Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

8 • 2009

МЕХАНІКА

УДК 531.36

В. С. Денисенко

О спектральных условиях устойчивости нечетких систем Такаги–Сугено

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Одержано достатні умови стійкості дискретних та імпульсних нечітких систем Такагі–Сугено. Умови стійкості одержані у вигляді обмежень на спектри деяких лінійних операторів.

Актуальными задачами теории разрывных динамических систем является установление общих подходов в задачах устойчивости таких систем [1–5]. Общие результаты в этом направлении получены в работах [2, 3] на основе концепции матричнозначных отображений, сохраняющих устойчивость для разрывных систем. Некоторые приложения этой концепции использованы в [6] при анализе устойчивости непрерывных систем Такаги–Сугено. В настоящей работе для исследования устойчивости нечетких моделей Такаги–Сугено применяется принцип сравнения для разрывных динамических систем и концепция отображений, сохраняющих устойчивость. При этом с единой точки зрения рассматриваются дискретные и импульсные системы.

Опишем общую нечеткую систему Такаги–Сугено. Пусть в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы нечеткие множества M_i с функциями принадлежности $\mu_i\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$, $i = \overline{1,r}$. Относительно функций принадлежности дополнительно предположим, что

$$\mu_i(x) \geqslant 0, \qquad i = \overline{1,r}, \qquad \text{и} \qquad \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x) > 0 \qquad \text{при всех} \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Нечеткая система Такаги–Сугено формализуется следующим образом [6]:

$$\text{если} \qquad x \in M_i, \qquad \text{то} \qquad S_i, \qquad i = \overline{1,r},$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы; S_i — некоторая динамическая (возможно разрывная) система. В нашей работе рассматриваются случаи, когда S_i $(i = \overline{1,r})$ — линейные дискретные и импульсные системы.

Дискретная нечеткая система Такаги–Сугено. Пусть система Такаги–Сугено описывается правилами R_i, $i = \overline{1,r}$:

$$\text{если} \quad x \in M_i, \quad \text{то} \quad x(k+1) = A_i x(k), \quad x(0) = x_0, \quad i = \overline{1,r},$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, A_i — постоянные $n \times n$-матрицы, $i = \overline{1,r}$; $k \in \mathbb{Z}^+$ — параметр дискретного времени.

Тогда динамика такой системы описывается нелинейной системой вида

$$x(k+1) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(x)} \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x) A_i x(k). \tag{1}$$

Систему (1) называют также локально-линейной.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытая связная окрестность состояния равновесия $x = 0$ системы (1). Устойчивость состояния равновесия $x = 0$ локально-линейной системы (1) понимается в классическом смысле.

Пусть $\mathcal{E}$ — пространство симметричных $n \times n$-матриц; $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$ — конус положительно полуопределенных симметричных матриц, т. е. $\mathcal{K} = \{H \in \mathcal{E}, \xi^{\mathrm{T}} H \xi \geqslant 0, \xi \in \mathbb{R}^n\}$, $\mathcal{B}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $\mathcal{B}X = (\operatorname{tr} X)I$, где $\operatorname{tr} X$ — след матрицы X; I — единичная матрица. В дальнейшем изложении все матричные неравенства следует понимать в смысле конуса $\mathcal{K}$. Пусть $\mathcal{F}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — линейный оператор.

Определение 1. Постоянная $\gamma \geqslant 0$ называется константой позитивности оператора $\mathcal{F}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ относительно конуса $\mathcal{K}$, если оператор $\mathcal{F} + \gamma\mathcal{B}$ является положительным относительно конуса $\mathcal{K}$.

Отметим, что вследствие компактности единичной сферы в конечномерном пространстве, для любого линейного оператора $\mathcal{F}$ существует константа позитивности.

