{\nabla}}\vec{r} \cdot \left(\tilde{\nabla}\vec{r}\right)^T = \left(\hat{E} - \vec{\nabla}\vec{w}\right) \cdot \left(\hat{E} - \left(\vec{\nabla}\vec{w}\right)^T\right) = \hat{E} - 2\vec{e}\left(\vec{w}\right) + \vec{\nabla}\vec{w} \cdot \left(\vec{\nabla}\vec{w}\right)^T ,$$

$$\hat{\tilde{Q}} = \left(\tilde{\vec{\nabla}}\vec{r} \cdot \tilde{\vec{\nabla}}\vec{r}^{T}\right)^{-1} = \left(\vec{\nabla}\left(\vec{r}+\vec{w}\right)\right)^{T} \cdot \vec{\nabla}\left(\vec{r}+\vec{w}\right) = \hat{E} + 2\vec{e}\left(\vec{w}\right) + \left(\vec{\nabla}\vec{w}\right)^{T} \cdot \vec{\nabla}\vec{w}, \tag{46}$$

де $\hat{e}\left(\vec{w}\right) = 1/2\left(\vec{\nabla}\vec{w} + \left(\vec{\nabla}\vec{w}\right)^{T}\right)$ — лінійний тензор деформації збурення.

У збуреній конфігурації напруження задаються тензором напружень Коші $\hat{\tilde{\sigma}}$, який пов’язаний з мірами деформації $\hat{\tilde{g}}$ та $\hat{\tilde{F}}$ співвідношеннями, аналогічними (29), а саме

$$\hat{\tilde{\sigma}} = 2\left(\tilde{a}_0'\hat{E} + \tilde{a}_1'\hat{\tilde{g}} + \tilde{a}_2'\hat{\tilde{g}}^{2}\right), \qquad \hat{\tilde{\sigma}} = 2\left(\tilde{a}_0\hat{E} + \tilde{a}_1\hat{\tilde{F}} + \tilde{a}_2\hat{\tilde{F}}^{2}\right) \tag{47}$$

Формули (44)-(47) дають змогу виразити тензор напружень Коші в конфігурації $\tilde{\mathbf{V}}$ через градієнт вектора переміщень $\vec{w}$ у конфігурації $\mathbf{V}$. Встановимо цей зв'язок, беручи до уваги малість деформацій збурення. З цією метою у співвідношеннях (44), (45) утримаємо лише лінійні стосовно градієнтів вектора переміщення доданки. У цьому наближенні інваріанти мір деформації $\hat{\tilde{g}}$ та $\hat{\tilde{F}}$ подаються через інваріанти тензорів $\hat{g}$ та $\hat{F}$ наступним чином

$$\tilde{g}_1 - g_1 = -2\hat{g}\cdot\cdot\hat{e}\left(\vec{w}\right),\ \tilde{g}_2 - g_2 = -2\left(g_1\hat{g} - \hat{g}^{2}\right)\cdot\cdot\hat{e}\left(\vec{w}\right),\ \tilde{g}_3 - g_3 = -2g_3\hat{E}\cdot\cdot\hat{e}\left(\vec{w}\right),$$

$$\tilde{F}_1 - F_1 = 2\hat{F}\cdot\cdot\hat{e}\left(\vec{w}\right),\ \tilde{F}_2 - F_2 = 2\left(F_1\hat{F} - \hat{F}^{2}\right)\cdot\cdot\hat{e}\left(\vec{w}\right),\ \tilde{F}_3 - F_3 = 2F_3\hat{E}\cdot\cdot\hat{e}\left(\vec{w}\right). \tag{48}$$

Коефіцієнти $\tilde{a}_i'$ та $\tilde{a}_i$ у формулах (47) визначаються як функції потенціалів пружності $\tilde{\Phi}' = \Phi'\left(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3\right)$ або $\tilde{\Phi} = \Phi\left(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3\right)$ за формулами, аналогічними (30)

$$\tilde{a}_0' = -\tilde{g}_3\,\partial\tilde{\Phi}'/\partial\tilde{g}_3,\ \tilde{a}_1' = -\left(\partial\tilde{\Phi}'/\partial\tilde{g}_1 + \tilde{g}_1\,\partial\tilde{\Phi}'/\partial\tilde{g}_2\right),\ \tilde{a}_2' = \partial\tilde{\Phi}'/\partial\tilde{g}_2,$$

$$\tilde{a}_0 = \tilde{F}_3\,\partial\tilde{\Phi}/\partial\tilde{F}_3,\ \tilde{a}_1 = \partial\tilde{\Phi}/\partial\tilde{F}_1 + \tilde{F}_1\,\partial\tilde{\Phi}/\partial\tilde{F}_2,\ \tilde{a}_2 = -\partial\tilde{\Phi}/\partial\tilde{F}_2, \tag{49}$$

де $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3$ — головні інваріанти міри деформації $\hat{\tilde{g}}$; $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3$ — головні інваріанти міри деформації $\hat{\tilde{F}}$.

