УДК: 681.3.062

ВИНИКНЕННЯ ТА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ТРИЗНАЧНИХ ЛОГІК КЛІНІ

О.В. Шишацька

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
03680, Київ, проспект Академіка Глушкова, 2, корп. 6, (044)521 3345, olena74@i.ua

Розглянуто сильну та слабку тризначні логіки Кліні. Показано виникнення сильної логіки зі звичайної булевої логіки шляхом застосування загальнозначущої конструкції розповсюдження операцій з елементів на множини елементів у термінах повного образу. Проілюстровано компактне задання операцій логіки Кліні трьохелементними ланцюгами.

Strong and weak three-valued Kleene logics are considered. The origin of strong logic from ordinary Boolean logic by application of generally valid construction of extension operations from elements on the sets of elements in terms of full image is shown. The compact representation of logic Kleene operations by the three-element chains is illustrated.

Загальні зауваження

Робота присвячена сильній та слабкій тризначним логікам Кліні. Ці логіки використовуються в теорії рекурсії [1], (частина ІІІ, гл. ХІІ, § 64, с. 296–303); сильна логіка використовується також у системах алгоритмічних алгебр Глушкова [2], (гл. 4 § 4.1, с. 117; § 4.2, табл. 4 на с. 127), сучасних SQL-подібних мовах табличних (реляційних) баз даних (див., наприклад, [3], підрозділ 3.6, с. 169–170) та сучасних мовах специфікацій UML/OCL при роботі з булевим типом, поповненим третім спеціальним значенням (див., наприклад, [4, 5]). Зауважимо, що слабка логіка Кліні виникає шляхом природного розширення в розумінні [6] стандартних булевих операцій, цей підхід повністю відповідає принципам роботи зі спеціальним значенням (UNDEFINED) стандарту об'єктних баз даних ODMG, зокрема мові запитів OQL [7, 8].

Далі під сильною та слабкою логіками Кліні розумітимено сильну та слабку тризначні логіки Кліні.

Виникнення сильної логіки Кліні зі звичайної булевої логіки

Застосуємо загальнозначущу конструкцію розповсюдження операцій з елементів на множини елементів у термінах повного образу; саме така конструкція застосовувалася в [3], (підрозділ 1.3, с. 23–24) при дослідженні операцій табличних алгебр, побудованих на основі відомих реляційних алгебр Кодда; загальним властивостям повного образу присвячена робота [9].

Повний образ дозволяє природно поширювати унарні (бінарні) операції на універсумі на булеан універсуму. Позначимо $[f]$ унарну тотальну операцію на булеані $P(D)$ універсуму D, яка індукується частковою операцією f на універсумі і задається рівністю $[f](X) \overset{def}{=} f[X]$; тут і далі $f[X] \overset{def}{=} \{y \mid \exists x(x \in X \wedge y \simeq f(x))\}$ – повний образ множини X щодо операції f, де, з огляду на частковість функції, $\simeq$ – узагальнена рівність.

Аналогічно, нехай F – бінарна часткова операція на D; вона також породжує бінарну тотальну операцію $[F]$ на булеані універсуму D, яка задається рівністю $[F](X,Y) \overset{def}{=} F[X \times Y]$.

Застосуємо вказану схему розширення до сигнатурних операцій алгебри стандартної логіки $<\{T,F\};\wedge,\vee,\neg>$, де T,F – логічні значення істини і хибності відповідно. Результат розширення операції кон'юнкції $\wedge$ і заперечення $\neg$ на булеан $P(\{T,F\})$ приведені в таблицях 1, 2 (розширення диз'юнкції будується аналогічно). В таблиці 1 першому аргументу відповідають стовпці, другому аргументу – рядки.

Зазначимо, що розширення бінарних операцій комутативні; тому таблиця 1 "симетрична" (щодо головної діагоналі), і зіставлення аргументам стовпців або рядків насправді неістотно.

Зауважимо також, що властивості комутативності та асоціативності розширень кон'юнкції і диз'юнкції успадковуються; цей факт випливає із загальних результатів ([3], підрозділ 1.3, твердження 1.3.1, п. 8, с. 24; 9, твердження 5).

