УДК 622.2:536.21

И.Р. Венгеров

ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫХ ГОРНЫХ МАССИВОВ

ДонФТИ им. А.А. Галкина НАН Украины

Стисло розглянуто математичні моделі процесів переносу тепла в шарувато-неоднорідних гірничих масивах. Запропоновано загальний метод моделювання теплопереносу в шаруватих системах різної геометрії. Знайдено рівняння «склеювання», за допомогою якого розглянуто асимптотичні випадки.

Ключові слова: теплоперенос, шаруваті гірські породи, математичні моделі

I.R. Vengerov

THERMOPHYSICAL MODELS OF LAYERED INHOMOGENEOUS ROCK MEDIA

Mathematical models of heat transfer in layered inhomogeneous rock media are summarized. A general method of modeling the heat transfer in layered systems of a different geometry is proposed. A "matching" equation for different asymptotic cases has been found.

Keywords: heat transfer, layered inhomogeneous rocks, mathematical simulation

1. Введение

Горные массивы теплофизически микро- и макронеоднородны и анизотропны [1,2]. Наиболее распространена макронеоднородность слоистого типа: горные массивы слагаются из теплофизически разнородных пластов – плоско-слоистых систем (ПСС). Среди них можно выделить эндогенные (типа системы «породы почвы – угольный пласт – породы кровли») и экзогенные (типа «почва – закладка – кровля») [3,4]. Экзогенные цилиндрически-слоистые системы (ЦСС) возникают при проходке выработок и скважин (разуплотнение массивов в окрестности полости) и сооружении сплошных крепей, бетонных, тепло- и гидроизолирующих стенок в подземных сооружениях [5]. Сферически слоистые системы (ССС) характерны для подземных сооружений изопериметрической формы с гидро- и теплоизоляцией [6] либо образованных подземным взрывом [7].

Модели теплового режима слоисто-неоднородных горных массивов строятся на основе краевых задач для уравнений нестационарной теплопроводности с кусочно-постоянными коэффициентами. В большинстве это двухслойные модели, не учитывающие наличие внутренних источников тепла в слоях и их начальную температурную неоднородность [5,8]. Моделей для ЦСС мало [5,6,9], а для ССС они отсутствуют. Целью известных моделей является прогноз теплового режима выработок [3–6,8,10,11]. Для прогноза устойчивости горных выработок и подземных сооружений при экстремальных (аварийных) тепловых режимах, что требует учета термоупругих и термопластических явлений [5,12], слоистые модели не используются (за исключением стационарных термоупругих полей [13–15]). Это связано с весьма громоздкими решениями слоистых задач, традиционно получаемыми интегральным преобразованием Лапласа.

Для построения целостной, достаточно строгой, но доступной для специалистов-прикладников (проектантов, технологов, инженеров) теории моделирования процессов тепломассопереноса в слоисто-неоднородных горных массивах требуется: 1) разработать общий метод построения и исследования слоистых моделей на основе аналитико-числовых методов – функций Грина и метода П.В. Цоя [5]; 2) получить унифицированные промежуточные (базисные) уравнения* для ПСС, ЦСС и ССС; 3) построить и исследовать на основе уравнений «склейки» частные модели (2-, 3- и N-слойные) для ПСС, ЦСС и ССС; 4) обосновать методы редукции (упрощения) уравнений «склейки» для временных и параметрических асимптотических случаев; 5) сформулировать и решить обратные задачи для слоистых моделей (в частности, для определения теплофизических характеристик слоев по измеренным на их границах температурам [16]).

Эти «укрупненные» задачи сводятся к совокупности ряда «подзадач», часть которых была решена ранее [3–6,8–11]. В настоящей работе решаются задача 1 и частично – задачи 2 и 4 (применительно к ССС).

2. Метод построения и исследования слоистых моделей

Впервые горнотеплофизические слоистые модели были предложены и изучены Ш.И. Ониани [3]. Позднее такие модели исследовались на основе методов операционного исчисления и функций Грина [10,11,18,19]. Более удобным оказался метод функций «склейки» – комбинации методов функций Грина и преобразования Лапласа [20,21].

Этот метод содержит этапы:

– обобщенную (в смысле теории обобщенных функций) постановку краевой задачи теплопроводности в N-слойной системе с граничными условиями IV рода на внутренних границах;

– введение неизвестных функций «склейки» (далее – без кавычек) $\tilde{\mu}_k^{(\pm)}(t)$ – температур на границах $x_k = 0$ и $x_k = l_k$ каждого слоя Ω_k $\left(\Omega_k = \left\{x_k \in (0, l_k)\right\},\ k = \overline{1, N}\right)$;

* Так называемые уравнения «склейки», физический смысл которых заключается в непрерывности полей температур и потоков тепла на границах слоев, вытекающей из закона сохранения энергии и постулированной идеальности термического контакта между породными слоями.

