УДК 517.956.4

©2008. **О.В. Шиян**

# О ДИНАМИКЕ БЕГУЩИХ ВОЛН В СИСТЕМЕ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ С МАЛОЙ ДИФФУЗИЕЙ

Исследуется динамика бегущих волн системы параболических уравнений Ван-дер-полевского типа с малой диффузией на окружности радиуса $r$. Рассмотрен вопрос о существовании, взаимодействии, асимптотической форме и устойчивости бегущих волн данной системы. Доказано, что, при увеличении радиуса $r$, растет число устойчивых бегущих волн, т.е. в данной задаче имеет место явление буферности. Показано, что взаимодействие бегущих волн подчинено принципу 1:2.

**Введение.** Рассмотрим систему параболических уравнений Ван-дер-полевского типа:

$$\begin{aligned} &\dot{u} - v = \delta(d_u \Delta u + d_{uv} \Delta v), \\ &\dot{v} + \omega_0^2 u = 2\delta(1-u^2)v + \delta(d_{vu}\Delta u + d_v \Delta v), \end{aligned} \tag{1}$$

с периодическими граничными условиями:

$$u(t,x) = u(t, x+2\pi r), v(t,x) = v(t, x+2\pi r). \tag{2}$$

Здесь точка означает дифференцирование по переменной $t$, $0 < \delta \ll 1$ – коэффициент трения, $d_u, d_{uv}, d_{vu}, d_v$ – коэффициенты диффузии, $\omega_0 > 0$ – частота колебаний, $\Delta$ – одномерный оператор Лапласа, $r > 0$. В дальнейшем будем считать, что $4d_u d_v \geq (d_{uv} + d_{vu})^2$. В этом случае система (1)–(2) является системой параболических уравнений типа реакции-диффузии [1].

Система (1)–(2) является простейшей математической моделью автоволновой среды и изучалась в ряде работ (см. [2]–[4] и цитированную в них литературу). В этих работах изучен характер устойчивости бегущих волн задачи (1) в безграничной автоволновой среде.

В предлагаемой работе рассмотрен вопрос о динамике периодических по переменной $t$ решений краевой задачи (1)–(2) типа бегущая волна, при увеличении $r$ и фиксированных прочих параметрах. Доказано, что при $r \to \infty$ в исходной задаче растет число орбитально асимптотически устойчивых бегущих волн, т.е. имеет место явление буферности [5], [6]. Роль феномена буферности в динамике сложных систем и процессах самоорганизации выявлена в монографиях [7], [5]. Здесь же имеется достаточно полная библиография.

Для исследования динамики бегущих волн задачи (1)–(2) при увеличении $r$ ниже использован подход, предложенный в работах [8], [9]. Этот подход приводит к конечной совокупности шестимерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которая и определяет динамику бегущих волн задачи (1)–(2).

**1. Асимптотическое разложение бегущих волн.** Запишем задачу (1)–(2) в виде:

$$\dot{w} = L(\delta)w + \delta\mathfrak{R}(w),\ w(t,x) = w(t, x+2\pi r), \tag{3}$$

где $L(\delta)w = (A + \delta K + \delta D\Delta)w$, $w = (u,v)^T$,

$$\mathfrak{R}(w) = -2\begin{pmatrix} 0 \\ u^2 v \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix},\quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} d_u & d_{uv} \\ d_{vu} & d_v \end{pmatrix}.$$

Введем пространство $H = \{w = (u,v) \in L_2^2(]0, 2\pi r[)\}$ – гильбертово пространство $2\pi r$ периодических вектор-функций со скалярным произведением

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \frac{1}{2\pi r}\int\limits_0^{2\pi r}(u_1\bar{u}_2 + v_2\bar{v}_2)dt.$$

Обозначим $H^l,\ l \in \mathbb{Z}_+$ пространство Соболева со скалярным произведением

$$\langle w_1, w_2 \rangle_l = \sum_{k=0}^{l}\frac{1}{2\pi r}\int\limits_0^{2\pi r}(u_1^{(k)}\bar{u}_2^{(k)} + v_2^{(k)}\bar{v}_2^{(k)})dt.$$

Задача (1)–(2) или (3) порождает в пространстве $H$ непрерывную полугруппу [1]. Выберем в качестве фазового пространства уравнения (3) пространство $H$. Следует отметить, что уравнение (3) инвариантно относительно полной ортогональной группы, порожденной вращениями и отражением окружности, т.е. уравнение (3) $S^1$ – эквивариантно.

Несложно убедиться в том, что существует вектор $q_k(\delta)$:

$$q_k(\delta) = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} -\frac{k^2}{r^2}d_{uv} \\ \frac{k^2}{r^2}d_u + \lambda_k \end{pmatrix} + O(\delta^2),$$

такой, что

$$L(\delta)exp(ik\theta)q_k(\delta) = \tilde{\lambda}_k exp(ik\theta)q_k(\delta),\ \theta = \frac{x}{r},\ k = 0, \pm1, \pm2, ...$$

где

$$\tilde{\lambda}_k(\delta) = i\omega_0 + \delta\lambda_k + O(\delta^2),$$

$$\lambda_k = \lambda_k(r) = \left[1 - \frac{k^2}{2r^2}(d_u + d_v)\right] + i\frac{k^2}{2r^2\omega_0}(d_{vu} - d_{uv}\omega_0^2),\qquad \lambda_{-k} = \bar{\lambda}_k. \tag{4}$$

Отсюда следует, что при увеличении $r$ и прохождении им значений $r_k^* = \frac{k}{\sqrt{2}}\sqrt{d_u + d_v}$ каждый раз размерность неустойчивого многообразия нулевого решения уравнения (3) повышается на два порядка. Построим решения (3), которые бифурцируют из нуля при прохождении $r$ точки $r_k^*$. С этой целью, следуя одночастотному методу [10]–[11], будем искать решения (3) в виде:

$$w = ze^{ik\theta}q_k(\delta) + \bar{z}e^{-ik\theta}\bar{q}_k(\delta) + \delta\sigma_3(ze^{ik\theta}, \bar{z}e^{-ik\theta}) + \delta^2\sigma_4(ze^{ik\theta}, \bar{z}e^{-ik\theta}) + ..., \tag{5}$$

где переменная $z$ удовлетворяет уравнению:

$$\dot{z} = z(\tilde{\lambda}_k(\delta) + \delta c_1|z|^2 + \delta^2 c_2|z|^4 + ...), \tag{6}$$

$\sigma_j(z,\bar{z}),\quad j = 3,5,...$ – форма $j$ степени относительно $z,\bar{z}$.