Оскільки декартів добуток та повний образ зберігають порожню множину, то і операції $[\wedge]$, $[\vee]$, $[\neg]$ зберігають порожню множину. Саме тому в таблиці 1, наприклад, присутні константні рядок та стовпець, заповнені $\varnothing$.

Таблиця 1. Операція $[\wedge]$ на булеані $P(\{T,F\})$

	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T,F\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{T\}$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T,F\}$
$\{F\}$	$\varnothing$	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$
$\{T,F\}$	$\varnothing$	$\{T,F\}$	$\{F\}$	$\{T,F\}$

Таблиця 2. Операція $[\neg]$ на булеані $P(\{T,F\})$

аргумент	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{T,F\}$
значення	$\varnothing$	$\{F\}$	$\{T\}$	$\{T,F\}$

Розглянемо відображення $\psi:\{T,F,\omega\}\to P(\{T,F\})$, де ω – третє логічне значення логік Кліні (що змістовно інтерпретується як невизначеність): $\psi(T)=\{T\}$, $\psi(F)=\{F\}$, $\psi(\omega)=\{T,F\}$. Очевидно, що це відображення ін'єктивно, але не сюр'єктивно (адже порожня множина не входить в область значень відображення ψ).

За операціями алгебри сильної логіки Кліні залишимо ті ж позначення, що були введені для операцій алгебри стандартної логіки, вводячи тільки нижній індекс k; домовимося про однойменні операції: операціям $\wedge_k$, $\vee_k$ та $\neg_k$ співставляються відповідно операції $[\wedge]$, $[\vee]$ та $[\neg]$.

Твердження 1 (побудова алгебри сильної логіки Кліні). Відображення ψ – однозначний гомоморфізм алгебри сильної логіки Кліні $<\{T,F,\omega\};\wedge_k,\vee_k,\neg_k>$ в алгебру $<P(\{T,F\});[\wedge],[\vee],[\neg]>$, тобто це відображення є вкладенням алгебри сильної логіки Кліні в алгебру $<P(\{T,F\});[\wedge],[\vee],[\neg]>$.

Доведення. Дійсно, замінюючи в таблицях 1–2 значення $\{T\},\{F\},\{T,F\}$ на T,F,ω відповідно (згідно відображення ψ) і видаляючи константні стовпець і рядок, заповнені значенням $\varnothing$, приходимо до табличного задання операцій сильної кон'юнкції і заперечення алгебри сильної логіки Кліні. Випадок сильної диз'юнкції розглядається повністю аналогічно.

Таким чином, алгебру сильної логіки Кліні можна отримати шляхом застосування до алгебри класичної булевої логіки конструкції розширення (в термінах повного образу) її сигнатурних операцій.

Компактне задання операцій сильної логіки Кліні

Ідея полягає в переході від алгебри $<\{T,F,\omega\};\wedge_k,\vee_k>$ до відповідної структури (решітки)[1].

Справді, безпосередньо перевіряється, що ці сигнатурні операції комутативні, асоціативні та ідемпотентні; крім того виконуються два закони поглинання: $x\vee_k(x\wedge_k y)=x$ та $x\wedge_k(x\vee_k y)=x$ для всіх $x,y\in\{T,F,\omega\}$.

Отже, за стандартною процедурою, поклавши $x\le_k y\overset{def}{\Leftrightarrow} x=x\wedge_k y$ (або в еквівалентній формі $x\le_k y\overset{def}{\Leftrightarrow} y=x\vee_k y$), можна перейти до структури, точні грані двохелементних множин якої знаходяться за формулами: $\inf\{x,y\}=x\wedge_k y$, $\sup\{x,y\}=x\vee_k y$ (див., наприклад, [10], гл. II, § 8, теорема 3, с. 154).

Відношення $\le_k$ в загальному випадку є частковим порядком [10], (гл. II, § 8, теорема 1, с. 151–152). Для конкретного випадку алгебри сильної логіки Кліні воно проілюстровано в таблиці 3 (значенням аргументу x відповідають рядки, значенням аргументу y – стовпці; в наступних таблицях будемо притримуватися цієї ж угоди); знак "+" у комірці означає, що відповідні елементи знаходяться у відношенні, знак "–" – що не знаходяться.

---

[1] На даний момент більш уживаним є термін "решітка", однак користуватимемося терміном "структура", оскільки послуговуємося результатами [10], де використовується саме цей термін.