– использование специального вида решения 1-й краевой задачи теплопроводности в Ω_k – представление граничных функций (содержащее $\tilde{\mu}_k^{(\pm)}(t)$, функцию произвольного начального распределения $\varphi_k(x_k)$, функцию плотности внутренних источников (стоков) тепла $\tilde{f}_k(x_k,t)$ и функцию Грина для $\Omega_k - \tilde{G}_k(x_k,\xi,t)$;

– подстановку решения во второе из граничных условий IV рода – склейки плотностей потоков тепла на границах слоев, что дает интегральное уравнение типа свертки относительно $\tilde{\mu}_k^{(\pm)}(t)$ $\left(k=j-1, j, j+1, j=\overline{2,N-1}\right)$;

– перевод полученного уравнения в алгебраическое уравнение относительно Лаплас-трансформант функций $\tilde{\mu}_k^{(\pm)}(p)$ – в уравнение склейки.

Для ПСС уравнение склейки было получено в виде [18]:

$$\bar{a}_{k,k-1}(p)\bar{\mu}_{k-1}^{(+)}(p)+\bar{a}_{k,k}(p)\bar{\mu}_k^{(+)}(p)+\bar{a}_{k,k+1}(p)\bar{\mu}_{k+1}^{(+)}(p)=\bar{b}_k(p). \quad (1)$$

Здесь Лаплас-трансформанты функций времени снабжены чертой сверху; p – параметр преобразования Лапласа; коэффициенты и правая часть (1) имеют вид:

$$\bar{a}_{k,k-1}=-\frac{\varepsilon_k\sqrt{p}}{\operatorname{sh}\delta_k\sqrt{p}},\ \bar{a}_{k,k+1}=-\frac{\varepsilon_{k+1}\sqrt{p}}{\operatorname{sh}\delta_{k+1}\sqrt{p}},\ \varepsilon_k=\sqrt{\lambda_k(\rho c)_k},\ \delta_k=\frac{l_k}{\sqrt{a_k}},$$
$$\bar{a}_{k,k}=\varepsilon_k\sqrt{p}\operatorname{cth}\delta_k\sqrt{p}+\varepsilon_{k+1}\sqrt{p}\operatorname{cth}\delta_{k+1}\sqrt{p}, \quad (2)$$

$$\bar{b}_k=-\left\langle\bar{q}_k^{(+)},\bar{\Psi}_k\right\rangle_{\Omega_k}+\left\langle\bar{q}_{k+1}^{(-)},\ \bar{\Psi}_{k+1}\right\rangle_{\Omega_{k+1}}, \quad (3)$$

$$\bar{q}_k^{(+)}=-(\rho c)_k\frac{\operatorname{sh}\left(\delta_k\sqrt{p}\quad \xi/l_k\right)}{\operatorname{sh}\delta_k\sqrt{p}},\ \bar{q}_{k+1}^{(-)}=(\rho c)_{k+1}\frac{\operatorname{sh}\left[\delta_{k+1}\sqrt{p}\left(1-\xi/l_{k+1}\right)\right]}{\operatorname{sh}\delta_{k+1}\sqrt{p}}, \quad (4)$$

где $a_k=\lambda_k/(\rho c)_k$; a_k, λ_k, $(\rho c)_k$ – соответственно коэффициент температуропроводности, коэффициент теплопроводности и удельная объемная теплоемкость горной породы в Ω_k; $\bar{\Psi}_k=\varphi_k(\xi)+\bar{f}_k(\xi,p)$, $\xi\in\Omega_k$ – текущая координата, по которой осуществляется интегрирование.

Уравнение (1) – исходный пункт для построения и исследования различных слоистых моделей. Необходимо получить его аналог для ЦСС и ПСС.

Рассматриваем области $\Omega_k^{(m)}$ $\left(k=\overline{1,N},\ m=2,3\right)$. Поскольку слоистые модели одномерные, для цилиндрических (m = 2) и сферических (m = 3) слоев имеем $\Omega_k^{(m)}=\left\{r\in\left(r_{k-1},\ r_k\right),\ k=\overline{1,N},\right\}$. Радиальная координата отсчитывается от центра симметрии системы. Используем биообобщенную постановку краевой задачи, при которой, в отличие от обобщенной, в правую часть уравнения переходят не только начальное, но и граничные условия [22]:

$$\frac{\partial \tilde{T}_k^{(m)}}{\partial t} = \nabla_m^2 \tilde{T}_k^{(m)} + \tilde{\Psi}_k + \tilde{\Phi}_k + \tilde{R}_k,\ t \ge 0,\ r \in \Omega_k^{(m)},\ \nabla_m^2 = \frac{1}{r^{m-1}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (5)$$

