УДК 517.5

©2008. **Т.В. Ломако**

О РАСПРОСТРАНЕНИИ КОЛЬЦЕВЫХ ГОМЕОМОРФИЗМОВ НА ГРАНИЦУ

Работа посвящена изучению кольцевых Q-гомеоморфизмов. Сформулированы условия на функцию $Q(x)$ и границу области, при которых всякий кольцевой Q-гомеоморфизм допускает гомеоморфное продолжение на границу. Кроме того, для произвольного кольцевого Q-гомеоморфизма $f : D \to D'$ с $Q \in L^1(D)$ исследован вопрос о продолжении на границу обратных отображений. Показано, что изолированная сингулярность устранима для кольцевых Q-гомеоморфизмов при условии, что Q имеет конечное среднее колебание в точке.

1. Введение. В последнее время в работах многих известных специалистов по теории отображений изучаются так называемые *уравнения Бельтрами с вырождением*, которые имеют широкое применение в науке и технике. Следует обратить внимание, например, на работы [2] и [9], где изучается некоторый класс отображений, который тесно связан с решениями упомянутых выше уравнений. Более подробно, *кольцевые Q-гомеоморфизмы*, которые являются центральным объектом данной работы, являются решениями уравнений типа Бельтрами, поэтому их изучение с точки зрения геометрической теории функций является важным и доказывает свое право на существование.

Данная статья посвящена проблеме распространения кольцевых Q-гомеоморфизмов на границу. Это означает, что и решения соответствующих уравнений Бельтрами будут иметь при соответствующих условиях продолжение в точки границы непрерывным образом.

Кольцевые гомеоморфизмы введены В.Рязановым, У.Сребро и Э.Якубовым на плоскости, см., напр., [9]. Е.Севостьяновым показано, что при соответствующих условиях семейства таких отображений нормальны, см. [12], и что такие отображения удовлетворяют теоремам типа Пикара-Сохоцкого-Вейерштрасса и Лиувилля в окрестности изолированных существенно особых точках границы, см. [13].

Основные методы, которые использованы в данной статье, применялись ранее для исследования различных вопросов, связанных с изучением Q-гомеоморфизмов, см. [7], [3].

2. Предварительные сведения. Приведем основные обозначения и определения, которые будут использованы нами в дальнейшем. Всюду далее D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, $dm(x)$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{diam} A$ обозначает евклидов диаметр множества $A \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{dist}(A, B)$ обозначает евклидово расстояние между множествами A и B в $\mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $E, F \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ – произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$.

Напомним, что борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x) \quad |dx| \geq 1$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{D} \rho^n(x) \quad dm(x)\,.$$

Напомним, что топологическое пространство *связно*, если его нельзя разбить на два непустых открытых множества. Компактные связные пространства называются *континуумами*. Топологическое пространство T будем называть *линейно связным*, если любые точки x_1 и x_2 можно соединить непрерывным путем $\gamma : [0,\, 1] \to T$, $\gamma(0) = x_1$ и $\gamma(1) = x_2$.

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0,\, \partial D)$, и пусть $Q : D \to [0,\, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Положим

$$A(r_1,\, r_2,\, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\},$$

$$S_i = S(x_0,\, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r_i\},\ i = 1,\, 2.$$

Следующее понятие, см. [9], мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу и тесно связано с решением вырожденных уравнений типа Бельтрами на плоскости. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке $x_0 \in D$*, если соотношение

$$M(f(\Gamma(S_1,\, S_2,\, A))) \leq \int\limits_{A} Q(x)\eta^n(|x - x_0|)dm(x) \tag{1}$$

выполнено для любого кольца $A = A(r_1,\, r_2,\, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1,\, r_2) \to [0,\, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr = 1. \tag{2}$$

В работе [10] было введено более общее понятие кольцевого Q-гомеоморфизма нежели то, что касается соотношения (1) и связано с изучением поведения отображений на границе. Гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ называется *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке $x_0 \in \overline{D}$*, если соотношение

$$M(f(\Gamma(K_1,\, K_2,\, D))) \leq \int\limits_{A \bigcap D} Q(x)\eta^n(|x - x_0|)dm(x) \tag{3}$$

выполнено для любых двух континуумов K_1, K_2 из D, которые принадлежат разным компонентам дополнения в $\mathbb{R}^n$ кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, которые содержат x_0 и ∞ и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, такой что выполняется условие (2).