Таблиця 3. Порядок $\leq_k$ на $\{T, F, \omega\}$

<table>
<tr><td></td><td>$x = x \wedge_k y$</td><td>$y = x \vee_k y$</td><td>$x = x \wedge_k y$</td><td>$y = x \vee_k y$</td><td>$x = x \wedge_k y$</td><td>$y = x \vee_k y$</td></tr>
<tr><td>$x \setminus y$</td><td colspan="2">T</td><td colspan="2">F</td><td colspan="2">ω</td></tr>
<tr><td rowspan="2">T</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">+</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">F</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td colspan="2">+</td><td colspan="2">+</td><td colspan="2">+</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ω</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td colspan="2">+</td><td colspan="2">-</td><td colspan="2">+</td></tr>
</table>

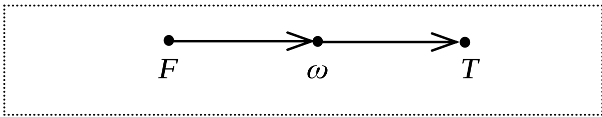

Рис. 1. Лінійний порядок $\leq_k$ на множині $\{T, F, \omega\}$

Для випадку структури, яка відповідає алгебрі сильної логіки Кліні, її порядок є лінійним (див. рис. 1, побудований на основі табл. 3), а саме $F \leq_k \omega \leq_k T$ (для компактності на рис. 1 не наведена одна стрілка, що відновлюється згідно транзитивності, та три петлі, що відповідають рефлексивності порядку).

Таким чином, загальна ситуація суттєво спрощується: структура насправді є ланцюгом та $x \wedge_k y$ є найменшим ($x \vee_k y$ – найбільшим) з елементів x, y для всіх $x, y \in \{T, F, \omega\}$.

Аналіз процедури побудови структури (нагадаємо, що $x \leq_k y \Leftrightarrow x = x \wedge_k y \Leftrightarrow y = x \vee_k y$), показує, що лінійність, загалом, часткового порядку забезпечується такою властивістю сильних кон'юнкції та диз'юнкції – $x \wedge_k y, x \vee_k y \in \{x, y\}$ для всіх $x, y \in \{T, F, \omega\}$.

Сформулюємо загальний результат для комутативних ідемпотентних півгруп. У формулюванні наступного твердження вважаємо відомим зв'язок між комутативними ідемпотентними півгрупами та нижніми півструктурами. (див., наприклад, [10], гл. II, § 8, теорема 1, с. 151–152).

Твердження 2 (критерій лінійності порядку півструктури, побудованої по комутативній ідемнотентній півгрупі). Нехай $< D, + >$ – комутативна ідемпотентна півгрупа, а $\leq$ – частковий порядок відповідної нижньої півструктури, тобто $x \leq y \overset{def}{\Leftrightarrow} x = x + y$. Порядок $\leq$ лінійний (тобто $< D, \leq >$ є ланцюгом) тоді і тільки тоді, коли $x + y \in \{x, y\}$ для всіх $x, y \in D$.

Доведення. Необхідність. Нехай порядок $\leq$ лінійний, встановимо належність $x + y \in \{x, y\}$ для всіх $x, y \in D$.

Нехай x, y – довільні елементи; оскільки порядок лінійний, то $x \leq y$ або навпаки $y \leq x$. У першому випадку $x = x + y$, у другому – $y = y + x$. Оскільки операція комутативна, то в обох випадках виконується належність $x + y \in \{x, y\}$.

Достатність. Нехай виконується належність $x + y \in \{x, y\}$ для всіх x, y; покажемо, що порядок лінійний.

Нехай x, y – довільні елементи, тоді за припущенням $x + y = x$ або $x + y = y$. У першому випадку $x \leq y$ за означенням порядку, в другому – $y \leq x$ (дійсно, $y = x + y = y + x$).

З цього твердження і випливає лінійність порядку структури, асоційованої з алгеброю сильної логіки Кліні.

Крім того, те, що структура $< \{T, F, \omega\}; \leq_k >$ є ланцюгом, можна показати й іншим елементарним шляхом. Справді, вказана структура скінченна, тобто вона має найменший (нуль) та найбільший (одиницю) елементи, які позначимо 0_k, 1_k, відповідно. Оскільки структура трьохелементна, то, очевидно, що $0_k <_k 1_k$ та для третього елемента z (тобто елемента, відмінного від найменшого та найбільшого елементів) виконується нерівність $0_k <_k z <_k 1_k$. Отже, структура $< \{T, F, \omega\}; \leq_k >$ є ланцюгом.