У лінійному наближенні зв’язок між функціями $\tilde{\Phi}'$ або $\tilde{\Phi}$ та відповідними їх функціями Φ' або Φ є таким

$$\tilde{\Phi}' = \tilde{\Phi}'\left(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3\right) = \tilde{\Phi}'\left(g_1, g_2, g_3\right) + \partial\tilde{\Phi}'/\partial\tilde{g}_i\Big|_{\tilde{g}_i = g_i}\left(\tilde{g}_i - g_i\right),$$

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}\left(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3\right) = \tilde{\Phi}\left(F_1, F_2, F_3\right) + \partial\tilde{\Phi}/\partial\tilde{F}_i\Big|_{\tilde{F}_i = F_i}\left(\tilde{F}_i - F_i\right).$$

Для $\tilde{a}_i$ та $\tilde{a}_i'$ отримаємо у лінійному щодо $\vec{\nabla}\vec{w}$ наближенні

$$\tilde{a}_i = a_i + \partial\tilde{a}_i/\partial\tilde{F}_j\Big|_{\tilde{F}_j = F_j}\left(\tilde{F}_j - F_j\right),\ \ \tilde{a}_i' = a_i' + \partial\tilde{a}_i'/\partial\tilde{g}_j\Big|_{\tilde{g}_j = g_j}\left(\tilde{g}_j - g_j\right). \tag{50}$$

Тоді, із врахуванням формул (49), для коефіцієнтів $\tilde{a}_i$ та $\tilde{a}'_i$ запишемо

$$\tilde{a}_i = a_i + \partial a_i / \partial F_1 \left(\tilde{F}_1 - F_1 \right) + \partial a_i / \partial F_2 \left(\tilde{F}_2 - F_2 \right) + \partial a_i / \partial F_3 \left(\tilde{F}_3 - F_3 \right) =$$
$$= a_i + 2 \left[a_0 \left(a_i \right) \hat{E} + a_1 \left(a_i \right) \hat{F} + a_2 \left(a_i \right) \hat{F}^2 \right] \cdot\cdot \hat{e}\left(\vec{w} \right) = a_i + 2 \sum_{j=1}^{2} a_j (a_i) \hat{F}^j \cdot\cdot \hat{e}\left(\vec{w} \right),$$
$$\tilde{a}'_i = a'_i + 2 \left[a'_0 (a'_i) \hat{E} + a'_1 (a'_i) \hat{g} + a'_2 (a'_i) \hat{g}^2 \right] \cdot\cdot e\left(w \right) = a'_i + 2 \sum_{j=1}^{2} a'_j (a'_i) g^j \cdot\cdot \hat{e}\left(\vec{w} \right).$$

У результаті матимемо наступні лінеаризовані співвідношення пружності, які в термінах актуальної конфігурації пов'язують тензор напружень Коші з мірами деформації Альманзі чи Фінґера відповідно

$$\hat{\hat{\sigma}} = \hat{\sigma} + \hat{s}_\eta, \quad \eta \in \{ g, F \} . \tag{51}$$

Тут тензори напружень для збурень $\hat{s}_\eta$, $\eta \in \{ g, F \}$ визначаються нелінійними співвідношеннями пружності у вигляді

$$\hat{s}_g = -\hat{\sigma} \vec{\nabla} \cdot \vec{w} + \hat{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \vec{w} + \vec{\nabla} \vec{w}^T \cdot \hat{\sigma} +$$
$$+ 4 \left[- a'_0 \hat{e}(\vec{w}) + a'_2 \hat{g} \cdot \hat{e}(\vec{w}) \cdot \hat{g} + \sum_{i,j=1}^{2} a'_{ij} \hat{g}^i \hat{g}^j \cdot\cdot \hat{e}(\vec{w}) \right],$$
$$\hat{s}_F = -\hat{\sigma} \vec{\nabla} \cdot \vec{w} + \hat{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \vec{w} + \vec{\nabla} \vec{w}^T \cdot \hat{\sigma} +$$
$$+ 4 \left[-a_0 \hat{e}\left(\vec{w} \right) + a_2 \hat{F} \cdot \hat{e}\left(\vec{w} \right) \cdot \hat{F} + \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \hat{F}^i \hat{F}^j \cdot\cdot \hat{e}\left(\vec{w} \right) \right]. \tag{52}$$