Подставим (5)–(6) в уравнение (3) и выполним замену $ze^{ik\theta} \mapsto z$. Затем приравняем в обеих частях полученного равенства коэффициенты при одинаковых степенях $\delta$. В результате относительно $\sigma_3, \sigma_5, ...$ получим рекуррентную последовательность линейных неоднородных уравнений

$$B_1\sigma_j(z,\bar{z}) = f_j(z,\bar{z}),\quad j = 3,5,...$$

Рассмотрим уравнение относительно $\sigma_3(z,\bar{z})$ :

$$B_1\sigma_3(z,\bar{z}) = f_3(z,\bar{z}), \tag{7}$$

где

$$B_1\sigma_3(z,\bar{z}) = \frac{\partial\sigma_3}{\partial z}i\omega_0 z + \frac{\partial\sigma_3}{\partial\bar{z}}(-i\omega_0 z) - A\sigma_3,$$

$$f_3(z,\bar{z}) = -2i\omega_0\begin{pmatrix} 0 \\ z^3 + z^2\bar{z} - \bar{z}z^2 - \bar{z}^3 \end{pmatrix} - c_1 z^2\bar{z}\begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} - \bar{c_1}z\bar{z}^2\begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega_0 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что оператор $B_1$, определенный на пространстве многочленов относительно $z,\bar{z}$, является диагональным, причем имеет место равенство:

$$B_1 p z^\alpha\bar{z}^\beta = (i\omega_0(\alpha-\beta)E - A)pz^\alpha\bar{z}^\beta,\quad p\in\mathbb{C}^2,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+,$$

где $E$ – единичная матрица.

Из условия разрешимости уравнения (7) находим $c_1 = -1$. При указанном выборе $c_1$ уравнение (7) имеет решение

$$\sigma_3(z,\bar{z}) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4i\omega_0}(z^3 - \bar{z}^3) & -\dfrac{1}{2i\omega_0}(z^2\bar{z} - z\bar{z}^2) \\ -\dfrac{3}{4}(z^3 + \bar{z}^3) & -\dfrac{1}{2}(z^2\bar{z} + z\bar{z}^2) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Далее, из уравнения относительно $\sigma_5(z,\bar{z})$ находим, как и выше, $c_2$, а затем $\sigma_5(z,\bar{z})$ в той же форме, что и правая часть уравнения относительно $\sigma_5(z,\bar{z})$. Отметим, что процесс последовательного построения $c_k, \sigma_j(z,\bar{z}), k = \frac{j-1}{2}, j = 3,5,...$ неограниченно продолжим.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\dot{z} = \big(i\omega_0 + \delta(\lambda_k - |z|^2)\big)z. \tag{9}$$

Легко видеть, что при $Re\lambda_k > 0$ , т.е. при $r > r_k^*$, из нулевого решения уравнения (9) бифурцирует периодическое по $t$ решение

$$z = \big(Re\lambda_k\big)^{\frac{1}{2}}e^{i\omega_k t},\qquad \omega_k = \omega_0 + \delta Im\lambda_k, \tag{10}$$

Согласно проведённому анализу, уравнение (3) имеет приближенное по невязке порядка $\delta^2$, периодическое по $t$ решение $\hat{w}_k^+ = \hat{w}_k(\eta^+, \delta)$:

$$\hat{w}_k^+ = 2\rho_k^{1/2}\begin{pmatrix} \cos\eta^+ \\ -\omega_0\sin\eta^+ \end{pmatrix} + 2\delta\rho_k^{1/2}\begin{pmatrix} -\frac{k^2}{r^2}d_{uv}\cos\eta^+ \\ (\frac{k^2}{r^2}d_u + Re\lambda_k)\cos\eta^+ - Im\lambda_k\sin\eta^+ \end{pmatrix} -$$
$$-\delta\rho_k^{3/2}\frac{1}{2\omega_0}\Big[\begin{pmatrix} \sin 3\eta^+ \\ 3\omega_0\cos 3\eta^+ \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \sin\eta^+ \\ \omega_0 cos\eta^+ \end{pmatrix}\Big], \tag{11}$$

где $\rho_k = Re\lambda_k,\ \ \eta^+ = \eta^+(\delta) = \hat{\omega}_k t + k\theta,\quad \hat{\omega}_k = \hat{\omega}_k(\delta) = \omega_0 + \delta Im\lambda_k,\ k = 1, 2, ...$

Очевидно, что приближенным решением уравнения (3) является также $\hat{w}_k^- = \hat{w}_k(\eta^-, \delta)$, где $\eta^- = \eta^-(\delta) = \hat{\omega}_k t - k\theta$.

Следует отметить, что приближенные по невязке порядка $\delta$, периодические по $t$ решения $w_k^\pm$ уравнения (3) были построены в работе [4] методом Ван-дер-Поля.

**2. Устойчивость бегущих волн $\hat{\mathbf{w}}_0, \hat{\mathbf{w}}_1^\pm$.** Рассмотрим вопрос об устойчивости приближенных решений $\hat{w}_0, \hat{w}_1^\pm$ уравнения (3) для таких $r$, что $Re\lambda_2(r) > 0$. С этой целью воспользуемся подходом, предложенным в работах [8], [9]. В соответствии с указанным подходом будем искать решения уравнения (3) в виде:

$$w = z_1\begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} + z_2 e^{i\theta}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega_0 \end{pmatrix} + z_3 e^{i\theta}\begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} + z_4 e^{2i\theta}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega_0 \end{pmatrix} + \text{к.с.} +$$
$$+\delta\sigma_3(z_1, z_2e^{i\theta}, z_3e^{i\theta}, z_4e^{2i\theta}, \text{к.с.}) + O(\delta^2), \tag{12}$$

где к.с. – стандартное обозначение комплексно сопряженной величины, $\sigma_3$ – кубическая форма, $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, а переменная $z_s,\ s = \overline{1,4}$ удовлетворяет уравнению:

$$\dot{z}_s = \mu_s(\delta)z_s + a_s(z, \bar{z})e^{i\theta n(s)}, \quad s = \overline{1,4}. \tag{13}$$

Здесь $\mu_1 = \tilde{\lambda}_0,\ \ \mu_2 = \tilde{\lambda}_{-1},\ \ \mu_3 = \tilde{\lambda}_1,\ \ \mu_4 = \tilde{\lambda}_{-2},\ \ \tilde{\lambda}_{-k} = \bar{\tilde{\lambda}}_k$.

Выбор $a_s(z, \bar{z})$ осуществим согласно условию $S^1$ – эквивариантности $a_s(z, \bar{z})e^{i\theta n(s)} = a_s(z_1, z_2e^{i\theta}, z_3e^{i\theta}, z_4e^{2i\theta}, \text{к.с.})$, где $n(1) = 0, n(2) = n(3) = 1, n(4) = 2$.