Таким чином, можна зробити висновок, що лінійність порядку структури, асоційованої з алгеброю сильної логіки Кліні, випливає, з одного боку, з властивостей операцій (з належностей $x \wedge_k y, x \vee_k y \in \{x, y\}$), а, з іншого боку, просто з трьохелементності структури.

Підкреслимо, що саме трьохелементність тут суттєва, бо кожна n-елементна структура буде ланцюгом при n = 1, 2, 3; що не виконується, загалом, при $n \geq 4$ (найпростіший приклад – булеан двохелементної множини з стандартним порядком $\subseteq$).

У наступному твердженні підсумуємо вищенаведену інформацію про компактне задання операцій сильної логіки Кліні.

Твердження 3 (компактне задання бінарних операцій алгебри сильної логіки Кліні). Відношення $\leq_k$ перетворює множину $\{T, F, \omega\}$ на ланцюг (а, значить, і в структуру), причому $x \wedge_k y$ є найменшим (відповідно, $x \vee_k y$ – найбільшим) з елементів x, y для всіх $x, y \in \{T, F, \omega\}$ згідно цього (лінійного) порядку.

Доведення випливає з вказаних загальних результатів теорії структур (зокрема, з погляду на структуру як на алгебру, кожна з двох сигнатурних операцій якої ідемпотентна, комутативна та асоціативна, а самі ці операції пов'язані законами поглинання) та лінійності відповідного порядку (див. рис. 1).

Цікаво відзначити, що по суті саме таке компактне задання операцій (алгебри) сильної логіки Кліні використовується в популярній літературі з мови SQL: F інтерпретується як число 0, T – як 1, ω – як $\frac{1}{2}$; тоді $x \wedge y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$ при природному порядку – $0 < \frac{1}{2} < 1$; більш того, $\neg x = 1 - x$ (див., наприклад, [11]).

Слабка логіка Кліні, що виникає при природному розширенні булевої логіки

Розглянемо слабку логіку Кліні та почнемо з алгебри (групоїда) $<\{T, F, \omega\}; \wedge_\omega>$, де операція кон'юнкції відмінна від розглянутої вище сильної кон'юнкції Кліні та задана наступним чином: у випадках, коли хоч один з аргументів дорівнює третьому (новому) значенню ω, результатом буде саме це значення, в усіх інших випадках операція веде себе як операція $\wedge$ стандартної логіки (табл. 4). Таку операцію $\wedge_\omega$ називатимемо слабкою кон'юнкцією Кліні [1].

Таблиця 4. Операція $\wedge_\omega$ на $\{T, F, \omega\}$, що зберігає ω

$\wedge_\omega$	T	F	ω
T	T	F	ω
F	F	F	ω
ω	ω	ω	ω

Отже, мова йде про розширення стандартної кон'юнкції, яке зберігає третє логічне значення. Зауважимо, що операції кон'юнкції та диз'юнкції алгебри сильної логіки Кліні, на відміну від операції заперечення цієї ж алгебри, третє логічне значення ω не зберігають (див. табл. 1, 2; наприклад, $T \vee \omega = T$, $F \wedge \omega = F$, але $\neg\omega = \omega$).

Так введена операція асоціативна, комутативна та ідемпотентна (що перевіряється безпосередньо); тобто $<\{T, F, \omega\}; \wedge_\omega>$ комутативна ідемпотентна півгрупа і можна застосувати загальну процедуру побудови по ній півструктури (верхньої чи нижньої).

Визначимо два бінарних відношення $x \leq (\wedge_\omega) y \overset{def}{\Leftrightarrow} x = x \wedge_\omega y$ та $x \preceq (\wedge_\omega) y \overset{def}{\Leftrightarrow} y = x \wedge_\omega y$. Тоді кожне з цих відношень є порядком, і множина $\{T, F, \omega\}$ з порядком $\leq (\wedge_\omega)$[2] (з порядком $\preceq (\wedge_\omega)$) є нижньою (верхньою) півструктурою, причому $\inf_{\leq}\{x, y\} = x \wedge_\omega y$ (відповідно $\sup_{\preceq}\{x, y\} = x \wedge_\omega y$) (див., наприклад, [10], гл. II, § 8, с. 151–152, теорема 1).