Запишемо співвідношення пружності для збурень у випадку тіла Сіньоріні. У першій формулі (52) від міри деформації Альманзі перейдемо до відповідних тензорів, а початкові напруження $\hat{\sigma}$ замінимо поданнями у вигляді першої формули (29). У результаті отримаємо

$$\hat{s}_g = 4 \left[\sum_{i,j=1}^{2} a'_{ij} \hat{g}^i \hat{g}^j \cdot\cdot \hat{e} + \left(a'_1 + 2 a'_2 \right) \left(\hat{e} - \hat{\epsilon} \cdot \vec{\nabla} \vec{w} - \vec{\nabla} \vec{w}^T \cdot \hat{\epsilon} \right) \right] +$$
$$+ 8 a'_2 \left(-\hat{\epsilon} \cdot \hat{e} - \hat{e} \cdot \hat{\epsilon} + \hat{\epsilon}^2 \cdot \vec{\nabla} \vec{w} + \vec{\nabla} \vec{w}^T \cdot \hat{\epsilon}^2 + \hat{\epsilon} \cdot \hat{e} \cdot \hat{\epsilon} \right). \tag{53}$$

Для потенціалу Сіньоріні ненульові коефіцієнти $\tilde{a}'_i$ матимуть наступний вигляд

$$a'_{00} = \left(2 g_2 + \left(\lambda + \mu - c/2 \right) g_1^2 - 2 \left(3\lambda + \mu - c/2 \right) g_1 + \left(9\lambda + 5\mu - c/2 \right) \right) \Big/ 16 \sqrt{g_3} ,$$
$$a'_{01} = a'_{10} = \left(\left(\lambda + \mu + c/2 \right) g_1 - 3\lambda - \mu + c/2 \right) \Big/ 8 \sqrt{g_3} ,$$
$$a'_{02} = a'_{20} = c \big/ 8 \sqrt{g_3} , \ a'_{11} = \left(2 \left(\lambda + \mu \right) + c \right) \Big/ 8 \sqrt{g_3} . \tag{54}$$

Із врахуванням (54) співвідношення (53) перепишуться як

$$\hat{s}_g = 4(a_1' + 2a_2')\left(\hat{e} - \hat{\epsilon}\cdot\vec{\nabla}\vec{w} - \vec{\nabla}\vec{w}^T\cdot\hat{\epsilon}\right) + 4a_{02}'\left(I_1(\hat{e}\cdot\hat{\epsilon}^2))\hat{E} + I_1(\hat{e}))\cdot\hat{\epsilon}^2\right) +$$
$$+4a_{11}'I_1(\hat{e}\cdot\hat{\epsilon})\hat{\epsilon} + 8a_2'\left(-\hat{\epsilon}\cdot\hat{e} - \hat{e}\cdot\hat{\epsilon} + \hat{\epsilon}^2\cdot\vec{\nabla}\vec{w} + \vec{\nabla}\vec{w}^T\cdot\hat{\epsilon}^2 + \hat{\epsilon}\cdot\hat{e}\cdot\hat{\epsilon}\right) +$$
$$+4a_{11}'I_1(\hat{e}\cdot\hat{\epsilon})\hat{\epsilon} + 4\left(a_{00}' + a_{11}' + 2\left(a_{01}' + a_{02}'\right)\right)I_1(\hat{e})\hat{E} -$$
$$-8\left(a_{01}' + a_{11}' + 2a_{02}'\right)\left(I_1(\hat{e}\cdot\hat{\epsilon})\hat{E} + I_1(\hat{e})\hat{\epsilon}\right), \tag{55}$$

де $I_1(\hat{e}),\ I_1(\hat{\epsilon}\cdot\hat{e}),\ I_1(\hat{\epsilon}^2\cdot\hat{e})$ — перші інваріанти відповідних тензорів.