Введем линейные операторы $\mathcal{F}_{ij}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $\mathcal{F}_{ij}X = A_i X A_j^{\mathrm{T}}$, $i, j = \overline{1,r}$. Пусть γ_{ij} — соответствующие константы позитивности этих операторов относительно $\mathcal{K}$. Обозначим

$$w_i = \sup_{x \in \Omega} \frac{\mu_i(x)}{\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(x)}, \qquad i = \overline{1,r}, \qquad \overline{\mu} = \inf_{x \in \Omega} \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} \sum\limits_{j=1, i \neq j}^{r} \gamma_{ij} \mu_i(x) \mu_j(x)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(x)\right)^2}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть нечеткая система Такаги–Сугено (1) такова, что выполняется неравенство*

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} w_i w_j A_i \otimes A_j + \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1, i \neq j}^{r} \gamma_{ij} w_i w_j - \overline{\mu}\right) E\right) < 1,$$

где $\rho(\cdot)$ — спектральный радиус соответствующей матрицы, $E = \{e_{ij}\}_{i,j=1}^{n^2}$,

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) = (1,1) \bmod (n+1), \\ 0, & (i,j) \neq (1,1) \bmod (n+1), \end{cases}$$

$\otimes$ — кронекерово произведение.

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Рассмотрим конусозначное отображение $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{E}$, $V(x) = xx^{\mathrm{T}}$, для которого справедливы неравенства

$$V(k+1) = x(k+1)x^{\mathrm{T}}(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i(x)\mu_j(x)A_iV(k)A_j^{\mathrm{T}}}{\left(\sum_{i=1}^{r}\mu_i(x)\right)^2} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i(x)\mu_j(x)\mathcal{F}_{ij}V(k)}{\left(\sum_{i=1}^{r}\mu_i(x)\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{r}\mu_i^2(x)\mathcal{F}_{ii}V(k)}{\left(\sum_{i=1}^{r}\mu_i(x)\right)^2} +$$

$$+ \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,i\neq j}^{r}\mu_i(x)\mu_j(x)(\mathcal{F}_{ij}+\gamma_{ij}\mathcal{B})V(k)}{\left(\sum_{i=1}^{r}\mu_i(x)\right)^2} - \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,i\neq j}^{r}\mu_i(x)\mu_j(x)\gamma_{ij}\mathcal{B}V(k)}{\left(\sum_{i=1}^{r}\mu_i(x)\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}w_iw_j\mathcal{F}_{ij} + \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,i\neq j}^{r}\gamma_{ij}w_iw_j - \overline{\mu}\right)\mathcal{B}\right)V(k).$$

Вследствие матричного принципа сравнения [7] справедливо неравенство

$$V(k;k_0,V_0) \leqslant U(k;k_0,V_0), \qquad \text{при всех} \qquad k \in \mathbb{Z}^+,$$

где $U(k;k_0,V_0)$ — максимальное решение матричного уравнения сравнения

$$U(k+1) = \mathcal{F}U(k), \qquad U(0) = V_0. \tag{2}$$

Здесь

$$\mathcal{F} = \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}w_iw_j\mathcal{F}_{ij} + \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,i\neq j}^{r}\gamma_{ij}w_iw_j - \overline{\mu}\right)\mathcal{B}\right).$$

Согласно [7] и теореме 1 из [6], можно утверждать, что отображение $V(x) = xx^{\mathrm{T}}$ сохраняет устойчивость.

Из свойств кронекоровых произведений следует, что условие теоремы гарантирует выполнение неравенства

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}w_iw_j\mathcal{F}_{ij} + \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1,i\neq j}^{r}\gamma_{ij}w_iw_j - \overline{\mu}\right)\mathcal{B}\right) < 1.$$

Поэтому состояние равновесия $U = 0$ матричного уравнения сравнения (2) асимптотически устойчиво. Так как состояние равновесия $U = 0$ матричного уравнения сравнения (2) асимптотически устойчиво и конус $\mathcal{K}$ — нормальный, то динамическая система, определяемая дифференциальным неравенством $V(k+1) \leqslant \mathcal{F}V(k)$, асимптотически устойчива. Вследствие теоремы 1 [6] состояние равновесия $x = 0$ системы (1) также асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Импульсная нечеткая система Такаги–Сугено. Предположим, что система Такаги–Сугено описывается правилами R_i, $i = \overline{1,r}$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_i x(t), \qquad t \neq \tau_k,$$
$$x(t^+) = B_i x(t), \qquad t = \tau_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad x(t_0^+) = x_0,$$

где $x(t) = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $x(t^+)$ — значение функции $x(t)$ справа; $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — структурные матрицы системы. Предполагается, что матрицы B_i невырождены и последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам $0 < \theta_1 \leqslant \tau_{k+1} - \tau_k \leqslant \theta_2 < \infty$.