$$\tilde{T}_k^{(m)} = \tilde{T}_k^{(m)}(r,t) = \Theta(t)\chi_k(r)\ \ T_k^{(m)}(r,t),\ \Theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \le 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\Psi}_k = \tilde{\Psi}_k(r,t) = \chi_k(r)\left[\varphi_k(r)\ \ \delta(t) + \tilde{f}_k(r,t)\right],\ \chi_k(r) = \begin{cases} 1, & r \in \Omega_k^{(m)}, \\ 0 & r \,\overline{\in}\, \Omega_k^{(m)}, \end{cases} \quad (6)$$

$$\tilde{\Phi}_k = -a_k\left[\tilde{\mu}_k^{(-)}(t)\delta'(r - r_{k-1}) - \tilde{\mu}_k^{(+)}(t)\delta'(r - r_k)\right],$$

$$\tilde{R}_k = -a_k\left[\left(\frac{\partial \tilde{T}_k^{(m)}}{\partial r} + \frac{m-1}{r}\tilde{T}_k^{(m)}\right)\left(\delta(r - r_{k-1}) - \delta(r - r_k)\right)\right]. \quad (7)$$

Здесь $\Theta(t)$ – единичная ступенчатая функция Хэвисайда; $\delta(t) = d\Theta(t)/dt$; $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака; $\chi_k(r) = \Theta(r - r_{k-1}) - \Theta(r - r_k)$ – характеристическая функция области $\Omega_k^{(m)}$; $\delta(r - r_k) = d\Theta(r - r_k)/dr$ [23].

Биообобщенной постановке задачи (5)–(7) соответствует более простая структура решения – «представление потенциала» [21,24]:

$$\tilde{T}_k^{(m)}(r,t) = \left< G_k^{(m)}(r,r',t) \underset{(t)}{*} \left[\tilde{\Psi}_k(r',t) + \tilde{\Phi}_k(r',t)\right] \right>_{\Omega_k^{(m)}}. \quad (8)$$

Функция $\tilde{R}_k(r,t)$ в (8) выпадает, т.к. содержит δ-функции, обнуливающие решения ввиду принимаемых для функций Грина однородных граничных условий:

$$\tilde{G}_k^{(m)}(r,r',t)\Big|_{r=r_{k-1}} = \tilde{G}_k^{(m)}(r,r',t)\Big|_{r=r_k} = 0.$$

Символ $\underset{(t)}{*}$ в (8) обозначает свертку по t. Можно показать (чего не делаем из-за громоздкости выкладок), что представление потенциала и граничных функций эквивалентны, т.е. приводятся друг к другу.

Подстановка $\tilde{T}_k^{(m)}(r,t)$ и $\tilde{T}_{k+1}^{(m)}(r,t)$ во второе из граничных условий IV рода позволяет получить уравнение склейки, аналогичное (1):

$$\overline{a}_{k,k-1}^{(m)}\overline{\mu}_{k-1}^{(+)}(p) + \overline{a}_{k,k}^{(m)}\overline{\mu}_k^{(+)}(p) + \overline{a}_{k,k+1}^{(m)}\overline{\mu}_{k+1}^{(+)}(p) = \overline{b}_k^{(m)}(p),\quad m = 2,3. \quad (9)$$

Для ЦСС $(m = 2)$ коэффициенты (9) имеют весьма громоздкий вид, поскольку соответствующие функции Грина представляют собой ряды со спецфункциями, что требует их приближенного определения [9,10]. Для сферических слоистых систем $(m=3)$ удается получить компактные выражения:

$$\bar{a}_{k,k-1}^{(3)} = -\frac{\lambda_k}{\Delta r_k}\left(1-\frac{\Delta r_k}{r_k}\right)\frac{\delta_k\sqrt{p}}{\operatorname{sh}\delta_k\sqrt{p}}, \quad \bar{a}_{k,k+1}^{(3)} - \frac{\lambda_{k+1}}{\Delta r_{k+1}}\left(1+\frac{\Delta r_{k+1}}{r_k}\right)\frac{\delta_{k+1}\sqrt{p}}{\operatorname{sh}\delta_{k+1}\sqrt{p}},$$
$$\bar{a}_{k,k}^{(3)} = \frac{\lambda_k\delta_k\sqrt{p}}{\Delta r_k}\operatorname{cth}\delta_k\sqrt{p} + \frac{\lambda_{k+1}\delta_{k+1}\sqrt{p}}{\Delta r_{k+1}}\operatorname{cth}\delta_{k+1}\sqrt{p} + \frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{r_k}; \qquad (10)$$