Подставим (12), (13) в уравнение (3) и произведем замену $z_s e^{i\theta n(s)} \mapsto z_s$. Приравняем в обеих частях полученного равенства кубические формы. В результате при $\delta = 0$ получим линейное неоднородное уравнение относительно $\sigma_3(z, \bar{z})$.

$$B_2\sigma_3(z, \bar{z}) = F_3(z, \bar{z}), \tag{14}$$

где

$$B_2\sigma_3 = i\omega_0\sum_{s=1}^{4}(-1)^{s-1}\Big(\frac{\partial\sigma_3}{\partial z_s}z_s - \frac{\partial\sigma_3}{\partial\bar{z}_s}\bar{z}_s\Big) - A\sigma_3.$$

С целью сокращения, выражение для $F_3(z, \bar{z})$ опущено. Оператор $B_2$ является диагональным на пространстве многочленов $z, \bar{z}$ со значениями из $\mathbb{C}^2$ и, кроме того, имеет место равенство

$$B_2 p z^\alpha\bar{z}^\beta = (i\omega_0\big(e, (\alpha - \beta)\big)E - A)p z^\alpha\bar{z}^\beta, \quad p \in \mathbb{C}^2,$$

где $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} z_4^{\alpha_4}$, $\bar z^\beta = \bar z_1^{\beta_1} \bar z_2^{\beta_2} \bar z_3^{\beta_3} \bar z_4^{\beta_4}$, $e = (1,-1,1,-1)$, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^4$, $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, $\beta = (\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ – целочисленные векторы с неотрицательными компонентами.

Из необходимого условия разрешимости уравнения (14) находим функции $a_s(z,\bar z), s = \overline{1,4}$, удовлетворяющие условию $S^1$ – эквивариантности. Оставшиеся в результате указанного выбора $a_s(z,\bar z)$ резонансные мономы, в соответствии с методом Галеркина [9], зануляем и находим $\sigma_3(z,\bar z)$ в той же форме, что и свободный член уравнения (14). Подставим найденные $a_s(z,\bar z), s = \overline{1,4}$ в равенство (13). В результате получим следующую резонансную, $S^1$ – эквивариантную систему уравнений

$$\begin{aligned}
\dot z_1 &= z_1\big(i\omega_0 - \delta(-\lambda_0 + |z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 2|z_3|^2 + 2|z_4|^2)\big) - \delta \bar z_2^2 z_4,\\
\dot z_2 &= z_2\big(-i\omega_0 - \delta(-\bar\lambda_1 + 2|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_3|^2 + 2|z_4|^2)\big) - \delta \bar z_1^2 z_3,\\
\dot z_3 &= z_3\big(i\omega_0 - \delta(-\lambda_1 + 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + |z_3|^2 + 2|z_4|^2)\big) - \delta z_1^2 z_2,\\
\dot z_4 &= z_4\big(-i\omega_0 - \delta(-\bar\lambda_2 + 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 2|z_3|^2 + |z_4|^2)\big) - \delta z_1 z_2^2.
\end{aligned} \tag{15}$$

Ясно, что периодическим решениям системы (15) соответствуют периодические решения уравнения (3). Рассмотрим в этой связи вопрос об устойчивости периодических решений системы (15), соответствующих бегущим волнам $\hat w_0, \hat w_1^{\pm}$.

В частности, исследуем вопрос об устойчивости решения системы (15)

$$\varphi_0(t) = \big(Re\lambda_0\big)^{\frac12}\big(e^{i\omega_0 t}, e^{-i\omega_0 t}, 0, ..., 0\big)^T.$$

С этой целью воспользуемся стандартной техникой: линеаризуем систему (15) на решении $\varphi_0(t)$. Полученная в результате система приводится к системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, матрица коэффициентов которой является блочно диагональной. Одним из её блоков является матрица

$$\begin{pmatrix} -Re\lambda_0 & -Re\lambda_0 \\ -Re\lambda_0 & -Re\lambda_0 \end{pmatrix},$$

собственные значения которой, в силу (4), 0 и -2. Блоками указанной матрицы также являются $A_{0,1^-}, \bar A_{0,1^+}$, где

$$A_{0,1^-} = \begin{pmatrix} Re\lambda_1 - 2Re\lambda_0 - iIm\lambda_1 & -Re\lambda_0 \\ -Re\lambda_0 & Re\lambda_1 - 2Re\lambda_0 + iIm\lambda_1 \end{pmatrix},$$

а её одномерные блоки имеют вид $(Re\lambda_2 - Re\lambda_0 + iIm\lambda_2)$ и ей комплексно сопряженная величина.

Несложный анализ приводит к заключению, что устойчивость $\varphi_0(t)$ определяется матрицами $A_{0,1^-}, \bar A_{0,1^-}$. Анализ устойчивости этих матриц приводит к вопросу об устойчивости многочлена второй степени с вещественными коэффициентами, для устойчивости которого, согласно критерию Рауса-Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned}
&4Re\lambda_0 - 2Re\lambda_1 > 0,\\
&(Re\lambda_1 - 2Re\lambda_0)^2 - Re\lambda_0^2 + Im\lambda_1^2 > 0.
\end{aligned}$$

Это условие, в силу определения (4), выполняется при любом выборе параметра $r$. Следовательно, решение $\varphi_0(t)$, а значит, и соответствующая ему бегущая волна $w_0$ уравнения (3), рождается устойчивой и остаётся таковой при любом выборе $r > 0$.

Действуя как и выше, легко устанавливается, что устойчивость периодического решения

$$\varphi_1^+(t) = \big(Re\lambda_1\big)^{\frac{1}{2}}(0, 0, e^{i\omega_1 t}, e^{-i\omega_1 t}, 0, ..., 0)^T,$$

где $\omega_1 = -\omega_0 + \delta Im\bar{\lambda}_1$ определяется устойчивостью матриц $A_{1+,0}$, $\bar{A}_{1+,0}$, где

$$A_{1+,0} = \begin{pmatrix} Re\lambda_0 - 2Re\lambda_1 - i(Im\lambda_1 - Im\lambda_0) & -Re\lambda_1 \\ -Re\lambda_1 & Re\lambda_2 - 2Re\lambda_1 + i(Im\lambda_1 - Im\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

Анализ устойчивости матриц $A_{1+,0}$, $\bar{A}_{1+,0}$ приводит к вопросу об устойчивости многочлена четвертой степени с вещественными коэффициентами:

$$\lambda^4 + \lambda^3 2\alpha_1 + \lambda^2(2\beta_1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 2\lambda(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) + (\beta_1^2 + \beta_2^2), \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \alpha^1_{1+,0} = 4Re\lambda_1 - Re\lambda_0 - Re\lambda_2,\\
&\alpha_2 = \alpha^2_{1+,0} = Im\lambda_2,\\
&\beta_1 = \beta^1_{1+,0} = (2Re\lambda_1 - Re\lambda_0)(2Re\lambda_1 - Re\lambda_2) - Re\lambda_1^2 + Im\lambda_1(Im\lambda_1 - Im\lambda_2),\\
&\beta_2 = \beta^2_{1+,0} = -Im\lambda_1(Re\lambda_0 - Re\lambda_2) + Im\lambda_2(Re\lambda_0 - 2Re\lambda_1).
\end{aligned}$$

Введем, согласно [4], эффективные длины диффузий:

$$a = \frac{d_u + d_v}{2}, \quad b = \frac{d_{vu} - \omega_0^2 d_{uv}}{2\omega_0}. \tag{17}$$