Очевидно, порядки $\leq (\wedge_\omega)$ та $\preceq (\wedge_\omega)$ взаємоінверсні, тобто $x \leq y \Leftrightarrow y \preceq x$. Отже, згідно принципу двоїстості, не має значення, який саме порядок з цих двох розглядати (див., наприклад, [12], § 1, с. 10).

Порядки $\leq (\wedge_\omega)$ та $\preceq (\wedge_\omega)$ проілюстровані в табл. 5 та на рис. 2 (на якому не наведена одна стрілка, що відновлюється згідно транзитивності, та три петлі, що відповідають рефлексивності порядку).

---

[2] Використовуватимемо позначення вигляду $\leq (\wedge_\omega)$, бажаючи підкреслити, що відношення $\leq$ індукується операцією $\wedge_\omega$, аналогічно для інверсного відношення. Іноді в таких позначеннях операцію явно вказувати не будемо.

Рис. 2. Порядки $\le(\wedge_\omega)$ (зліва) та $\preceq(\wedge_\omega)$ (справа) на $\{T, F, \omega\}$

Таблиця 5. Порядки $\le(\wedge_\omega)$ та $\preceq(\wedge_\omega)$ на $\{T, F, \omega\}$

	$x \le y \Leftrightarrow x = x \wedge_\omega y$			$x \preceq y \Leftrightarrow y = x \wedge_\omega y$		
x \ y	T	F	ω	T	F	ω
T	+	-	-	+	+	+
F	+	+	-	-	+	+
ω	+	+	+	-	-	+

Аналогічно, групоїд $<\{T, F, \omega\}; \vee_\omega>$, операція якого є розширенням стандартної операції диз‘юнкції та зберігає третє логічне значення ω (табл. 6), є комутативною ідемпотентною півгрупою (операція $\vee_\omega$ асоціативна, комутативна та ідемпотентна, що перевіряється безпосередньо). Знову можна застосувати загальну процедуру побудови півструктури.

Визначимо два відношення $x \le (\vee_\omega) y \overset{def}{\Leftrightarrow} x = x \vee_\omega y$ та $x \preceq (\vee_\omega) y \overset{def}{\Leftrightarrow} y = x \vee_\omega y$ (як і для випадку кон'юнкції ці два відношення взаємоінверсні).

Тоді кожне з цих відношень є порядком, і множина $\{T, F, \omega\}$ з порядком $\le(\vee_\omega)$ (з порядком $\preceq(\vee_\omega)$) є нижньою (верхньою) півструктурою, причому $\inf_{\le}\{x, y\} = x \vee_\omega y$ (відповідно $\sup_{\preceq}\{x, y\} = x \vee_\omega y$ [10], гл. II, § 8, с. 151–152, теорема 1).

Визначимо два відношення $x \le (\vee_\omega) y \overset{def}{\Leftrightarrow} x = x \vee_\omega y$ та $x \preceq (\vee_\omega) y \overset{def}{\Leftrightarrow} y = x \vee_\omega y$ (як і для випадку кон'юнкції ці два відношення взаємоінверсні).

Таблиця 6. Операція $\vee_\omega$ на $\{T, F, \omega\}$, що зберігає ω

$\vee_\omega$	T	F	ω
T	T	T	ω
F	T	F	ω
ω	ω	ω	ω

Тоді кожне з цих відношень є порядком, і множина $\{T, F, \omega\}$ з порядком $\le(\vee_\omega)$ (з порядком $\preceq(\vee_\omega)$) є нижньою (верхньою) півструктурою, причому $\inf_{\le}\{x, y\} = x \vee_\omega y$ (відповідно $\sup_{\preceq}\{x, y\} = x \vee_\omega y$ [10], гл. II, § 8, с. 151–152, теорема 1).

Порядки проілюстровані в табл. 7 та на рис. 3 (як і на попередніх рисунках на ньому не наведена одна стрілка, що відновлюється згідно транзитивності, та три петлі, що відповідають рефлексивності порядку).