$$\bar{b}_k^{(3)} = \frac{1}{r_k}\left[(\rho c)_k\left\langle \bar{K}_{3,k}^{(+)},\ \bar{\Psi}_k\right\rangle_{\Omega_k^{(3)}} + (\rho c)_{k+1}\left\langle \bar{K}_{3,k+1}^{(-)},\bar{\Psi}_{k+1}\right\rangle_{\Omega_{k+1}^{(3)}}\right],$$
$$\bar{K}_{3,k}^{(+)} + \frac{1}{4\pi r'}\frac{\operatorname{sh}\delta_k\sqrt{p}\rho_k'}{\operatorname{sh}\delta_k\sqrt{p}}, \quad \bar{K}_{3,k+1}^{(-)} = \frac{1}{4\pi r'}\frac{\operatorname{sh}\delta_{k+1}\sqrt{p}\left(1-\rho_{k+1}'\right)}{\operatorname{sh}\delta_{k+1}\sqrt{p}}, \qquad (11)$$
$$\Delta r_k = r_k - r_{k-1}, \quad \delta_k = \frac{\Delta r_k}{\sqrt{a_k}}, \quad \rho_k' = \frac{r' - r_{k-1}}{\Delta r_k}.$$

Проверку (9)–(11) можно осуществить двумя способами: 1) совпадением (9) с (1) при переходе к плоским слоям (для чего необходимо заменить: $\Delta r_k \to l_k,\ \Delta r_{k+1} \to l_{k+1},\ r_k \to \infty)$; 2) совпадением подвергнутого обратному преобразованию Лапласа (9) при стягивании ширин слоев в точку ($\Delta r_k,\ \Delta r_{k+1} \to 0,\ r_k \to r$) с уравнением теплопроводности для непрерывно-неоднородной среды:

$$\rho(r)c(r)\frac{\partial \tilde{T}^{(m)}}{\partial t} = \frac{1}{r^{m-1}}\left(r^{m-1}\lambda(r)\frac{\tilde{\partial}\tilde{T}^{(m)}}{\partial r}\right) + \rho(r)c(r)\tilde{\Psi}(r,t). \qquad (12)$$

Несложные, но несколько громоздкие выкладки, здесь опускаемые, показывают, что оба эти способа подтверждают правильность (9)–(11).

3. Временные асимптотики

3.1. «Малые» времена. Для достаточно малых $t \le t_0$ температура на границе слоев $\Omega_k^{(3)}$ и $\Omega_{k+1}^{(3)} - T_k^{(3)}(r_k,t) = \tilde{\mu}_k^{(+)}(t)$ не должна зависеть от $\tilde{\mu}_{k-1}^{(+)}(t)$ и $\tilde{\mu}_{k+1}^{(+)}(t)$ (редукция двухслойной системы $\left\{\Omega_k^{(3)},\Omega_{k+1}^{(3)}\right\}$ с конечными слоями к двухслойной системе с полубесконечными слоями $\left\{\Omega_{1+}^{(1)},\Omega_{2+}^{(1)}\right\}$). Одновременная замена сферических слоев плоскими здесь обязательна. В пределе $t \to 0\ \ (p \to \infty)$ из (9) следует, в соответствии со случаем плоских слоев [21]:

$$\tilde{\mu}_k^{(+)}(0) = \lim_{t\to 0}\tilde{\mu}_k^{(+)}(t) = \lim_{p\to\infty} p\bar{\mu}_k^{(t)}(p) = \frac{\varepsilon_k\varphi_k(r_k-0) + \varepsilon_{k+1}\varphi_{k+1}(r_k+0)}{\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1}}. \qquad (13)$$

Получение выражения для $\tilde{\mu}_k^{(+)}(t)$ при $t\in(0,t_0)$ требует перехода Δr_k, $\Delta r_{k+1}\to\infty$, что возможно при одновременном переходе к плоским слоям (для чего надо положить $r_k\to\infty$). В итоге получаем:

$$\tilde{\mu}_k^{(+)}(t)=\left\{\varepsilon_k\int\limits_0^\infty d\xi\left(\left[\frac{\exp\left(-\xi^2/4a_kt\right)}{\sqrt{\pi a_kt}}\right]\underset{(t)}{*}\tilde{\Psi}_k\right)+\right.$$
$$\left.+\varepsilon_{k+1}\int\limits_0^\infty d\xi\left(\left[\frac{\exp\left(-\xi^2/4a_{k+1}t\right)}{\sqrt{\pi a_{k+1}t}}\right]\underset{(t)}{*}\tilde{\Psi}_{k+1}\right)\right\}\Big/\left(\varepsilon_k+\varepsilon_{k+1}\right). \tag{14}$$

Если в (14) перейти к пределу $t\to 0$ и учесть, что в квадратных скобках имеем $\delta(\xi)$, то получим (13), где $r=r_k$ соответствует началу координат осей 0ξ, ориентированных в слоях противоположно.