Запишемо співвідношення пружності для збурень у випадку матеріалу Мурнагана. У другій формулі (52) від міри деформації Фінгера перейдемо до відповідних тензорів, а початкові напруження $\hat{\sigma}$ виразимо згідно другої формули із (29). Тоді

$$\hat{s}_F = 4\left(a_{ij}\hat{F}^i\hat{F}^j\cdot\cdot\hat{e} + (a_1 + 2a_2)(\hat{e} + \hat{\varepsilon}\cdot\vec{\nabla}\vec{w} + \vec{\nabla}\vec{w}^T\cdot\hat{\varepsilon})\right) +$$
$$+8a_2(2\hat{\varepsilon}\cdot\hat{e}\cdot\hat{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}\cdot\hat{e} + \hat{e}\cdot\hat{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}^2\cdot\vec{\nabla}\vec{w} + \vec{\nabla}\vec{w}^T\cdot\hat{\varepsilon}^2). \tag{56}$$

Для потенціалу Мурнагана ненульові коефіцієнти a_{ij} матимуть вигляд

$$a_{00} = c/8F_3 = c/8\left(1 + 2\varepsilon_1 + 2(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2) + 4\varepsilon_2 + 8\varepsilon_3\right),\ a_{12} = a_{21} = (b + 2c)/8,$$
$$a_{11} = \left(\lambda - 3a - 2b + (a - c/2)F_1\right)/4 = \left(\lambda - 3a - 2b + (a - c/2)\varepsilon_1\right)/4\ . \tag{57}$$

Із врахуванням ненульових коефіцієнтів (57) співвідношення (56) перепишуться наступним чином

$$\hat{s}_F = 4(a_1 + 2a_2)\left(\hat{e} + \hat{\varepsilon}\cdot\vec{\nabla}\vec{w} + \vec{\nabla}\vec{w}^T\cdot\hat{\varepsilon}\right) + 16a_{12}I_1(\hat{e}\cdot\hat{\varepsilon}^2)\left(\hat{E} + 2\hat{\varepsilon}\right) +$$
$$+8a_2\left(\hat{\varepsilon}\cdot\hat{e} + \hat{e}\cdot\hat{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}^2\cdot\vec{\nabla}\vec{w} + \vec{\nabla}\vec{w}^T\cdot\hat{\varepsilon}^2 + \hat{\varepsilon}\cdot\hat{e}\cdot\hat{\varepsilon}\right) +$$
$$+4\left[\left(a_{00} + a_{11} + 2a_{12}\right)\hat{E} + 2\left(a_{11} + 3a_{12}\right)\hat{\varepsilon} + 4a_{12}\hat{\varepsilon}^2\right]I_1(\hat{e}) +$$
$$+8\left[\left(a_{11} + 3a_{12}\right)\hat{E} + 2\left(a_{11} + 4a_{12}\right)\hat{\varepsilon} + 4a_{12}\hat{\varepsilon}^2\right]I_1(\hat{e}\cdot\hat{\varepsilon})\ , \tag{58}$$

де $I_1(\hat{e}),\ I_1(\hat{\varepsilon}\cdot\hat{e}), I_1(\hat{\varepsilon}^2\cdot\hat{e})$ — перші інваріанти відповідних тензорів.

Підставляючи у формулу (58) значення коефіцієнтів із (41) та (56) і нехтуючи доданками, що містять початкові деформації у степенях, вищих другого та деформації збурення у степенях, вищих першого, отримаємо

$$\hat{s}_F = \left(\lambda I_1(\hat{e})\hat{E} + 2\mu\hat{e}\right)\cdot\left(\hat{E} + 2\hat{\varepsilon}\right) + \left(\lambda\varepsilon_1\hat{E} + 2\mu\hat{\varepsilon}\right)\cdot\left(2\hat{e} - I_1(\hat{e})\hat{E}\right) +$$
$$+2\left[\lambda I_1(\hat{e}\cdot\hat{\varepsilon})\hat{E} + \mu\left(\hat{\varepsilon}\cdot\vec{\nabla}\vec{w} + \vec{\nabla}\vec{w}^T\cdot\hat{\varepsilon}\right)\right] + 2a\varepsilon_1 I_1(\hat{e})\hat{E} +$$
$$+2b\left[I_1(\hat{e}\cdot\hat{\varepsilon})\hat{E} + I_1(\hat{e})\hat{\varepsilon} + \varepsilon_1\hat{e}\right] + c\left(\hat{e}\cdot\hat{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}\cdot\hat{e}\right). \tag{59}$$

Формули (55) та (59) виражають лінійні щодо тензорів деформації збурення співвідношення пружності, задаючи тензор напружень для збурень як функцію відповідних тензорів початкової деформації (Альманзі чи Фінґера) та тензора деформації збурення.