Используя критерий Рауса-Гурвица, возможности математической программы MAPLE и обозначения (17), (4) найдены необходимые и достаточные условия устойчивости многочлена (16):

$$\begin{aligned}
&a\Big(2 - 5a\frac{1}{r^2}\Big) - 3b^2\frac{1}{r^2} > 0,\\
&\frac{1}{r^2}2a\Big(2 - 5a\frac{1}{r^2}\Big) + 2b^2\frac{1}{r^4}(21 - 8a) + 8 > 0,\\
&16\Big(1 + 4b^2\frac{1}{r^4}\Big)\Big[a\Big(2 - 5a\frac{1}{r^2}\Big) - b^2\frac{1}{r^2}\Big(4a^2\frac{1}{r^4} - 16a\frac{1}{r^2} + 15\Big)\Big] > 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Из системы (18) видно, что выполнение первого условия достаточно для выполнения остальных условий данной системы. Следовательно, при $r \to \infty$, для устойчивости матриц $A_{1+,0}$, $\bar{A}_{1+,0}$ достаточно чтобы:

$$r^2 > \frac{5a^2 + 3b^2}{2a}. \tag{19}$$

Отсюда следует, что при прохождении $r$ значения $r^2 = a$ из нулевого неустойчивого состояния равновесия системы (15) бифурцирует периодическое по $t$ решение $\varphi_1^+(t)$, которое в момент рождения тоже является неустойчивым. Затем при увеличении $r$ и прохождении им своего критического значения $r^2 = \frac{5a^2+3b^2}{2a}$ решение $\varphi_1^+(t)$, а, следовательно, и соответствующая ему бегущая волна $w_1^+$ задачи (3), обретает устойчивость.

Отметим особенность динамики периодических решений $\varphi_0(t)$, $\varphi_1^+(t)$ системы (15). Из проведенного выше анализа видно, что переменная $z_4$ фактически не влияет на устойчивость $\varphi_0(t)$ и её с указанной точки зрения можно положить равной нулю. В свою очередь, переменная $z_3$ не влияет на устойчивость $\varphi_1^+(t)$. Занулив несущественные для устойчивости $\varphi_0(t)$, $\varphi_1^+(t)$ переменные можно понизить тем самым размерность системы (15) на два порядка.

**3. Устойчивость бегущих волн $\mathbf{w_k^+}$.** Перейдём теперь к вопросу об устойчивости бегущей волны $w_k^+$ при фиксированном значении $k$. Рассмотрим вопрос об устойчивости бегущей волны $w_k^+$, в связи с воздействием на неё пары бегущих волн $w_s^-, w_{2k+s}^+$, $s = 0, 1, 2....$ С этой целью, согласно [9], построим приближенные решения уравнения (3) в виде:

$$w = z_1 e^{ik\theta} q_k(\delta) + z_2 e^{is\theta} \bar{q}_s(\delta) + z_3 e^{in\theta} q_n(\delta) + \text{к.с.} + \delta\sigma_3(z_1 e^{ik\theta}, z_2 e^{is\theta}, z_3 e^{in\theta}, \text{к.с.}), \quad (20)$$

где $n = 2k + s$, а $z = (z_1, z_2, z_3)$ удовлетворяет $S^1$ – эквивариантной системе уравнений:

$$\dot{z}_j = z_j(\mu_j + \delta f_j(z, \bar{z}) + ...), \ j = 1, 2, 3, \quad (21)$$

где $\mu_1 = \tilde{\lambda}_k, \ \mu_2 = \tilde{\lambda}_{-s}, \ \mu_3 = \tilde{\lambda}_n, \quad \tilde{\lambda}_{-s} = \bar{\tilde{\lambda}}_s$.

Подставим (20)– (21) в уравнение (3) и выполним замену $z_1 e^{ik\theta} \mapsto z_1$, $z_2 e^{is\theta} \mapsto z_2$, $z_3 e^{in\theta} \mapsto z_3$. Затем приравняем в обеих частях полученного равенства коэффициенты при $\delta$. В результате относительно $\sigma_3$ получим линейное неоднородное уравнение, из необходимого условия разрешимости которого находим функции $f_j(z, \bar{z})$, удовлетворяющие условию $S^1$ – эквивариантности. Подставим найденные значения $f_j(z, \bar{z})$ в (21). В результате получим следующую резонансную $S^1$ – эквивариантную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_1(i\omega_0 - \delta(-\lambda_k + |z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 2|z_3|^2)),\\
\dot{z}_2 &= z_2(-i\omega_0 - \delta(-\lambda_{-s} + 2|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_3|^2)) - \delta\bar{z}_1^2 z_3,\\
\dot{z}_3 &= z_3(i\omega_0 - \delta(-\lambda_n + 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + |z_3|^2)) - \delta z_1^2 \bar{z}_2.
\end{aligned} \quad (22)$$

Легко убедиться, что система (22) имеет периодическое по $t$ решение

$$\varphi_k^+(t, \delta) = \rho_k^{1/2}(e^{i\omega_k t}, e^{-i\omega_k t}, 0, ..., 0)^T, \quad \omega_k = \omega_0 + \delta Im\lambda_k.$$

Этому решению соответствует бегущая волна $w_k^+$ уравнения (3).

Анализ устойчивости $\varphi_k^+(t, \delta)$ приводит к симметрической блочно-диагональной матрице. Её блоками являетя матрица

$$S = \begin{pmatrix} -Re\lambda_k & -Re\lambda_k \\ -Re\lambda_k & -Re\lambda_k \end{pmatrix},$$

собственные значения которой 0 и $-2Re\lambda_k$, и матрицы $A_{k^+,s^-}$, $\overline{A}_{k^+,s^-}$, где

$$A_{k^+,s^-} = \begin{pmatrix} Re\lambda_s - 2Re\lambda_k + i(Im\lambda_k + Im\lambda_{-s}) & -Re\lambda_k \\ -Re\lambda_k & Re\lambda_n - 2Re\lambda_k + i(Im\lambda_n - Im\lambda_k) \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$n = 2k + s$.

Таким образом, характер устойчивости решения $\varphi_k^+(t,\delta)$ системы (22) определяется матрицами $A_{k^+,s^-}$, $\overline{A}_{k^+,s^-}$.

Аналогичным образом можно показать, что взаимодействие бегущей волны $w_k^+$ с парой бегущих волн $w_s^+$, $w_{2k-s}^+$, $0 \le s < k$ описывается системой уравнений (22), где $\bar{z}_2 \mapsto z_2$, $n = 2k - s$.

Легко убедиться, что устойчивость $w_k^+$ в этом случае определяется матрицами $A_{k^+,s^+}$, $\overline{A}_{k^+,s^+}$, где

$$A_{k^+,s^+} = \begin{pmatrix} Re\lambda_s - 2Re\lambda_k + i(Im\lambda_k + Im\lambda_s) & -Re\lambda_k \\ -Re\lambda_k & Re\lambda_n - 2Re\lambda_k + i(Im\lambda_n - Im\lambda_k) \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$n = 2k - s, \quad 0 \le s < k$.