Установим критерий применимости (14) – границу t_0 интервала $t\in(0,t_0)$, для которого это соотношение справедливо. Запишем функции в квадратных скобках (14) в квазифинитной форме [23]:

$$\tilde{F}_i(\xi,t)\cong\chi_i(Li)\left[\frac{\exp\left(-\xi^2/4a_it\right)}{\sqrt{\pi a_it}}\right],\quad \chi_i(Li)=\begin{cases}1,\xi\in(0,Li)\\0,\xi\,\overline{\in}\,(0,Li)\end{cases},\quad i=k,k+1. \tag{15}$$

Первый интеграл в (14) обозначим J_k, а его приближение при подстановке $\tilde{F}_i(\xi,t)-\hat{J}_k$. Тогда

$$\varepsilon^{(k)}=\frac{J_k-\hat{J}_k}{J_k}=1-\frac{\hat{J}_k}{J_k},\quad \hat{J}_k=\int\limits_0^{L_k}d\xi\left(\left[\frac{\exp\left(-\xi^2/4a_kt\right)}{\sqrt{\pi a_kt}}\right]\underset{(t)}{*}\tilde{\Psi}_k\right). \tag{16}$$

Как можно показать, при ограниченных по модулю в области $\xi\in(0,L_k)$, $t\in(0,T)$ $(T<\infty)$ функциях $\tilde{\Psi}_k$ справедлива оценка

$$\varepsilon^{(k)}\le 1-\hat{J}_{k0}/J_{k0}, \tag{17}$$

где J_{k0}, $\hat{J}_{k0}$ – значение интегралов J_k и $\hat{J}_k$ при $\tilde{\Psi}_k\equiv 1$. Отсюда следует, что требованию $\varepsilon^{(k)}\le 0{,}5\%$ соответствует условие $L_k\le L_k(t)=4\sqrt{a_kt}$. Аналогично для $k\to k+1$ имеем $L_{k+1}\le L_{k+1}(t)=4\sqrt{a_{k+1}t}$. Зона термического влияния, отсчитываемая в $\Omega_k^{(3)}$ от $r=r_k$, будет $\delta r_k\le L_k(t)$, а в области $\Omega_{k+1}^{(3)}$

– соответственно $\delta r_{k+1} \le L_{k+1}(t)$. Чтобы эти зоны, отсчитываемые в $\Omega_k^{(3)}$ от $r = r_{k-1}$ и $r = r_k$, в $\Omega_{k+1}^{(3)}$ от $r = r_k$ и $r = r_{k+1}$, не перекрывались, необходимо потребовать: $L_k(t) \le \frac{\Delta r_k}{2}$, $L_{k+1}(t) \le \frac{\Delta r_{k+1}}{2}$.

Отсюда получаем искомый критерий:

$$t \le t_0 = 0{,}0156 \min\left\{t_r^{(k)}, t_r^{(k+1)}\right\}, \; t_r^{(k)} = \frac{\Delta r_k^2}{a_k}. \tag{18}$$

3.2. «Большие» времена. Для поля в $\Omega_k^{(3)}$ критерием приближения «больших времен» (или квазистационарности поля) $t \ge t_s^{(k)}$ будет такое значение $t = t_s^{(k)}$, начиная с которого компонента температурного поля, обусловленная начальной температурой неоднородностью, будет составлять не более 0,5% от начальной температуры. Эта компонента согласно (8):

$$\tilde{U}_k^{(3)}(r,t) = 4\pi \int\limits_{r_{k-1}}^{r_k} (r')^2\, dr' \tilde{G}_k^{(3)}(r,r',t)\, \varphi_k(r'). \tag{19}$$

Оценивая (19) по модулю, получаем:

$$\left\|\tilde{U}_k^{(3)}\right\|_{C\left(\Omega_k^{(3)}\right)} \equiv \max_{r \in \Omega_r^{(3)}} \left|\tilde{U}_k^{(3)}(r,t)\right| \le \left\|\varphi_k\right\|_{C\left(\Omega_k^{(3)}\right)} 4\pi \int (r')^2 dr' \left|\bar{G}_k^{(3)}(r,r't)\right|. \tag{20}$$

Используя выражение для $\tilde{G}_k^{(3)}(r,r't)$ [21]:

$$\tilde{G}_k^{(3)}(r,r',t) = \frac{\Theta(t)}{2\pi \Delta r_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{rr'} \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\Delta r_k}\right)^2 a_k t\right] \sin(n\pi\rho_k) \sin\left(n\pi\rho_k'\right) \tag{21}$$

(где $\rho_k = (r - r_{k-1}) / \Delta r_k$, $\rho_k' = (r' - r_{k-1}) / \Delta r_k$), для интеграла в (20), обозначаемого $R_k(t)$, получаем оценку:

$$R_k(t) \le \frac{2}{\pi}(1 + \alpha_k) \exp\left(-\pi^2 t_s^{(k)} / t_r^{(k)}\right), \; \alpha_k = \frac{r_k}{r_{k-1'}}, \; t_r^{(k)} = \frac{\Delta r_k^2}{a_k}. \tag{22}$$