5. Рівняння динаміки для малих пружних збурень у неоднорідно деформованому континуумі

Рівняння руху ізотропного пружного середовища за відсутності масових сил у збуреній конфігурації $\tilde{\mathbf{V}}$ записується як

$$\tilde{\rho}\, D\vec{v}/Dt = \tilde{\vec{\nabla}} \cdot \hat{\tilde{\sigma}}\,, \tag{60}$$

де $\tilde{\rho}$ — густина середовища у збуреній конфігурації, $\vec{v} = \partial\tilde{\vec{r}}/\partial t = \partial\vec{w}/\partial t$ — швидкість поширення збурення, $D/Dt = \partial/\partial t + \vec{v} \cdot \tilde{\vec{\nabla}}$ — матеріальна похідна по часу у збуреній конфігурації.

Зважаючи на малість $\vec{\nabla}\vec{w}$, у лінійному наближенні приймемо, що $D\vec{v}/Dt \approx \partial\vec{v}/\partial t = \partial^2\vec{w}/\partial t^2$. Оскільки в актуальній конфігурації справедливе рівняння рівноваги за відсутності масових сил, перепишемо рівняння (60) наступним чином

$$\rho\partial^2\vec{w}/\partial t^2 = \vec{\nabla} \cdot \hat{s}_\eta - \left(\vec{\nabla}\vec{w} \cdot \vec{\nabla}\right) \cdot \vec{\sigma}, \quad \eta \in \{g, F\}\,. \tag{61}$$

де ρ — густина середовища в актуальній конфігурації, пов’язана з густиною збуреної конфігурації співвідношенням $\tilde{\rho} = \rho\sqrt{g/\tilde{g}}$.

Підставивши замість $\hat{\sigma}$ його подання у вигляді (29), а замість $\hat{s}_\eta,\ \eta \in \{g, F\}$ формули (53), отримаємо

$$\begin{aligned}
&\rho\partial^2\vec{w}/\partial t^2 = 2\Big[-a_0'\vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{w} - 2\hat{e} \cdot \vec{\nabla}a_0' + a_2'\hat{g}^2 \cdot\cdot \vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{w} + \\
&+a_1'\hat{g} \cdot\cdot \vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{w} + 2\vec{\nabla} \cdot \left(a_2'\hat{g} \cdot \hat{e} \cdot \hat{g} + a_{sp}'\hat{g}^p\hat{g}^s \cdot\cdot \hat{e}\right)\Big], \\
&\rho\partial^2\vec{w}/\partial t^2 = 2\Big[-a_0\vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{w} - 2\vec{e} \cdot \vec{\nabla}a_0 + a_1\hat{F} \cdot\cdot \vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{w} + \\
&+a_2\hat{F}^2 \cdot\cdot \vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{w} + 2\vec{\nabla} \cdot \left(a_2\hat{F} \cdot \vec{e} \cdot \hat{F} + a_{sp}\hat{F}^p\hat{F}^s \cdot\cdot \vec{e}\right)\Big].
\end{aligned} \tag{62}$$

Замінивши в останніх формулах міри деформації Альманзі та Фінґера відповідними тензорами деформації, остаточно отримаємо лінеаризовані рівняння поширення малих пружних збурень для ізотропного тіла

$$\begin{aligned}
&\rho\partial^2\vec{w}/\partial t^2 = 2\Big\{-a_0'\vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{w} + \hat{e} \cdot \vec{\nabla}\left(a_2' - a_0'\right) + \left(a_1' + a_2'\right)\Delta^2\vec{w} + 4a_2'\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^2 \cdot\cdot \vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{w} + \\
&+\left(a_1' + 2a_2'\right)\left(\vec{\nabla} \cdot \hat{e} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot\cdot \vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{w}\right) + \vec{\nabla} \cdot \Big[2a_2'\left(\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \hat{e} + \hat{e} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \hat{e} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}\right) + a_{sp}'\left(\hat{g}^p\hat{g}^s \cdot\cdot \hat{e}\right)\Big]\Big\},
\end{aligned}$$