Рис. 3. Порядки $\le(\vee_\omega)$ (зліва) та $\preceq(\vee_\omega)$ (справа) на $\{T, F, \omega\}$

Таблиця 7. Порядки $\le(\vee_\omega)$ та $\preceq(\vee_\omega)$ на $\{T, F, \omega\}$

$x \backslash y$	T	F	ω	T	F	ω
	$x \le (\vee_\omega) y \Leftrightarrow x = x \vee_\omega y$			$x \preceq (\vee_\omega) y \Leftrightarrow y = x \vee_\omega y$		
T	+	+	-	+	-	+
F	-	+	-	+	+	+
ω	+	+	+	-	-	+

Аналіз процедури побудови півструктур (нагадаємо, що, наприклад, $x \le (\wedge_\omega) y \Leftrightarrow x = x \wedge_\omega y$), показує, що лінійність, загалом, часткового порядку забезпечується такою властивістю слабкої кон'юнкції та слабкої диз'юнкції – $x \wedge_\omega y, x \vee_\omega y \in \{x, y\}$ для всіх $x, y \in \{T, F, \omega\}$.

Отже, ситуація з лінійністю порядків аналогічна сильній логіці Кліні та навіть дещо спрощується: належності $x \wedge_\omega y,\ x \vee_\omega y \in \{x, y\}$ у випадку, коли хоча б один з аргументів x, y є ω, автоматично випливають зі збереження значення ω операціями.

Відмінність полягає в тому, що встановити лінійність порядку як наслідок трьохелементності не можна, оскільки працюємо в півструктурах (зауважимо, що існує простий приклад трьохелементної півструктури, яка не є ланцюгом; разом з тим зрозуміло, що двохелементні півструктури є ланцюгами).

Підсумуємо інформацію про півструктури (насправді, структури, оскільки порядок лінійний), індуковані двома розглянутими комутативними ідемпотентними півгрупами.

Твердження 4 (структури, індуковані слабкою кон'юнкцією та слабкою диз'юнкцією). Відношення $\le(\wedge_\omega)$ та $\preceq(\wedge_\omega)$ перетворюють множину $\{T, F, \omega\}$ в ланцюг (а, значить, і в структуру), причому $x \wedge_\omega y$ є найменшим (найбільшим) з елементів x, y згідно порядку $\le(\wedge_\omega)$ (відповідно $\preceq(\wedge_\omega)$) для всіх $x, y \in \{T, F, \omega\}$.

Відношення $\le(\vee_\omega)$ та $\preceq(\vee_\omega)$ також перетворюють множину $\{T, F, \omega\}$ в ланцюг (а, значить, і в структуру), причому $x \vee_\omega y$ є найменшим (найбільшим) з елементів x, y згідно порядку $\le(\vee_\omega)$ (відповідно $\preceq(\vee_\omega)$) для всіх $x, y \in \{T, F, \omega\}$.

Доведення випливає з вказаних загальних результатів теорії півструктур (з погляду на півструктуру як на комутативну ідемпотентну півгрупу) та лінійності відповідних порядків (див. рис. 2–3).

Очевидно, що вказані в останньому твердженні два (взаємоінверсні) порядки для слабкої кон'юнкції відрізняються від двох (знову ж взаємоінверсних) порядків для слабкої диз'юнкції. Отже, серед вказаних чотирьох порядків немає порядку, який би відповідав одночасно слабкої кон'юнкції та слабкої диз'юнкції (на відміну від випадку сильної логіки Кліні, де такий "спільний" порядок існує, див. рис. 1).

Тому для алгебри $<\{T, F, \omega\}; \wedge_\omega, \vee_\omega>$ поставимо загальне питання: чи існує на множині $\{T, F, \omega\}$ порядок (позначимо його $\lhd$), що перетворює її в структуру, причому для довільних x, y виконуються рівності $x \wedge_\omega y = \inf_\lhd \{x,y\}$, $x \vee_\omega y = \sup_\lhd \{x,y\}$ (або, що еквівалентно, двоїстості рівності $x \wedge_\omega y = \sup_\lhd \{x,y\}$, $x \vee_\omega y = \inf_\lhd \{x,y\}$)?