Полагая правую часть в (22) равной $5 \cdot 10^{-3}$, с учетом (20) находим для $\alpha_k \in [1{,}05; 2{,}0]$:

α_k	1,05	1,1	1,25	1,75	2,0
$t_s^{(k)} / t_r^{(k)}$	0,565	0,567	0,584	0,594	0,602

Видно, что $t_s^{(k)} / t_r^{(k)}$ возрастает с увеличением толщины слоя $\Omega_k^{(3)}$, но незначительно. Поэтому можем принять критерий квазистационарности в виде:

$$t \geq t_s^{(k)} = 0,6 t_r^{(k)}. \tag{23}$$

Для N-слойной системы $t_r^{(k)} = \max\ t_r^{(j)}\ \left(j = \overline{1,N}\right)$, тогда (23) справедливо для уравнений склейки (9) при всех $k = \overline{1,N}$. В этом случае можно положить $\varphi_k(r) = 0$, а при отсутствии в слоях источников тепла и $\tilde{\Psi}_k(r,t) = 0$. Уравнение (9) становится однородным, и по известным $\bar{\mu}_j^{(+)}(p)\ \left(j = k-1, k+1\right)$ можно найти $\bar{\mu}_k^{(+)}(p)$.

Стационарное (при $t \to \infty$) решение (9) легко находится, т.к. из (10) следует:

$$\begin{aligned}
&\lim_{p\to 0} \bar{a}_{k,k-1}^{(3)}(p) = -\frac{\lambda_k}{\Delta r_k}\left(1 - \frac{\Delta r_k}{r_k}\right),\\
&\lim_{p\to 0} \bar{a}_{k,k+1}^{(3)}(p) = -\frac{\lambda_{k+1}}{\Delta r_{k+1}}\left(1 + \frac{\Delta r_{k+1}}{r_k}\right),\\
&\lim_{p\to 0} \bar{a}_{k,k}^{(3)}(p) = \frac{\lambda_k}{\Delta r_k}\left(1 - \frac{\Delta r_k}{r_k}\right) + \frac{\lambda_{k+1}}{\Delta r_{k+1}}\left(1 + \frac{\Delta r_{k+1}}{r_k}\right),\\
&\tilde{\mu}_{k,s}^{(+)} = \lim_{t\to\infty}\ \tilde{\mu}_k^{(+)}(t) = \lim_{p\to 0} p\ \ \bar{\mu}_k^{(+)}(p).
\end{aligned} \tag{24}$$

Полученное по (9) и (24) выражение для $\tilde{\mu}_{k,s}^{(+)}$ совпадает со следующим из решения стационарной задачи теплопроводности для двухслойной системы $\left\{\Omega_k^{(3)}, \Omega_{k+1}^{(3)}\right\}$.

4. Параметрические асимптотики

Коэффициенты и правая часть (9), а следовательно, и $\tilde{\mu}_k^{(+)}(t)$ зависят от параметров δ_k и δ_{k+1}, содержащих геометрические и теплофизические характеристики слоев $\left(\delta_k = \Delta r_k / \sqrt{a_k},\ \delta_k^2 = t_r^{(k)}\right)$. Параметрическими асимптотиками будем называть случаи экстремального поведения этих параметров («вырождение» моделей). Для $\Omega_k^{(3)}$ имеются две возможности:

а) $t_r^{(k)} << t_r^{(\nu)}$;

б) $t_r^{(k)} >> t_r^{(\mu)},\ t_r^{(\nu)} = \min\limits_{(j\neq k)}\ t_r^{(j)},\ t_r^{(\mu)} = \max\limits_{(j'\neq k)}\ t_r^{(j)}$.

В предельном случае $t_r^{(k)} \to 0,\ \delta_k \to 0,$ что соответствует случаю $t \to \infty\ \left(p \to 0\right)$. При $t_r^{(k)} \to \infty,\ \delta_k \to \infty$ имеем случай $t \to 0\ \left(p \to \infty\right)$. Рассмотрим случай а), когда $t_r^{(k)}$ мало (много меньше, чем минимальное по всем другим слоям системы характерное время $t_r^{(\nu)}$), но отлично от нуля. Здесь также есть две возможности: 1) $t_r^{(k)}$ мало, т.к. мало Δr_k; 2), $t_r^{(k)}$мало, т.к. велико a_k (большая теплопроводность среды в $\Omega_k^{(3)}$). Обозначим множители в коэффициентах (9), зависящих от p, через $\bar{\Phi}_i^{(k)}\ \left(i=1,2\right)$:

$$\bar{\Phi}_1^{(k)}\left(p\right)=\frac{\delta_k\sqrt{p}}{sh\ \delta_k\sqrt{p}};\ \bar{\Phi}_2^{(k)}\left(p\right)=\frac{\delta_k\sqrt{p}\ ch\delta_k\sqrt{p}}{sh\ \delta_k\sqrt{p}}. \tag{25}$$