Напомним, что область D называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \cap D$ связно, см. [5], с.232. Аналогично, область D *локально линейно связна в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \cap D$ линейно связно.

Согласно [7], с.205, будем говорить, что ∂D *сильно достижима в точке* $x_0 \in \partial D$, если, для любой окрестности U точки x_0, найдется компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Gamma(E, F, D)) \geq \delta$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V. Граница ∂D области D называется *слабо плоской* в точке $x_0 \in \partial D$, если для любого числа $P > 0$ и окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$ такая что

$$M(\Gamma(E, F, D)) \geq P$$

для любых континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V. Граница области $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *сильно достижимой*, или *слабо плоской*, если соответствующие свойства выполнены в каждой точке границы.

Напомним, что *сферическое (хордальное)* расстояние между точками x и y в $\overline{\mathbb{R}^n}$ есть величина $h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, где π – стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \quad h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y.$$

Хордальным диаметром множества $E \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ называется величина

$$h(E) = \sup_{x, y \in E} h(x, y).$$

3. О непрерывном продолжении на границу.

Лемма 1. *Пусть D локально линейно связна в $x_0 \in \partial D$, $\overline{D'}$ – компакт, а $f : D \to D'$ – кольцевой Q-гомеоморфизм такой, что $\partial D'$ сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C(x_0, f) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lim_{k \to \infty} f(x_k),\ x_k \to x_0,\ x_k \in D\}. \tag{4}$$

Предположим, что для каждой точки $x_0 \in \partial D$ найдется $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$ такое, что для $\forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$\int\limits_{D(x_0, \varepsilon)} Q(x) \cdot \psi^n(|x - x_0|)\ dm(x) = o\left(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right) \tag{5}$$

при $\varepsilon \to 0$, *где* $D(x_0, \varepsilon) = \{x \in D : \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}$ *и* $\psi(t)$ *– неотрицательная измеримая функция на* $(0, \infty)$, *такая что*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon') = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \psi(t)dt < \infty$$

для всех (фиксированных) $\varepsilon' \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$. *Тогда* f *имеет непрерывное продолжение в точку* x_0.

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что $\infty \notin D'$. Покажем, что предельное множество $E = C(x_0, f)$ состоит из единственной точки. Отметим, что $E \neq \varnothing$ ввиду компактности $\overline{D'}$. По условию леммы, $\partial D'$ сильно достижима в некоторой точке $y_0 \in E$. Допустим, что существует хотя бы еще одна точка $y^* \in E$. Пусть $U = B(y_0, r_0)$, где $0 < r_0 < |y_0 - y^*|$.

В силу локальной линейной связности области D в точке x_0, найдется последовательность окрестностей V_m точки x_0 такая, что $D_m = D \bigcap V_m$ – области и $\operatorname{diam}(V_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда найдутся точки y_m и $y_m^* \in F_m = fD_m$, близкие к y_0 и y^*, соответственно, для которых $|y_0 - y_m| < r_0$ и $|y_0 - y_m^*| > r_0$, которые можно соединить непрерывными кривыми C_m в областях F_m. По построению

$$C_m \bigcap \partial B(y_0, r_0) \neq \varnothing,$$

ввиду связности C_m. По условию сильной достижимости найдется компакт $C \in D'$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Gamma(C, C_m, D')) \geq \delta\,, \tag{6}$$

для больших m, поскольку $\operatorname{dist}(y_0, C_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Выберем континуум C', такой что $C \subset C'$ и $C' \subset D$.

Заметим, что $\Gamma(C, C_m, D') \subseteq \Gamma(C', C_m, D')$, поэтому

$$M(\Gamma(C', C_m, D')) \geq M(\Gamma(C, C_m, D')) \geq \delta. \tag{7}$$

$K = f^{-1}(C')$ является континуумом как непрерывный образ континуума. Таким образом, $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(x_0, K) > 0$.