В этом случае нечеткая система Такаги–Сугено приводится к локально-линейной системе с импульсным воздействием вида

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)} \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x) A_i x(t), \qquad t \neq \tau_k, \\ x(t^+) &= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)} \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x) B_i x(t), \qquad t = \tau_k, \qquad k = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть $\mathcal{F}_i \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $\mathcal{F}_i X = A_i X + X A_i^{\mathrm{T}}$, $i = \overline{1,r}$, $\mathcal{G}_{ij} \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $\mathcal{G}_{ij} X = B_i X B_j^{\mathrm{T}}$, $i, j = \overline{1,r}$, а γ_i, γ_{ij} — соответствующие константы позитивности операторов $\mathcal{F}_i$ и $\mathcal{G}_{ij}$ относительно конуса $\mathcal{K}$. Нетрудно показать, что константы позитивности операторов $\mathcal{F}_i$ и $\mathcal{G}_{ij}$ удовлетворяют следующим оценкам:

$$\gamma_i \geqslant \frac{1}{2}\lambda_M((I - A_i)(I - A_i)^{\mathrm{T}}), \qquad i = \overline{1,r},$$
$$\gamma_{ij} \geqslant \frac{1}{2}\lambda_M((B_i + B_j)(B_i + B_j)^{\mathrm{T}}), \qquad i, j = \overline{1,r},$$

где $\lambda_M(\cdot)$ — максимальное собственное значение соответствующей матрицы.

Обозначим

$$w_i = \sup_{x\in\Omega} \frac{\mu_i(x)}{\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)}, \qquad i = \overline{1,r},$$

$$\overline{\mu}_1 = \inf_{x\in\Omega} \frac{\sum\limits_{i=1}^{r}\gamma_i\mu_i(x)}{\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)}, \qquad \overline{\mu}_2 = \inf_{x\in\Omega} \frac{\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1, i\neq j}^{r}\gamma_{ij}\mu_i(x)\mu_j(x)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(x)\right)^2},$$

$$P = \sum_{i=1}^{r} w_i (A_i \otimes I + I \otimes A_i) + \left(\sum_{i=1}^{r} \gamma_i w_i - \overline{\mu}_1\right) E,$$

$$Q = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} w_i w_j B_i \otimes B_j + \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1, i \neq j}^{r} \gamma_{ij} w_i w_j - \overline{\mu}_2\right) E.$$

Пусть Γ обозначает константу позитивности линейного оператора $\sum\limits_{i=1}^{r} w_i \mathcal{F}_i + \Big(\sum\limits_{i=1}^{r} \gamma_i w_i - \overline{\mu}_1\Big)\mathcal{B}$ относительно конуса $\mathcal{K}$. Далее сформулируем необходимый вспомогательный результат.

Лемма 1 [4]. *Пусть $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ — линейные операторы в пространстве $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}_1$ — квазимонотонный оператор относительно конуса $\mathcal{K}$ и $\mathcal{P}_1 \leqslant \mathcal{P}_2$. Тогда при любом $h \geqslant 0$ справедливо неравенство $\exp(\mathcal{P}_1 h) \leqslant \exp(\mathcal{P}_2 h)$.*

Теорема 2. *Пусть нечеткая система Такаги–Сугено* (3) *такова, что выполняется неравенство*

$$\rho(\exp(\theta_2 P + \Gamma(\theta_2 - \theta_1)E)Q) < 1,$$

где $\rho(\cdot)$ — спектральный радиус соответствующей матрицы, $E = \{e_{ij}\}_{i,j=1}^{n^2}$,

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) = (1,1) \operatorname{mod}(n+1), \\ 0, & (i,j) \neq (1,1) \operatorname{mod}(n+1), \end{cases}$$

$\otimes$ — кронекерово произведение.