Разлагая (25) в ряды, получаем [25, с.133]:

$$\bar{\Phi}_1^{(k)}\left(p\right)=1-\frac{t_r^{(k)}p}{6}+\frac{7}{360}\left(t_r^{(k)}p\right)^2-\cdots,$$

$$\bar{\Phi}_2^{(k)}\left(p\right)=1+\frac{t_r^{(k)}p}{3}-\frac{1}{45}\left(t_r^{(k)}p\right)^2+\cdots. \tag{26}$$

При $t_r^{(k)} \to 0,\ \bar{\Phi}_1^{(k)}\left(p\right)=\bar{\Phi}_2^{(k)}\left(p\right)=1$ коэффициенты (9) соответствуют случаю стационара, уравнение редуцируется. В слое $\Omega_k^{(3)}$ сразу устанавливается стационарное поле. Сохраняя в (26) то или иное число членов рядов, получим различные квазистационарные приближения. Для некоторой функции времени $F\left(t\right)$ можно записать $dF/dt \sim F/\text{t}_{\min}$ (оценки такого рода весьма распространены; $t_{\min}$ – некоторое характерное малое время). Тогда, осуществляя обратное преобразование Лапласа, получаем:

$$\bar{\Phi}_2^{(k)}\left(p\right)\ \bar{F}\left(p\right)=\left[1-\frac{t_r^{(k)}\left(p\right)}{6}+\frac{7}{360}\left(t_r^{(k)}p\right)^2-\cdots\right]F\left(p\right)\Rightarrow W\left(t\right)\approx$$

$$\approx\left(1-\frac{1}{6}\left(\frac{t_r^{(k)}}{t_{\min}}\right)+\frac{7}{360}\left(\frac{t_r^{(k)}}{t_{\min}}\right)^2-\cdots\right)\bar{F}\left(t\right). \tag{27}$$

В (27) можно ограничиться двумя первыми членами ряда, если только $\frac{7}{60}\left(\frac{t_r^{(k)}}{t_{\min}}\right)\le 10^{-2}$. Приняв $t_{\min}=t_r^{(\nu)}$, находим критерий редукции (9) (критерий вырождения модели в $\Omega_k^{(3)}$):

$$t_r^{(k)} \le 0,086 \ t_r^{(\nu)}. \quad (28)$$

Неравенство $t_r^{(k)} \le 0,15 \ t_r^{(\nu)}$, следующее из рассмотрения $\bar{\Phi}_2^{(k)}(p)$, не используем как более слабое по сравнению с (28). При совпадении Δr_k и Δr_ν из (28) следует критерий вырождения для a_k :

$$a_k \ge 11,6 a_\nu. \quad (29)$$

При $a_k = a_\nu$, напротив, из (28) получаем критерий «узости» $\Omega_k^{(3)}$:

$$\Delta r_k \le 0,29 \ \Delta r_\nu. \quad (30)$$

Если в $\Omega_k^{(3)}$ и $\Omega_\nu^{(3)}$ одинаковы теплопроводности $(\lambda_k = \lambda_\nu)$, то из (29) следует

$$(\rho c)_k \le 0,086(\rho c)_\nu. \quad (31)$$

Выводы

1. Слоистые теплофизические модели важны для решения задач прогноза теплового режима и устойчивости подземных сооружений, в особенности при моделировании аварийных ситуаций.

2. Известные модели не вполне соответствуют предъявляемым требованиям (при упрощенных постановках задач методы их решения усложнены). Моделей для цилиндрических слоистых систем мало, а для сферических они отсутствуют.

3. Предложен метод «функций склейки» для решения краевых задач переноса в слоистых системах с плоскими, цилиндрическими и сферическими слоями. Получено уравнение «склейки» для сферических слоистых систем.

4. На основе уравнения «склейки» проанализированы временные и параметрические асимптотики, установлены критерии применения соответствующих редукций.

1. *Щербань А.Н., Кремнев О.А.* Научные основы расчета и регулирования теплового режима глубоких шахт: В 2 томах. – Киев: Изд-во АН УССР, 1959, т. 1. – 430 с.
2. *Николаев С.А., Николаева Н.Г., Саламатин А.И.* Теплофизика горных пород. – Казань: Изд-во КГУ, 1987. – 151 с.
3. *Ониани Ш.И.* Тепловой режим глубоких шахт при гидравлической закладке выработанного пространства и сложном рельефе поверхности. – Тбилиси: Мецниереба, 1973. – 308 с.
4. *Венгеров И.Р.* Теплофизические модели полной закладки выработанного пространства глубоких шахт // Препринт ДонФТИ. – 1995-4. – Донецк: изд. ДонФТИ им. А.А. Галкина АН Украины, 1995. – 45 с.