Обозначим $B_\varepsilon = B(x_0, \varepsilon), \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Пусть ψ^* – борелевская функция, такая что $\psi^*(t) = \psi(t)$ для почти всех $t \in (0, \infty)$, которая существует по теореме Лузина, см., например, [11]. Тогда для функции

$$\eta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi^*(t)/I(\varepsilon, \varepsilon_0), & x \in (\varepsilon, \varepsilon_0), \\ 0, & x \notin (\varepsilon, \varepsilon_0) \end{cases}$$

выполняется

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta_\varepsilon(t)dt = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{\psi^*(t)}{I(\varepsilon, \varepsilon_0)}dt = 1.$$

Обозначим $A = A(\varepsilon,\, \varepsilon_0,\, x_0)$. Возьмем континуумы $K_1 \in B_\varepsilon \bigcap D$ и $K_2 = K$, тогда

$$M(f(\Gamma(K_1, K_2, D))) \leq \int\limits_{A \bigcap D} Q(x)\eta^n(|x-x_0|)dm(x) =$$

$$= \int\limits_{D(x_0,\varepsilon)} \frac{Q(x)\psi^{*n}(|x-x_0|)}{I(\varepsilon,\varepsilon_0)}\, dm(x) \to 0 \tag{8}$$

при $\varepsilon \to 0$ согласно (5).

С другой стороны, для любого $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$ при больших m имеет место включение $D_m \subset B_\varepsilon$, и поэтому $C_m \subset fB_\varepsilon$, откуда следует, что $f^{-1}C_m \subset B_\varepsilon$. Возьмем континуумы $K_1 = f^{-1}(C_m)$ и $K_2 = K$, заметим, что $K_1 \in B(x_0,\, \varepsilon) \bigcap D$, $K_2 \in (\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(x_0,\, \varepsilon_0)) \bigcap D$, согласно (7) получим

$$M(f(\Gamma(K_1, K_2, D))) \geq \delta,$$

что противоречит (8). $\Box$

4. Основные следствия.

Теорема 1. *Пусть область D из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\overline{D'}$ – компакт, а $f : D \to D'$ – кольцевой Q-гомеоморфизм такой, что $\partial D'$ сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C\,(x_0, f) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lim_{k\to\infty} f(x_k)\,,\ x_k \to x_0,\ x_k \in D\},$$

где $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая функция по Лебегу. Предположим, что в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$

$$q_{x_0}(r) \,=\, O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$$

при $r \to 0$, где $q_{x_0}(r)$ – среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $\{x \in D : |x - x_0| = r\}$. Тогда f продолжим в точку x_0 в $\mathbb{R}^n$ по непрерывности.

Доказательство. Пусть x_0 – произвольная точка ∂D. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Фиксируем $\varepsilon_0 < 1$. Положим $\psi(t) = \frac{1}{t\,\log\frac{1}{t}}$. Заметим, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n} \;=\; \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \left(\int\limits_{|x|=r} \frac{Q(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n}\, dS \right) dr \;\leq$$

$$\leq\, \omega_{n-1} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r\log\frac{1}{r}} \;=\; \omega_{n-1}\log\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}} \;=\; \omega_{n-1}\cdot I(\varepsilon,\varepsilon_0)\,,$$

где $I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt$. Нужное заключение следует теперь прямо из леммы 1. $\Box$

С целью упрощения, мы обозначаем в дальнейшем $\fint\limits_A f(x)dm(x) := \frac{1}{|A|}\int\limits_A f(x)dm(x)$, где, как обычно, $|A|$ обозначает лебегову меру множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Следуя работе [3], говорим, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in D$, пишем $\varphi \in FMO(x_0)$, если $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} \ \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon| \ dm(x) \ < \ \infty$, где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \fint_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x) \ dm(x)$. Также говорим, что $\varphi : D \to \mathbb{R}$ – функция *конечного среднего колебания* в D, пишем $\varphi \in FMO(D)$, или $\varphi \in FMO$, если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x \in D$.

Также напомним, см. раздел 2 в [3], что область $D \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию удвоения меры в точке $x_0 \in \overline{D}$, если

$$\operatorname{mes} B(x_0, 2\varepsilon) \cap D \leq c \cdot \operatorname{mes} B(x_0, \varepsilon) \cap D$$

для некоторого $c > 0$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Лемма 2. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию удвоения меры в $0 \in \overline{D}$, $\varphi : D \to \mathbb{R}, n \geq 2$ – неотрицательная функция, имеющая конечное среднее колебание в точке $0 \in D$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ $\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{\varphi(x)\, dm(x)}{(|x| \log \frac{1}{|x|})^n} = O\left(\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right)$ для некоторого $\varepsilon_0 \leq \operatorname{dist}(0, \partial D)$, см. следствие 2.3. в [3].*