Таким образом, характер устойчивости бегущей волны $w_k^+$ определяется характером воздействия на неё пар бегущих волн $w_s^-, w_{2k+s}^+, s > 0$ и $w_s^+$, $w_{2k-s}^+$, $0 \le s < k$. Следовательно, взаимодействие бегущих волн уравнения (3) подчинено принципу 1:2 [9]. При этом устойчивость $w_k^+$, в указанном взаимодействии, определяется матрицами $A_{k^+,s^-}$, $A_{k^+,s^+}$, соответственно.

Обоснованием проведенного выше анализа устойчивости бегущих волн $w_k^+$ уравнения (3) является следующая теорема.

**Теорема.** *Пусть для некоторого фиксированного* $k \in \mathbb{Z}_+$ *и* $r > 0$ *выполнено условие* $r^2 > k^2 \frac{d_u + d_v}{2}$. *Тогда уравнение* (3) *имеет периодические по* $t$ *решения* $w_k(\eta^\pm, \delta) = \hat{w}_k^\pm + O(\delta^2)$, *где* $\eta^\pm = \omega_k(\delta)t \pm k\theta$, $\omega_k(\delta) = \hat{\omega}_k(\delta) + O(\delta^2)$, $\theta = \frac{x}{r}$, *а* $\hat{w}_k^+$, $\hat{\omega}_k$ *определены в* (11).
*Бегущая волна* $w_k^+(\delta)$ *экспоненциально орбитально устойчива тогда и только тогда, когда:*
*1. Для любого* $s \ge 0$ *матрица* $A_{k^+,s^-}$ *устойчива;*
*2. Для любого* $0 \le s < 2k$ *матрица* $A_{k^+,s^+}$ *устойчива.*

*Доказательство.* Центральный момент доказательства теоремы состоит в исследовании свойств устойчивости в фазовом пространстве $H$ уравнения

$$\dot{\xi} = L(\delta)\xi - 2\delta Re\lambda_k \mathfrak{F}\xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^2, \quad (25)$$

где

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2i\omega_0\big(e^{2i\eta^+} - e^{-2i\eta^+}\big) & 2 + \big(e^{2i\eta^+} + e^{-2i\eta^+}\big) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

полученного при линеаризации уравнения (3) на приближенном решении $\hat{w}_k^+$.

Разложение вектора $\xi = \xi(t,\theta,\delta)$ по собственному базису оператора $L(\delta)$ имеет вид:

$$\xi(t,\theta,\delta) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} q_s(\delta) e^{is\theta} z_s(t).$$

Введем в пространстве $H$ ортопроектор $P$

$$P\xi = \sum_{s=-k_0}^{+k_0} P_s\xi, \quad P_s\xi = e^{is\theta}q_s(\delta)z_s, \quad z_s = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi r} e^{-is\theta}p_s(\delta)\xi(\theta)d\theta,$$

где выбор $k_0$ осуществим позже. Вектор $p_s(\delta)$, удовлетворяющий равенству $L^*(\delta)p_s = \tilde{\lambda}_s p_s$, выберем таким образом, чтобы $(p_s, q_s) = 1$.

Воспользуемся представлением $\xi = h + w$, где $h = P\xi, w = (E-P)\xi, E-$ единичный оператор. В полученной относительно $h, w$ системе положим $w = 0$. В результате получим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$q_n e^{in\theta}\dot{z}_n = \tilde{\lambda}_n q_n e^{in\theta} z_n - \delta\rho_k P_n\big(3e^{2i\eta^+} - e^{-2i\eta^+} + 2\big)\sum_{s=0}^{k_0}(q_s - \bar{q}_s)e^{is\theta}z_s -$$
$$- \delta\rho_k P_n\big(3e^{-2i\eta^+} - e^{2i\eta^+} + 2\big)\sum_{s=0}^{k_0}(\bar{q}_s - q_s)e^{-is\theta}\bar{z}_s, \quad s = 0, 1, ...$$

Для исследования устойчивости данной системы воспользуемся принципом сведения. В результате получим следующую систему с периодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_n &= (i\omega_0 + \delta\lambda_n)z_n - \delta\rho_k\big(e^{2i\omega_k t}\bar{z}_{2k-n} - 3e^{-2i\omega_k t}z_{2k+n} + 2z_n\big), \qquad n < k,\\
\dot{z}_{-n} &= (-i\omega_0 + \delta\lambda_{-n})z_{-n} - \delta\rho_k\big(e^{-2i\omega_k t}z_{2k+n} + e^{2i\omega_k t}z_{n-2k} + 2z_{-n}\big), \quad n > k,\\
\dot{z}_{-n} &= (-i\omega_0 + \delta\lambda_{-n})z_{-n} - \delta\rho_k\big(-3e^{2i\omega_k t}z_{n-2k} + 2z_{-n}\big), \quad n > k, \ n + 2k > k_0.
\end{aligned}$$

В полученной системе произведем замену

$$\begin{aligned}
z_n &\mapsto z_n + i\delta\rho_k\frac{3}{2\omega_k}e^{-2i\omega_k t}\bar{z}_{2k+n}, \quad n < k,\\
z_{-n} &\mapsto z_{-n} - i\delta\rho_k\frac{1}{2\omega_k}e^{2i\omega_k t}z_{n-2k}, \quad n > k.
\end{aligned}$$

Затем с помощью замены $z_n \mapsto e^{i\omega_k t}z_n, \ \ |n| < k_0$ перейдем к линейной системе обыкновенных диффернциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которая членами $O(\delta^2)$ отличается от системы

$$\begin{aligned}
\dot{z}_n &= \delta(-iIm\lambda_k + \lambda_n - 2Re\lambda_k)z_n - \delta Re\lambda_k\bar{z}_{2k-n}, \quad n < k,\\
\dot{z}_{-n} &= \delta(iIm\lambda_k + \lambda_{-n} - 2Re\lambda_k)z_{-n} - \delta Re\lambda_k z_{2k+n}, \quad n > k,\\
\dot{z}_n &= \delta(-iIm\lambda_k + \lambda_n - 2Re\lambda_k)z_n, \qquad\qquad n + 2k > k_0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Матрица коэффициентов системы (27) является блочно-диагональной, её блоками являются матрица $S$, а также матрицы $A_{k^+,s^-}, \ 2k + s < k_0$, и $A_{k^+,s^+}, \ s < k_0$, определенные в (23), (24), соответственно. Одномерными блоками указанной матрицы будет $Re\lambda_n - 2Re\lambda_k + i(Im\lambda_n - Im\lambda_k)$ и ей комплексно сопряженная величина.

Таким образом, устойчивость системы (27) определяется матрицами $A_{k^+,s^-}$, $\bar{A}_{k^+,s^-}$, $2k+s<k_0$, и $A_{k^+,s^+}, \bar{A}_{k^+,s^+}$, $s<k_0$. Следовательно, экспоненциальная орбитальная устойчивость приближенного решения $w_k^+$ имеет место тогда, и только тогда, когда выполнены условия 1) и 2) теоремы.