5. *Венгеров И.Р.* Тепломассоперенос в шахтах и рудниках (математические модели). 4. Теплоперенос в горных массивах // Препринт ДонФТИ. – 2002-4. – Донецк: изд. ДонФТИ им. А.А. Галкина НАН Украины, 2002. – 101 с.
6. *Черняк В.П., Киреев В.А., Полубинский А.С.* Нестационарный тепломассоперенос в разрушаемых массивах горных пород. – Киев: Наук. думка, 1992. – 224 с.
7. *Мельник В.К., Добрянский Ю.П., Щербань А.Н.* Моделирование температурного режима при остывании зоны внутренних взрывов. – ДАН УССР, сер. А. – 1978. – № 12. – С. 1129–1132.
8. *Кремнев О.А., Журавленко В.Я.* Тепло- и массообмен в горном массиве и подземных сооружениях. – Изд. 2-е, доп., исправл. – Киев: Наук. думка, 1986. – 344 с.
9. *Галицын А.С.* Краевые задачи теплофизики подземных сооружений. – Киев: Наук. думка, 1983. – 236 с.
10. *Кузин В.А., Венгеров И.Р.* Двухслойная теплофизическая модель горного массива // Промышленная теплотехника. – 1984. – **6**, № 1. – С. 30–34.
11. *Венгеров И.Р.* Расчет коэффициентов нестационарного теплообмена на основе слоистых моделей теплопереноса // Промышленная теплотехника. – 1995. – **17**, № 6. – С. 32–39.
12. *Ревва В.Н.* Влияние температуры на предельное состояние породного массива в окрестности горной выработки // ФТВД. – 1997. – **7**, № 2. – С. 133–136.
13. *Семерак М.М., Бейзим І.А.* Термостійкість залізобетонних конструкцій при зміні температури // Вісті Донецького гірничого інституту. – Донецьк: ДВНЗ «ДонНТЦ». – 2007. – № 2. – С. 46–68.
14. *Тютькин А.А.* Исследование взаимодействия слоистого массива с конструкцией пилонной станции метрополитена. – Донецьк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2007. – № 2 – С. 125–133.
15. *Семерак М.М., Суббота А.В.* Термонапружений стан твелів ядерних реакторів. – Донецьк: ДВНЗ „ДонНТУ”. – 2007. – № 2. – С. 157–161.
16. *Венгеров И.Р.* Теплоперенос в шахтах и рудниках (математические модели). 7. Принципы развития парадигмы // Препринт ДонФТИ. – 2002-7. – Донецк: Изд-во ДонФТИ им. А.А. Галкина НАН Украины, 2002. – 111 с.
17. *Краморов А.С., Венгеров И.Р., Морева А.Г.* К вопросу определения коэффициента нестационарного теплообмена при теплоизоляции стенок горных выработок. – В кн.: Охлаждение воздуха в угольных шахтах / Сб. работ МакНИИ, вып. 4. – Макеевка: Изд-во МакНИИ, 1975. – С. 71–76.
18. *Венгеров И.Р.* Расчет тепломассопереноса в неоднородном горном массиве. – В кн.: Борьба с высокими температурами рудничного воздуха. – Макеевка: Изд-во МакНИИ, 1980. – С. 53–56.
19. *Венгеров И.Р.* К теории тепло- и массопереноса в слоисто-неоднородных горных массивах и геотехнологических системах. – В кн.: Проблемы горной теплофизики / Материалы II-й Всесоюзной научно-технической конференции, Ленинград, 1981. – Л.: Изд-во ЛГУ им. А.А. Плеханова, 1981. – С. 117–118.
20. *Венгеров И.Р.* К обобщению задачи Зоммерфельда о теплопроводности в кольце // ИФЖ. – 1978. – **35**, № 1. – С. 150–154.
21. *Венгеров И.Р.* Теория линейного переноса в слоистых системах // Препринт ДонФТИ. – 1982-27. – Донецк: Изд.-во ДонФТИ АН УССР, 1982. – 64 с.

22. *Венгеров И.Р*. Математическое моделирование экологически чистых геотехнологических систем // Вісті Донецького гірничого інституту. – 2007. – № 2, С. 172–177.
23. *Венгеров И.Р*. Хроноартефакты термодинамики. – Донецк: Норд-пресс, 2005. – 236 с.
24. *Владимиров В.С*. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967. – 436 с.
25. *Двайт Г.Б*. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1966. – 228 с.

Статья поступила в редакцию 7 октября 2008 года