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (3) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Для непрерывной компоненты

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(x)} \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x) A_i x(t)$$

системы (3) с помощью матричнозначного отображения $V(x) = xx^{\mathrm{T}}$ получаем цепочку неравенств

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(x)} \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x) \mathcal{F}_i V = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(x)(\mathcal{F}_i + \gamma_i \mathcal{B})V - \sum\limits_{i=1}^{r} \gamma_i \mu_i(x) \mathcal{B} V}{\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(x)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{r} w_i \mathcal{F}_i + \left(\sum_{i=1}^{r} w_i \gamma_i - \overline{\mu}_1\right) \mathcal{B}\right) V. \tag{4}$$

Для анализа дискретной компоненты системы (3) также используется отображение $V(x) = xx^{\mathrm{T}}$. Аналогично доказательству теоремы 1, получаем неравенство

$$V(t^+) = x(t^+) x^{\mathrm{T}}(t^+) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} w_i w_j \mathcal{G}_{ij} + \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1, i \neq j}^{r} \gamma_{ij} w_i w_j - \overline{\mu}_2\right) \mathcal{B}\right) V(t). \tag{5}$$

Учитывая неравенства (4) и (5), приходим к матричной системе сравнения с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} &\frac{dU}{dt} = \mathcal{P}U, \qquad t \neq \tau_k, \\ &U(t^+) = \mathcal{Q}U, \qquad t = \tau_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{6}$$

где введены обозначения

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{r} w_i \mathcal{F}_i + \left(\sum_{i=1}^{r} w_i \gamma_i - \overline{\mu}_1\right)\mathcal{B},$$

$$\mathcal{Q} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} w_i w_j \mathcal{G}_{ij} + \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1, i\neq j}^{r} \gamma_{ij} w_i w_j - \overline{\mu}_2\right)\mathcal{B}.$$

Решение системы (6) представим в виде

$$U(t) = e^{\mathcal{P}(t-\tau_k)}\mathcal{Q}e^{\mathcal{P}(\tau_k-\tau_{k-1})}\mathcal{Q}\cdots\mathcal{Q}e^{\mathcal{P}(\tau_1-t_0)}V_0,$$

где $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, $U(t_0) = V(t_0) = V_0 \geqslant 0$.

Так как $\mathcal{P}(\tau_k - \tau_{k-1}) \leqslant \mathcal{P}\theta_2 + \Gamma(\theta_2 - \theta_1)\mathcal{B}$, то, по лемме 1, получаем оценку

$$e^{\mathcal{P}(\tau_k-\tau_{k-1})} \leqslant e^{\mathcal{P}\theta_2+\Gamma(\theta_2-\theta_1)\mathcal{B}}.$$

Следовательно, матрицант $\Omega_{t_0}^t$ системы сравнения (6) можно оценить таким образом:

$$\Omega_{t_0}^t \leqslant \exp(\mathcal{P}(t-\tau_k))\mathcal{Q}[\exp(\mathcal{P}\theta_2 + \Gamma(\theta_2-\theta_1)\mathcal{B})\mathcal{Q}]^{k-1}\exp(\mathcal{P}(\tau_1 - t_0)), \qquad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}).$$

Из позитивности системы (6) относительно конуса $\mathcal{K}$ и условия теоремы 2 следует, что $\Omega_{t_0}^t \to 0$ при $t \to \infty$. Таким образом, состояние равновесия $U = 0$ системы сравнения (6) асимптотически устойчиво и доказательство теоремы заканчивается так же, как и доказательство теоремы 1. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим нечеткую импульсную систему Такаги–Сугено, заданную следующими структурными матрицами:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Функции принадлежности определим так:

$$\mu_{11}(x_1) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - 10}{3}\right)^2\right), \qquad \mu_{12}(x_2) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2 - 8}{3}\right)^2\right),$$

$$\mu_{21}(x_1) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - 11}{2}\right)^2\right), \qquad \mu_{22}(x_2) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2 - 7}{2}\right)^2\right),$$

где $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$ — вектор состояния.