$$\rho\partial^2\vec{w}/\partial t^2=2\Big\{-a_0\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{w}+\hat{e}\cdot\vec{\nabla}\left(a_2-a_0\right)+\left(a_1+a_2\right)\Delta^2\vec{w}+4a_2\hat{\varepsilon}^2\cdot\cdot\vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{w}+$$
$$+\left(a_1+2a_2\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\hat{e}+\hat{\varepsilon}\cdot\cdot\vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{w}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left[2a_2\left(\hat{\varepsilon}\cdot\hat{e}+\hat{e}\cdot\hat{\varepsilon}+\hat{\varepsilon}\cdot\hat{e}\cdot\hat{\varepsilon}\right)+a_{sp}\left(\hat{F}^p\hat{F}^s\cdot\cdot\hat{e}\right)\right]\Big\}. \quad (63)$$

Підставляючи у другу формулу (63) коефіцієнти (57) та нехтуючи доданками, що містять початкові деформації у степенях, вищих другого, та деформації збурення у степенях, вищих першого, отримаємо

$$\rho\partial^2\vec{w}/\partial t^2=\vec{\nabla}\cdot\Big[\left(\lambda I_1(\hat{e})+2\mu\hat{e}\right)\left(\hat{E}+2\hat{\varepsilon}\right)+2\left(\lambda I_1(\hat{e}\cdot\hat{\varepsilon})\hat{E}+2\mu\hat{\varepsilon}\cdot\hat{e}\right)+2a\varepsilon_1 I_1(\hat{e})\hat{E}+$$
$$+2b\left(I_1(\hat{e}\cdot\hat{\varepsilon})\hat{E}+\varepsilon_1\hat{e}\right)+c\left(\hat{e}\cdot\hat{\varepsilon}+\hat{\varepsilon}\cdot\hat{e}\right)\Big]+2\left(\lambda\varepsilon_1\vec{\nabla}\cdot\hat{e}+\mu\left(\hat{\varepsilon}\cdot\cdot\vec{\nabla}\vec{\nabla}\vec{w}+\hat{\varepsilon}\cdot\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{w}\right)\right). \quad (64)$$

Приймемо, що початкові деформації достатньо малі, так що можна знехтувати відмінністю між локальними базами відлікової та актуальної конфігурацій. У цьому випадку нелінійний зв'язок між компонентами тензорів напружень Коші $\hat{\sigma}$ та деформації $\hat{\epsilon}$ або $\hat{\varepsilon}$, лінійні частини яких співпадають, на основі формули (37) у декартовій системі координат для потенціалу Мурнагана задається виразом [1, 2]

$$\sigma_{ij}=\left(c_{ijkl}+0.5\Gamma_{ijklmn}\varepsilon_{mn}\right)\varepsilon_{kl}\,. \quad (65)$$

Коефіцієнти у попередній формулі визначаються як

$$c_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right),\;\; \Gamma_{ijklmn}=\Gamma'_{((ij)(kl)(mn))}, \quad (66)$$

$$\Gamma_{ijklmn}=2\left(a+3b+c\right)\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}-3\left(2b+c\right)\delta_{ij}\in_{pkm}\in_{pln}+c\in_{ikm}\in_{jln}\,. \quad (67)$$

Дужки в позначенні компонент $\Gamma_{((ij)(kl)(mn))}$ вказують на операцію симетризації щодо перестановок відповідних груп індексів, $\in_{pkm}$ — символи Леві-Чівіта.

Компоненти тензора напружень $\mathbf{s}=\{s_{ij}\}$ з точністю до членів першого порядку запишуться наступним чином

$$s_{ij}=\left(c_{ijkl}+\Gamma_{ijklmn}\varepsilon_{mn}\right)e_{kl}\,. \quad (68)$$

Із врахуванням (67) лінеаризовані рівняння поширення малих пружних збурень у тілі з початковими деформаціями (65) у декартовій системі координат перепишуться у вигляді

$$\rho\partial^2 w_i/\partial t^2=\partial\left(\left(c_{ijkl}+\Gamma_{ijklmn}\varepsilon_{mn}\right)\partial w_k/\partial x_l\right)/\partial x_j\,. \quad (69)$$

Співвідношення (69) є системою рівнянь гіперболічного типу, коефіцієнти якої визначаються через компоненти тензора початкових деформацій як функцій просторових координат, що описує поширення ультразвукової хвилі в середовищі з неоднорідними початковими напруженнями. Ці формули разом із рівняннями, які визначають незбурений напружено-деформований стан, є теоретичною основою для формулювання задач неруйнівного визначення неоднорідно розподілених тензорних полів початкових деформацій та напружень у твердому тілі з використанням даних акустичних вимірювань.