Перейдем к вопросу о существовании периодического решения $w_k(\eta^+,\delta)$ уравнения (3). Положим в (3) $w=y(\eta,\delta)=y(\omega t+k\theta)$. В результате для определения $2\pi$ – периодического решения $y(\eta,\delta)$ и $\omega=\hat{\omega}_k+O(\delta^2)$ получим сингулярно возмущенное дифференциально разностное уравнение в пространстве $H^2$:

$$\omega y^{'}=(A+\delta K)y+\delta D\frac{k^2}{r^2}y^{''}+\mathfrak{R}(y(\eta,\delta)). \tag{28}$$

Согласно (11) уравнение (28) при $\omega=\hat{\omega}_k$ имеет приближенное по невязке порядка $O(\delta^2)$ $2\pi$ – периодическое по $t$ решение $\hat{y}=\hat{w}(\eta^+,\delta)$.

Из вышеизложенного следует, что при соответствующем выборе $\omega$ можно построить приближенные $2\pi$ – периодические решения уравнения (28) с любой, наперед заданной, точностью.

Линеаризуем (28) на приближенном решении $\hat{y}$. В результате получим:

$$\begin{aligned}G(\delta)z\equiv-\omega_k z^{'}+(A+\delta K)z+\delta D\frac{k^2}{r^2}z^{''}-4\delta Re\lambda_k\begin{pmatrix}0 & 0\\ -2\omega_0\sin 2\eta & 1+\cos 2\eta\end{pmatrix}z+\\ +(\delta^2\mathfrak{F}_1(\eta)+\delta^3\mathfrak{F}_2(\eta))z=0,\end{aligned} \tag{29}$$

где $\mathfrak{F}_1(\eta),\mathfrak{F}_2(\eta)$ – $2\pi$ периодические по $\eta$ функции, непрерывные в пространстве $H^2$ и дифференцируемые по переменной $\eta$. Замена $y=\hat{y}+z$ приводит (29) к виду:

$$G(\delta)z=F(\eta,z,z^{'},\delta,\varepsilon),\quad \varepsilon=\omega-\hat{\omega}_k, \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned}&F(\eta,z,z^{'},\delta,\varepsilon)=\varepsilon(z^{'}+\hat{y}^{'})+f_0(\eta,\delta)+f_2(\eta,z,\delta),\\ &f_0(\eta,\delta)=\delta^2\begin{pmatrix}0\\ 4cd\cos\eta-2c^2\omega_0\sin\eta+\delta c^2 d\end{pmatrix},\\ &f_2(\eta,z,\delta)=2\delta\begin{pmatrix}0\\ 2\hat{y}_1z_1z_2+\hat{y}_2z_1^2+z_1^2z_2\end{pmatrix},\quad \hat{y}=\begin{pmatrix}\hat{y}_1\\ \hat{y}_2\end{pmatrix},\quad z=\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix},\\ &c=-2\frac{k^2}{r^2}d_{uv}\cos\eta-Re\lambda_k\frac{1}{2\omega_0}\Big(\sin 3\eta+2\cos\eta\Big),\\ &d=2\cos\eta\left(\frac{k^2}{r^2}d_u+Re\lambda_k\right)-2Im\lambda_k\sin\eta-\frac{1}{2}Re\lambda_k\Big(3\cos 3\eta+2\cos\eta\Big).\end{aligned}$$

Несложно убедиться, что функция $f_2(\eta,z,\delta)$ удовлетворяет условию Липшица

$$||f_2(\eta,x_1,\delta)-f_2(\eta,x_2,\delta)||_H<\delta\gamma\max(||x_1||_{H^1},||x_2||_{H^1})||x_1-x_2||_H, \tag{31}$$

Кроме того, $||f_0(\eta,\delta)||_H<\delta^2\gamma,\quad \gamma=const,\quad \gamma>0.$

Изучим условия разрешимости уравнения (30) в пространстве $H$. Согласно [1] задача (30) разрешима, если её правая часть ортогональна решению соответствующей однородной сопряженной задачи.

Дальнейший анализ задачи (30) опирается на свойства спектральной задачи

$$G(\delta)z = \lambda z. \tag{32}$$

Рассмотрим её как возмущение задачи

$$-\hat{\omega}_k z' + (A + \delta K)z + \delta D\frac{k^2}{r^2}z'' = \lambda z. \tag{33}$$

При $\delta = 0$ собственному значению $\lambda = 0$ задачи (33) отвечает собственная функция $\varphi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} e^{i\eta(0)}$, поэтому дальнейший анализ существования $2\pi$ – периодических решений задачи (30) достаточно провести в окрестности нуля. Положим в (33)

$$z = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} e^{i\eta} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega_0 \end{pmatrix} e^{-i\eta} + \delta z_1(\eta) + \delta^2 z_2(\eta) + ...,$$
$$\lambda = \delta\mu_1 + \delta^2\mu_2 + ...$$

В полученном равенстве приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\delta$. В результате относительно вектор-функций $z_k(\eta)$ получим рекуррентную последовательность линейных неоднородных уравнений. Рассмотрим уравнение относительно $z_1(\eta)$.

$$G(0)z_1(\eta) = F_1(\eta, \delta), \tag{34}$$

где

$$F_1(\eta,\delta) = \alpha\left(iIm\lambda_k E - K + \frac{k^2}{r^2}D + \mu_1 E\right)\begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} e^{i\eta} + 2i\omega_0 Re\lambda_k \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha + \beta \end{pmatrix} e^{i\eta} +$$
$$+ \beta\left(-iIm\lambda_k E - K + \frac{k^2}{r^2}D + \mu_1 E\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega_0 \end{pmatrix} e^{-i\eta} - 2i\omega_0 Re\lambda_k \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha + 2\beta \end{pmatrix} e^{-i\eta} +$$
$$+ 6i\omega_0 Re\lambda_k \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha e^{3i\eta} - \beta e^{-3i\eta} \end{pmatrix}.$$

Для разрешимости (34) необходима ортогональность функции $F_1(\eta, \delta)$ решениям задачи

$$G^*(0)\xi(\eta) = 0,$$

где $G^*(0)\xi = \omega_0\xi' + A^T\xi$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$. Легко убедиться, что это условие выполняется при

$$(\alpha\left(iIm\lambda_k E - K + \frac{k^2}{r^2}D + \mu_1 E\right)\begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} + 2i\omega_0 Re\lambda_k \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha + \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i\omega_0} \end{pmatrix}) = 0,$$
$$(\beta\left(-iIm\lambda_k E - K + \frac{k^2}{r^2}D + \mu_1 E\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega_0 \end{pmatrix} - 2i\omega_0 Re\lambda_k \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha + 2\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i\omega_0} \end{pmatrix}) = 0.$$

После преобразования этой системы, используя равенство (4), получим систему

$$\alpha(Re\lambda_k - \mu_1) - Re\lambda_k(2\alpha + \beta) = 0, \quad \beta(Re\lambda_k - \mu_1) - Re\lambda_k(\alpha + 2\beta) = 0,$$

Отсюда следует, что вектор $(\alpha, \beta)^T$ является собственным вектором, а $\mu_1$ – соответствующее ему собственное значение матрицы $S$. Очевидно, что собственному значению $\mu_1 = 0$ отвечает собственный вектор $(\alpha, \beta)^T = (1, -1)^T$, а $\mu_1 = -2Re\lambda_k$ $-(\alpha, \beta)^T = (1, 1)^T$. Следовательно, $\hat{z}_1 = 2(\cos\eta, -\omega_0\sin\eta)^T + O(\delta)$ – собственная функция оператора $G(\delta)$, отвечающая собственному значению $\lambda_1 = -2Re\lambda_k + O(\delta^2)$. Нулевому, с точностью $O(\delta^2)$, собственному значению отвечает собственная функция $\hat{z}_2 = \rho_k^{-\frac{1}{2}}\big(\hat{y}'(\eta) + O(\delta^2)\big)$.