Предположим, что моменты импульсного воздействия удовлетворяют двусторонней оценке $0 < 0{,}3 \leqslant \tau_{k+1} - \tau_k \leqslant 0{,}38 < \infty$. Так как оператор G_{ij}, i, $j = 1, 2$, положителен относительно конуса $\mathcal{K}$, то $\gamma_{ij} = 0$ и как следствие $\overline{\mu}_2 = 0$.

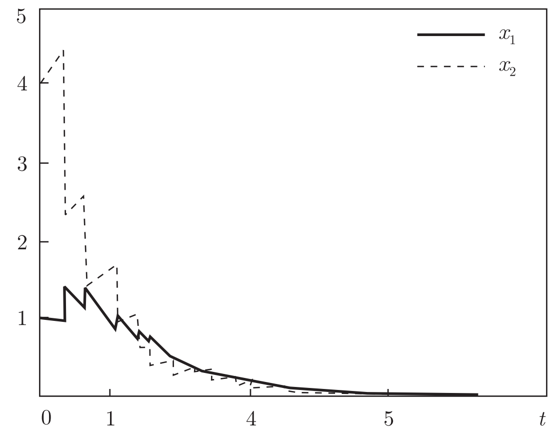

Рис. 1

Также нетрудно убедиться, что $w_1 = 0{,}5$, $w_2 = 0{,}5$, $\overline{\mu}_1 = 3{,}33$, $\gamma_1 = 4{,}51$, $\gamma_2 = 2{,}15$, $\Gamma = 8{,}1557$ и

$$\rho(\exp(\theta_2 P + \Gamma(\theta_2 - \theta_1)E)Q) = 0{,}9883 < 1,$$

поэтому состояние равновесия $x = 0$ нечеткой импульсной системы, заданной матрицами (7), асимптотически устойчиво. Результаты компьютерного моделирования представлены на рис. 1.

Отметим, что матрицы (7) неустойчивые, т. е. стабилизация в нечетких импульсных системах Такаги–Сугено возможна даже в случае неустойчивости ее непрерывной и дискретной компоненты [5].

Автор выражает благодарность акад. НАН Украины А. А. Мартынюку и канд. физ.-мат. наук В. И. Слыньку за полезные советы и обсуждение результатов.

1. *Hui Ye, Michel A. N., Ling Hou.* Stability theory for hybrid dynamical systems // IEEE Transactions on automatic control. – 1998. – **43**, No 45. – P. 461–474.
2. *Мартынюк А. А.* Об устойчивости движения разрывных динамических систем // Докл. АН. – 2004. – **397**, № 3. – С. 308–312.
3. *Li Z., Soh C. B.* Lyapunov stability of discontinuons dynamic systems // IMA J. of Math. Control and Information. – 1999. – No 16. – P. 261–274.
4. *Слынько В. И.* Об условиях устойчивости движения линейных импульсных систем с запаздыванием // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 6. – С. 130–139.
5. *Денисенко В. С.* Устойчивость нечетких импульсных систем Такаги–Сугено: Метод линейных матричных неравенств // Доп. НАН України. – 2008. – № 11. – С. 66–73.
6. *Денисенко В. С., Мартынюк А. А., Слынько В. И.* Об отображениях, сохраняющих устойчивость нечетких систем Такаги–Сугено // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 5. – С. 641–649.
7. *Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. – Киев: Наук. думка, 1984. – 306 с.
8. *Takagi T., Sugeno M.* Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Trans. Syst. Man, and Cybern. – 1985. – No 15. – P. 116–132.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 20.10.2008

V. S. Denysenko

Spectral stability conditions of Takagi–Sugeno fuzzy systems

The sufficient conditions for the stability of discrete and impulsive Takagi–Sugeno fuzzy systems are derived. The stability conditions are expressed in the form of limitations on the spectra of some linear operators.