Висновки. У статті розвинена теорія нелінійного пружного деформування твердого тіла, що базується на термодинамічних потенціалах, які залежать від мір деформації, визначених щодо актуальної конфігурації. Встановлено декілька таких потенціалів, які визначають густину внутрішньої (вільної) енергії, віднесену до одиниці об'єму відлікової конфігурації. За такого підходу отримано різні варіанти систем рівнянь динаміки малих пружних збурень у попередньо неоднорідно деформованому континуумі, коефіцієнти яких залежать від тензорних параметрів початкового напружено-деформованого стану, які визначаються стосовно незбуреної конфігурації, — тензорів (мір) деформації Альманзі та Фінґера. У такому вигляді ці рівняння зручно застосовувати для опису поширення зондувальних акустичних хвиль у задачах неруйнівного визначення неоднорідного напружено-деформованого стану.

Література

[1] *Гузь А. Н.* Об основах неразрушающего ультразвукового метода определения трехосных напряжений в твердых телах // Прикл. механика. — 2001. — Т. 37, № 7. — С. 78-84.

[2] *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. — К.: «А. С. К.», 2004. — 672 с.

[3] *Патон Б. Е., Труфяков В. И., Гуща О. И., Гузь А. Н, Махорт Ф. Г.* Ультразвуковой неразрушающий метод измерения напряжений в сварных конструкциях // Диагностика и прогнозирование разрушения сварных конструкций. — 1986. — Вып. 2. — С. 13-19.

[4] *Ананьев И. В., Калинчук В. В., Полякова И. В.* О возбуждении волн вибрирующим штампом в среде с неоднородными начальными напряжениями // Прикл. математика и механика. — 1983. — Т. 47, № 3. — С. 483-489.

[5] *Равасоо А.* Распространение волн в среде с неоднородной статической деформацией // Изв. АН ЭССР. Физ., матем. — 1982. — Т. 31, № 3. — С. 277-283.

[6] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 512 с.

[7] *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975. — 592 с.

[8] *Новацкий В.* Теория упругости. — М.: Мир, 1975. — 872 с.

[9] *Кравчишин О. З., Чекурін В. Ф.* Нелінійна модель поширення пружних збурень у пружно-деформованому континуумі // Мат. методи та фіз.–мех. поля. — 2004. — Т. 47, № 3.– С. 163-170.

Models for Dynamic of Elastic Disturbances in Non-uniformly Strained Continuum

Vasyl Chekurin, Oksana Kravchyshyn

A nonlinear theory of elasticity as applied to problems of tensor fields tomography in non-uniformly strained solids has been developed. As constitutive thermodynamic parameters of the theory, corresponding the process of deformation, the tensor characteristics determinate in the actual configuration — tensors Almansi's and Finger's have been used. In the frame of the theory several variants of system equations for dynamics of small elastic disturbances in non-uniformly strained continuum, linearized with respect to the amplitude of the disturbance, have been built. These equations coefficients are depended on local parameters of the body stress-strained state, determined in local base of the actual configuration. In such a form they are convenient to use for describing of the wave processes in non-uniformly strained solids activated to obtain some a posteriori information about the actual stress-strained state of such objects.

Модели динамики упругих возмущений в неоднородно деформированном континууме

Василь Чекурин, Оксана Кравчишин

Развита нелинейная теория упругости применительно к задачам томографии тензорных полей в неоднородно деформированных твердых телах. В качестве определяющих параметров локального термодинамического состояния, соответствующих процессу деформирования, приняты тензорные характеристики, определяемые относительно актуальной (деформированной) конфигурации — тензор напряжений Коши и меры деформации Альманзи или Фингера. В рамках предложенной нелинейной теории построено несколько вариантов системы уравнений динамики малых упругих возмущений в неоднородно деформированном твердом континууме, линеаризированной относительно деформации возмущения. Коэффициенты полученных уравнений зависят от локальных параметров напряженно-деформированного состояния, заданных в актуальной конфигурации. В таком виде их удобно применять для описания волновых процессов, которые возбуждают в неоднородно деформированных телах для получения апостериорной информации об актуальном напряженно-деформированном состоянии этих объектов.

Отримано 22.02.05