Легко убедиться, что нулевому собственному значению, с точностью $O(\delta^2)$, операторов $G(\delta)$ и $G^*(\delta)$ отвечает одна и та же собственная функция $\hat{z}_2$, в силу самосопряженности матрицы $S$.

Добавим в левую часть уравнения (34) слагаемое $-(z, h^0)G(\eta, \delta)h^0||h^0||^{-2}$, где $h^0 = \rho_k^{-\frac{1}{2}}\hat{y}'(\eta)$. В результате получим спектральную задачу

$$\tilde{G}(\delta)z = \lambda z,$$

где $\tilde{G}(\delta) = G(\delta)z - (z, h^0)G(\eta, \delta)h^0||h^0||^{-2}$. Легко убедиться, что $\tilde{G}h^0 = 0$ и свойства оператора $\tilde{G}(\delta)$ совпадают со свойствами $G(\delta)$. В частности, собственным значением $\tilde{G}(\delta)$ будет $-2Re\lambda_k + O(\delta^2)$, которому отвечает собственная функция $h^1 = \hat{z}_1 + O(\delta)$.

Аналогично вышеизложенному, рассмотрим задачу $\tilde{G}^*(\delta)q = 0$, где $\tilde{G}^*(\delta)$ сопряженный к $\tilde{G}(\delta)$ оператор. Из множества решений указанной задачи выберем такие $q$, которые удовлетворяют условию $(h^0, q) = 1$.

Пусть $H$ разложимо по $\{0, -2Re\lambda_k + O(\delta^2)\}$. В силу альтернативы Фредгольма [13], уравнение

$$\tilde{G}(\delta)z = g \tag{35}$$

разрешимо тогда, и только тогда, когда $(g, q) = 0$, где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. В случае выполнения этого равенства уравнение (35) имеет единственное решение $z = \aleph g$, такое, что $(\aleph g, h^0) = 0$.

Пусть $\hat{P}$ проектор пространства $H$ на $Ker(\tilde{G}) \oplus M_1$, где $M_1 = \mathrm{Span}\{h^1\}$. В силу построения $\hat{w}_k^+$ справедливо неравенство: $||\hat{P}f_0(\cdot, \delta)|| < \gamma\delta^3$.

Вернемся к уравнению (30). Заменим $G(\delta)$ на $\tilde{G}(\delta)$. Учтем эту замену и в правой части (30), получим:

$$\tilde{G}(\delta)z = \tilde{F}(\eta, z, z', \delta, \varepsilon),$$

где $\tilde{F}(\eta, z, z', \delta, \varepsilon) = F(\eta, z, z', \delta, \varepsilon) - (z; h^0)G(\eta, \delta)h^0||h^0||^{-2}$.

Следует отметить, что согласно проведенному анализу задачи (32)

$$||G(\delta)h^0|| < \gamma\delta, \quad ||\hat{P}G(\delta)h^0|| < \gamma\delta^2.$$

Рассмотрим в пространстве $H^1$ уравнение

$$w - \aleph\Big(\tilde{F}(\eta, w, w', \delta, \varepsilon) - (g, \tilde{F}(\eta, w, w', \delta, \varepsilon))h^0\Big) = 0. \tag{36}$$

В силу изложенного, метод последовательных приближений с нулевым начальным значением, применимый к этому уравнению приводит в пространстве $H$ к последовательности, сходящейся равномерно по $\varepsilon$ в области $0 \leq \delta \leq \delta_0, \quad |\varepsilon| \leq \gamma\delta^2$. Предел этой последовательности $w^*(\varepsilon, \delta)$ и будет решением уравнения (36). Поскольку $f_0(\eta, \delta) = O(||\delta||^2)$, то, согласно (31), существует единственное решение уравнения (36), удовлетворяющее неравенству $||w^*(\varepsilon, \delta)||_1 < \gamma\delta^2, \quad \gamma - const$. Функция $w^*(\varepsilon, \delta)$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{G}(\delta)z = \tilde{F}(\eta, z, z', \delta, \varepsilon) - \mathfrak{M}(\varepsilon, \delta)h^0,$$

где $\mathfrak{M}(\varepsilon, \delta) = (q, \tilde{F}(\eta, w^*, w^{*'}, \delta, \varepsilon))$.

Следовательно, вопрос о разрешимости уравнения (30) в пространстве $H$ сводится к вопросу о разрешимости относительно $\varepsilon$ уравнения

$$\mathfrak{M}(\delta, \varepsilon) = 0. \tag{37}$$

Несложно убедиться, что

$$\mathfrak{M}(\delta, \varepsilon) = -(Re\lambda_k)^{\frac{1}{2}}\varepsilon + \delta^2\sigma(\delta, \varepsilon),$$

где $\sigma(\delta, \varepsilon)$ – непрерывно дифференцируема по $\varepsilon = \omega - \hat{\omega}_k$.

Следовательно, существует, и при том единственное, решение уравнения (37), такое, что

$$\varepsilon = \varepsilon(\delta), \quad ||\varepsilon(\delta)|| < \gamma\delta^2.$$

Следовательно, $w^*(\varepsilon, \delta)$ решение уравнения (30). □

Ясно, что сответствующий результат имеет место относительно периодических по $t$ решений $w_k^-(\eta, \delta)$ уравнения (3).

Опираясь на теорему, можно получить легко проверяемые условия экспоненциальной орбитальной устойчивости бегущей волны $w_k^+$ задачи (3).