Теорема 2. *Пусть область D из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial D$ и удовлетворяет условию удвоения меры во всех граничных точках, $\overline{D'}$ – компакт, а $f : D \to D'$ – кольцевой Q-гомеоморфизм такой, что $\partial D'$ сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C\,(x_0, f) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lim_{k\to\infty} f(x_k)\,,\ x_k \to x_0,\ x_k \in D\},$$

где $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая функция по Лебегу. Предположим, что $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание во всех точках $x_0 \in \overline{D}$. Тогда f продолжим в точку x_0 в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$ и $\mathbb{B}^n \subset D$. Пусть $\varepsilon_0 < e^{-1}$. На основании леммы 2, для функции $0 < \psi(t) = \frac{1}{t\, \log \frac{1}{t}}$ будем иметь, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|) \ dm(x) \ = \ O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right) .$$

Заметим также, что

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) \ := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt \ = \ \log \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}.$$

Оставшаяся часть утверждения следует теперь из леммы 1. □

5. О продолжении на границу обратных отображений.

Лемма 3. *Пусть $f : D \to D'$ – кольцевой Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1(D)$. Если область D локально линейно связна в точках x_1 и $x_2 \in \partial D$, $x_1 \neq x_2$, а D' имеет слабо плоскую границу, тогда $C(x_1, f) \bigcap C(x_2, f) = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $E_i = C(x_i,\, f)$, $i = 1, 2$ и $\delta = |x_1 - x_2|$. Предположим, что $E_1 \bigcap E_2 \neq \varnothing$. Так как область D локально линейно связна в точках x_1 и x_2, существуют окрестности U_1 и U_2 точек x_1 и x_2, соответственно, такие что $W_1 = D \bigcap U_1$ и $W_2 = D \bigcap U_2$ – области и $U_1 \subset B(x_1,\, \frac{\delta}{3})$ и $U_2 \subset CB(x_1,\, \frac{2\delta}{3})$. Тогда по неравенству треугольника $\operatorname{dist}(W_1,\, W_2) \geq \frac{\delta}{3}$ и функция

$$\eta(x) = \begin{cases} \frac{3}{\delta}, & x \in (\frac{\delta}{3},\, \frac{2\delta}{3}), \\ 0, & x \notin (\frac{\delta}{3},\, \frac{2\delta}{3}). \end{cases}$$

Имеем $\int\limits_{\frac{\delta}{3}}^{\frac{2\delta}{3}} \eta(t)dt = 1$, следовательно, для любых континуумов $K_1 \subset W_1$ и $K_2 \subset W_2$:

$$M(f(\Gamma(K_1,\, K_2,\, D))) \leq \int\limits_{A(\frac{\delta}{3},\, \frac{2\delta}{3},\, x_1)} Q(x)\eta^n(|x - x_1|)dm(x) \leq$$

$$\leq \frac{3^n}{\delta^n} \int\limits_{A(\frac{\delta}{3},\, \frac{2\delta}{3},\, x_1) \bigcap D} Q(x)d\mu(x) < \infty,$$

так как $Q \in L^1(D)$.

Последняя оценка противоречит, однако, условию слабой плоскости, если найдется $y_0 \in E_1 \bigcap E_2$. Действительно, тогда $y_0 \in \overline{fW_1} \bigcap \overline{fW_2}$ и в областях $W_1^* = fW_1$, и $W_2^* = fW_2$ найдется по непрерывной кривой, пересекающей любые наперед заданные сферы $\partial B(y_0,\, r_0)$ и $\partial B(y_0,\, r_*)$ с достаточно малыми радиусами r_0 и r_*. Поэтому предположение, что $E_1 \bigcap E_2 \neq \varnothing$, неверно. $\Box$

Из леммы 3 следует следующее заключение.

Теорема 3. *Пусть D локально линейно связна во всех своих граничных точках и $\overline{D}$ – компакт, D' имеет слабо плоскую границу, а $f : D \to D'$ – кольцевой Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1(D)$. Тогда обратный гомеоморфизм $g = f^{-1} : D' \to D$ допускает непрерывное продолжение $\overline{g} : \overline{D'} \to \overline{D}$.*

6. Устранение изолированной особенности. В следующей лемме показано, что для устранения изолированной особенности кольцевых Q-гомеоморфизмов достаточно потребовать интегрируемость $Q(x)$ с подходящим весом.