Відповідь негативна. Дійсно, припустимо, що такий порядок існує, тоді мають виконуватися закони поглинання для операцій слабкої кон'юнкції та слабкої диз'юнкції ([10], гл. II § 8, с. 152–153, теорема 2). Але результати безпосередньої перевірки цих законів, наведені в табл. 8, показують, що у випадках, коли тільки y співпадає з ω, обидва закони поглинання не виконуються. Отже, такого порядку не існує.

Таблиця 8. Виконуваність законів поглинання для операцій $\vee_\omega, \wedge_\omega$

	$(x \vee_\omega y) \wedge_\omega x = x$			$(x \wedge_\omega y) \vee_\omega x = x$		
x \ y	T	F	ω	T	F	ω
T	+	+	-	+	+	-
F	+	+	-	+	+	-
ω	+	+	+	+	+	+

Те, що закони поглинання не виконуються, є цілком природним. Дійсно, суть цих законів полягає в тому, що значення виразів $(x \vee_\omega y) \wedge_\omega x$, $(x \wedge_\omega y) \vee_\omega x$ не залежать від значення елемента y, а визначаються тільки значенням елемента x. Зрозуміло, що ця вимога не виконується, якщо операції зберігають значення ω, y співпадає з ним, а x навпаки відмінний від ω.

Висновки

На множині $\{T, F, \omega\}$ існує 6 = 3! можливих лінійних порядків, зв'язок яких з операціями диз'юнкції та кон'юнкції двох розглянутих логік наведений в табл. 9.

Таблиця 9. Усі можливі лінійні порядки на $\{T, F, \omega\}$

1. $F \to \omega \to T$ $x \wedge_k y = \min(x, y)$ $x \vee_k y = \max(x, y)$	2. $T \to \omega \to F$ $x \wedge_k y = \max(x, y)$ $x \vee_k y = \min(x, y)$
3. $F \to T \to \omega$ $x \vee_\omega y = \max(x, y)$	4. $\omega \to T \to F$ $x \vee_\omega y = \min(x, y)$
5. $\omega \to F \to T$ $x \wedge_\omega y = \min(x, y)$	6. $T \to F \to \omega$ $x \wedge_\omega y = \max(x, y)$

Порядок 1 (інверсний йому порядок 2) відповідає одночасно диз'юнкції та кон'юнкції сильної логіки Кліні. Це порядки структури, асоційованої з алгеброю сильної логіки Кліні.

Порядок 3 (інверсний йому порядок 4) відповідає диз'юнкції, але не кон'юнкції слабкої логіки Кліні. Дуально, порядок 5 (інверсний йому порядок 6) – відповідає кон'юнкції, але не диз'юнкції слабкої логіки Кліні. Це порядки півструктур, асоційованих з двома півгрупами слабкої логіки Кліні[3].

1. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. – М.: ИЛ, 1957. – 526 с.
2. *Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л.* Алгебра. Языки. Программирование. – Киев: Наук. думка, 1978. – 318 с.
3. *Редько В.Н., Брона Ю.Й., Буй Д.Б., Поляков С.А.* Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. – К.: Видавничий дім "Академперіодика", 2001. – 198 с.
4. *Cook S., Kleppe A., Mitchell R., Rumpe B., Warmer J., Wills A.* The Amsterdam Manifesto on OCL. – UML 2.0 Request for information response: OMG Analysis & Design PTF, 1999 [Електронний ресурс]. – Точка доступу: http://www.trireme.com/whitepapers/design/components/OCL_manifesto.PDF.
5. www.omg.org // 05-06-06.pdf.
6. *Манна З.* Теория неподвижной точки программ // Кибернетический сб. Новая серия. Вып. 15. – М.: Мир, 1978. – С. 38–100.
7. *The Object* Data Standard: ODMG 3.0 / Edited by R.G.G. Cattel, Douglas K. Barry. – Morgan Kauffmann Publishers, 2000.
8. http://www.omg.org/docs/omg/04-07-02.pdf.
9. *Кахута Н.Д., Буй Д.Б.* Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження. Вісн. Київськ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 232–240.
10. *Скорняков Л. А.* Элементы алгебры. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
11. http://www.sql-ex.ru/help/select2.php.
12. *Скорняков Л А.* Элементы теории структур. – М.: Наука, 1982. – 160 с.

[3] Сигнатура одної півгрупи складається з слабої диз'юнкції, другої півгрупи – з слабої кон'юнкції.