Используя стандартный подход к изучению устойчивости матрицы $A_{k^+, s^+}$, приходим к необходимости изучения свойств устойчивости многочлена четвертой степени с вещественными коэффициентами (16), где

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \alpha^1_{k^+, s^+} = 4Re\lambda_k - Re\lambda_s - Re\lambda_n, \\
&\alpha_2 = \alpha^2_{k^+, s^+} = Im\lambda_n - Im\lambda_s, \\
&\beta_1 = \beta^1_{k^+, s^+} = (2Re\lambda_k - Re\lambda_s)(2Re\lambda_k - Re\lambda_n) - \\
&- Re\lambda_k^2 - (Im\lambda_s - Im\lambda_k)(Im\lambda_k - Im\lambda_n), \\
&\beta_2 = \beta^2_{k^+, s^+} = (Im\lambda_s - Im\lambda_k)(Re\lambda_n - 2Re\lambda_k) + (Im\lambda_k - Im\lambda_n)(Re\lambda_s - 2Re\lambda_k).
\end{aligned} \tag{38}$$

Используя критерий Рауса-Гурвица, найдены необходимые и достаточные условия устойчивости многочлена (16), где $\alpha_i, \beta_i,\ i = 1, 2$ определены в (38).

$$
\begin{aligned}
&4a\left(1 - a\frac{k^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{k^2}{r^2}(2\frac{b^2}{a} + 3a)\right) + O\left(\frac{1}{r^4}\right) > 0,\\
&4\left(1 - a\frac{k^2}{r^2}\right)^3 + O\left(\frac{1}{r^6}\right) > 0,\\
&32a\left(1 - 3a\frac{k^2}{r^2}\right)\left(1 - a\frac{k^2}{r^2}\right)^4 + O\left(\frac{1}{r^{10}}\right) > 0.
\end{aligned}
$$

Очевидно, что для выполнения условий этой системы достаточно, чтобы при $r \to \infty$

$$
r^2 > k^2\left(2\frac{b^2}{a} + 3a\right). \tag{39}
$$

Из условия (39) следует, что число экспоненциально орбитально устойчивых бегущих волн уравнения (3), а значит и задачи (1)–(2), неограниченно растёт, когда $r \to \infty$. При этом наличие перекрёстной диффузии $d_{uv},\ d_{vu}$ замедляет этот рост. Следует отметить, что при $b = 0$, условие устойчивости $r^2 > 3a^2$ бегущей волны $w_k^+$ согласуется с условием устойчивости, полученным в работе [4].

Аналогичным образом можно получить условие устойчивости матрицы $A_{k^+,s^-}$.

Итак, для устойчивости бегущей волны $w_k^+$ уравнения (3) при больших $r > 0$ необходимо выполнение условия (39). Если это условие нарушается, то волна $w_k^+$ является неустойчивой. Отметим, что в случае анализа устойчивости бегущей волны $w_1^+$ было получено достаточное условие устойчивости

$$
r^2 > \frac{5a^2 + 3b^2}{2a}.
$$

Используя (39), в случае $k = 1$, получим необходимое при $r \to \infty$ условие

$$
r^2 > \frac{3a^2 + 2b^2}{a}
$$

устойчивости $w_1^+$. Следовательно, есть основания полагать, что условие (39) является и необходимым, и достаточным для орбитальной асимптотической устойчивости бегущей волны $w_k^+$ при $r \to \infty$.

**4. Заключение.** Согласно проведенному анализу динамики бегущих волн задачи (1)–(2) установлено, что в области $r^2 > ak^2$ существуют $2\pi$-периодические решения типа бегущая волна $w_k = \hat{w}_k(\eta^\pm, \delta) + O(\delta^2),\ k = 0, 1, ...,$ где $\eta^\pm = \omega_k(\delta)t \pm k\theta$, $\omega_k(\delta) = \omega_0 + \delta Im\lambda_k + O(\delta^2)$, а $\hat{w}_k(\eta^\pm, \delta)$ определено в (11). При этом устойчивость $w_k^+$ – бегущей волны уравнения (3), определяется характером воздействия на неё пар бегущих волн $w_s^+, w_{2k-s}^+, 0 \le s < k$ и $w_s^-, w_{2k+s}^+, 0 \le s$.

Установлено, что так называемая стоячая волна $w_0$ задачи (1)–(2) существует при любом выборе параметра $r$ и является экспоненциально орбитально устойчивой. При увеличении параметра $r$ и прохождении его через значение $r_1^*$ из неустойчивого нулевого состояния равновесия бифурцирует пара бегущих волн $w_1^\pm$, которая в момент рождения является также неустойчивой. Подрастая по амплитуде, при увеличении $r$ и прохождении его через критическое значение $r^2_{\text{кр}} \simeq \left(2\frac{b^2}{a} + 3a\right)$, бегущая волна $w_1^+$ преодолевает давление бегущих волн $w_0, w_2^+$ и обретает устойчивость. Далее, когда $r^2 > 4a$ из неустойчивого состояния равновесия $w_1^+$ бифурцирует пара бегущих волн $w_2^\pm$, которая в момент рождения тоже является неустойчивой. Лишь при дальнейшем увеличении $r$ и прохождении им некоторого критического значения эта пара обретает устойчивость. Таким образом, при увеличении $r$ растет число устойчивых бегущих волн задачи (1)–(2). Следовательно, в данной задаче, согласно [6], [5], реализуется явление буферности.

Следует отметить, что вопрос о буферности в задаче (1)–(2) тесно связан с вопросом о взаимодействии бегущих волн этой задачи. Установлено, что взаимодействие бегущих волн подчинено **принципу 1:2** [9].

*Характер устойчивости бегущей волны $w_k^+$ полностью определяется воздействием на неё пар бегущих волн $w_s^-, w_{2k+s}^+, s \geq 0$ и $w_s^+, w_{2k-s}^+, 0 \leq s < k$.*

Воздействие указанных пар бегущих волн описывается системой (22), где $n = 2k + s$ в первом $n = 2k - s, z_s \mapsto \bar{z}_s$ во втором случае. Более того, установлено, что на устойчивость бегущей волны $w_k^+$ наиболее сильное воздействие оказывает пара соседних бегущих волн $w_{k-1}^+$, $w_{k+1}^+$.


1. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. – М.: Наука. – 1989.
2. *Романовский Ю.П., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Математическое моделирование в биофизике. – М.:Наука. – 1975. – 237с.
3. *Полякова М.С., Романовский Ю.М., Сидорова Г.А.* О синхронизации автоколебательных химических реакций, протекающих в пространстве // Вестник МГУ, сер. физ. и астроном. – №6. – 1968.
4. *Балкарей Ю.И., Никулин М.Г.* О нелинейных волнах в среде из осцилляторов Ван-дер-Поля, связанных диффузией // ЖТФ. – 1979. – Т.49, №2. – С.231-236.
5. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. – М.: Физматлит. – 2004. – с.406.
6. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Явление буферности в теории горения // ДАН – 2004. – Т.396, №2. – С.170-173.
7. *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. – М.: Физматлит. – 2005.
8. *Белан Е.П.* О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // Мат.физика: анализ и геометрия. – 2005. – Т.1, №1. – С.3-34.
9. *Самойленко А.М., Белан Е.П.* Динамика бегущих волн феноменологического уравнения спинового горения // ДАН. – 2006. – Т.406, №6. – С.738-741.
10. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука. – 1969.
11. *Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища школа. – 1976.
12. *Васильева А.Б., Кащенко С.А., Колесов Ю.С., Розов Н.Х.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Мат.сборник. – 1989. – Т.130(172). – №4(8). – С.488-499.
13. *Дж.Хейл* Теория функционально дифференциальных уравнений. – М.: Мир. – 1984.


*Таврический национальный ун-т*
`olgshiyan@yandex.ru`

Получено 01.03.07