Лемма 4. *Пусть $f : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ – кольцевой Q-гомеоморфизм. Предположим, что существует ε_0 $(0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2})$, такое что для любого $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$*

$$\int\limits_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x|)dm(x) = o(I(\varepsilon)^n), \tag{9}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $\psi(t)$ – неотрицательная измеримая функция на $(0,\, \infty)$, такая что

$$0 < I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty, \tag{10}$$

то f имеет непрерывное продолжение на $\mathbb{B}^n$, которое является кольцевым Q-гомеоморфизмом.

Доказательство. Пусть ψ^* – борелевская функция, такая что $\psi^*(t)=\psi(t)$ для п. в. $t\in(0,\infty)$. Такая функция ψ^* существует по теореме Лузина, см. напр., [11]. Тогда функция

$$\eta_\varepsilon(t)=\begin{cases}\psi^*(|t|)/I(\varepsilon), & t\in(\varepsilon,\varepsilon_0),\\ 0, & t\notin(\varepsilon,\varepsilon_0),\end{cases}$$

такая что $\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0}\eta_\varepsilon(t)dt=1$ и, следовательно, для сфер $S_1=S(0,\frac{\varepsilon}{2})$ и $S_2=S(0,2\varepsilon_0)$:

$$M(f(\Gamma(S_1,S_2,\mathbb{B}^n\setminus\{0\})))\le\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0}Q(x)\eta_\varepsilon^n(|x|)dm(x),$$

т. е. $M(f(\Gamma(S_1,S_2,\mathbb{B}^n\setminus\{0\})))\to0$ при $\varepsilon\to0$ согласно (9).

По лемме Геринга, см. [4],

$$M(f(\Gamma(S_1,S_2,\mathbb{B}^n\setminus\{0\})))\ge\frac{a_n}{(\log\frac{b_n}{\delta_0\delta_\varepsilon})^{n-1}},$$

где a_n и b_n зависят только от n, δ_0 и δ_ε – сферические (хордальные) диаметры fS_2 и fS_1. Таким образом, $\delta_\varepsilon\to0$ и fS_1 стягивается в точку при $\varepsilon\to0$. $\Box$

В частности, выбирая в лемме 4 $\psi=\frac{1}{t\log(1/t)}$, получаем согласно лемме 2 следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $f:D\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}^n$, $n\ge2$, является кольцевым Q-гомеоморфизмом, где $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке $x_0\in D$, либо логарифмические особенности порядка не выше $n-1$. Тогда f допускает кольцевое Q-гомеоморфное продолжение на D.*

1. *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Intern. Journ. Math. and Math. Scie. – 2003. – **22.** – P.1397-1420.
2. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* General Beltrami equations and BMO // Ukr. Math. Bull. – 2008. – **5**, №3 – P.305-326.
3. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. матем. вестник. – 2005. – **2**, №3. – С.395-417.
4. *Gehring F. W.* Quasiconformal mappings, in Complex Analysis and its Applications, V.2. – International Atomic Energy Agency: Vienna, 1976.
5. *Куратовский К.* Топология, т.2. – М.: Мир, 1969. – 624с.
6. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On Q–homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 2005. – **30,** №1. – P.49-69.
7. *Рязанов В.И., Салимов Р.Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. матем. вестник. – 2007. – **4**, №2. – С.199-234.
8. *Рязанов В.И., Севостьянов Е.А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. матем. ж. – 2007. – **48**, №6. – С.1361-1376.
9. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equations // J. d'Anal. Math. – 2005. – **96.** – P.117–150.
10. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* To convergence theory for Beltrami equations // Ukr. Math. Bull. – 2008. – **5**, №4. – P.503-514.

11. *Saks S.* Theory of Integral. – New York: Dover Publ. Inc., 1964.
12. *Севостьянов Е.А.* Теория модулей, емкостей и нормальные семейства отображений, допускающих ветвление// Укр. матем. вестник. – 2007. – **4**, №4. – С.582-604.
13. *Севостьянов Е.А.* Теоремы Лиувилля, Пикара и Сохоцкого для кольцевых отображений // Укр. матем. вестник. – 2008. – **5**, №3. – С.366-381.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
brusin2006@rambler.ru

Получено 30.11.08