

УДК 539.3

© 2009

С. М. Яремченко

## Напружено-деформований стан гофрованих циліндричних оболонок в уточненій постановці

(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)

Дано розв'язання задач про напружений стан гофрованих у поперечному перерізі циліндричних оболонок змінної товщини в уточненій постановці з використанням методів сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації. Досліджено вплив частоти гофрування на розподіл полів переміщень та напружень.

Гофровані вздовж напрямної циліндри часто застосовуються як елементи конструкцій у сучасній техніці, тому задачі про напружено-деформований стан оболонок цього класу мають широке практичне значення [1]. У роботі [2] досліджено тонкі гофровані оболонки на основі гіпотези Кірхгофа–Лява. В [3] наведено підхід до розв'язання задач про напружений стан нетонких циліндричних гофрованих оболонок в уточненій постановці.

У даній роботі проведено аналіз впливу на напружений стан циліндричної оболонки змінної товщини частоти (кроку) її гофрування вздовж напрямної. За вихідні приймаються рівняння уточненої теорії оболонок, що враховує поперечні зсуви [4]. Дослідження проводилися з використанням методів сплайн-апроксимації [5, 1] і дискретної ортогоналізації [1] для розв'язання двовимірних крайових задач.

Нехай рівняння напрямної середньої поверхні циліндричної оболонки задано в полярній системі координат  $r, \theta$

$$r(\theta) = r_0 + \alpha \cos m\theta, \quad (1)$$

де  $r$  — полярний радіус;  $r_0$  — радіус кругового циліндра;  $\alpha$  — амплітуда;  $m$  — частота гофрування.

Віднесемо серединну поверхню оболонки до ортогональної системи координат  $s, \theta$ , де  $s$  — координата вздовж твірної. Нехай  $\gamma$  — координата, нормальна до середньої поверхні оболонки. Перша квадратична форма середньої поверхні оболонки має такий вигляд:

$$dS^2 = ds^2 + A_2^2(\theta)d\theta^2 \quad (0 \leq s \leq l, 0 \leq \theta \leq 2\pi). \quad (2)$$

У цьому випадку  $A_2 = \sqrt{r^2 + (r')^2}$ .

Обравши за невідомі функції компоненти вектора переміщення середньої поверхні оболонки  $u, v, w$  та повні кути повороту  $\psi_s, \psi_\theta$ , розв'язувальну систему рівнянь у частинних похідних, що описує напружений стан ортотропних некругових циліндричних оболонок, можна записати у вигляді [3, 6]

$$L\bar{y} = 0, \quad (3)$$

де  $L$  — лінійний диференціальний оператор другого порядку, а  $\bar{y} = \{u, v, w, \psi_s, \psi_\theta\}$  — шукана вектор-функція.

Нехай торці оболонки жорстко закріплені, тоді на контурах  $s = 0$ , та  $s = l$  задаються умови

$$\bar{y} = 0. \quad (4)$$

Будемо досліджувати оболонки, поперечний переріз яких має симетрію, тоді у відповідних двох точках  $\theta = \text{const}$  виконуються такі умови:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = v = \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} = \psi_\theta = 0. \quad (5)$$

Система рівнянь (3) і граничні умови (4), (5) утворюють двовимірну крайову задачу.

Оскільки у цьому випадку кривина поперечного перерізу серединної поверхні оболонки може значно змінюватись, то сплайн-апроксимацію будемо проводити вздовж твірної. Так як на торцях оболонки задано умови (4), то розв'язок задачі подамо у вигляді

$$\bar{y} = \sum_{i=0}^N \bar{y}_i \varphi_i(s). \quad (6)$$

У виразі (6)  $\bar{y}_i = \{u_i(\theta), v_i(\theta), w_i(\theta), \psi_{si}(\theta), \psi_{\theta i}(\theta)\}$  — невідомі функції, а  $\varphi_i(s)$  — лінійні комбінації В-сплайнів третього степеня на рівномірній сітці, що задовольняють граничні умови (4) [1]. Підставляючи вирази (6) у розв'язувальні рівняння (3) і умови симетрії (5), вимагаємо, щоб отримана система і граничні умови точно задовольнялися в  $N + 1$  точці колокації  $s_i$  вздовж твірної. Як результат отримуємо одновимірну крайову задачу, яку можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}}{d\theta} &= A\bar{z} + \bar{f}; \\ B_1\bar{z} &= \bar{b}_1 \quad (\theta = \theta_1), \quad B_2\bar{z} = \bar{b}_2 \quad (\theta = \theta_2), \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\bar{z} = \{\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_N, \bar{y}'_0, \dots, \bar{y}'_N\}$  — вектор-функція від  $\theta$ ;  $\bar{f}$  — вектор правих частин;  $A$  — квадратна матриця, елементи якої залежать від  $\theta$ ;  $B_1$  та  $B_2$  — матриці граничних умов;  $\bar{b}_1$  і  $\bar{b}_2$  — відповідні вектори. Одновимірна крайова задача (7) розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації [1]. Після підстановки значень  $\bar{y}_i$  в (6) одержимо розв'язок двовимірної крайової задачі.

На основі викладеного підходу проведемо аналіз напруженого стану циліндричних оболонок з поперечним перерізом, що задається рівнянням (1). Спочатку проаналізуємо вплив параметра частоти гофрування на прогини і напруження замкненої трансверсально ізотропної оболонки сталої товщини з такими параметрами:  $r_0 = 15$ ,  $L = 30$ ,  $\alpha = 0,1$ , товщина  $h = 1$ , модуль Юнга  $E$ , модулі зсуву  $G_{s\gamma} = G_{\theta\gamma} = G' = E/40$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ . На оболонку діє рівномірно розподілене навантаження  $q_\gamma = q_0$ .

На рис. 1 та 2 показано розподіл прогинів  $w$  та напружень  $\sigma_\theta^+$  на зовнішній поверхні оболонки залежно від частоти гофрування в перерізі  $s = l/2$ .

Як видно з графіків, що зображені на рис. 1, максимальні прогини можна спостерігати при  $\theta = \pi/m$  для всіх трьох випадків частоти. Найбільші значення прогину спостерігаються при  $m = 4$ . Зі збільшенням  $m$  максимальний прогин зменшується. У вершині гофра найбільші прогини при  $m = 12$ . Як впливає з рис. 1, при збільшенні частоти гофрування коливання між максимальним і мінімальним значенням прогину зменшується. Так при

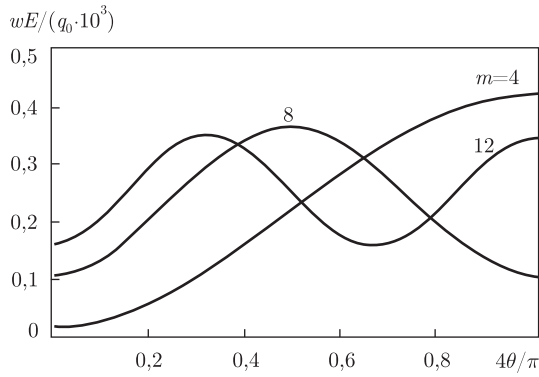


Рис. 1. Розподіл прогинів вздовж напрямної при  $s = l/2$

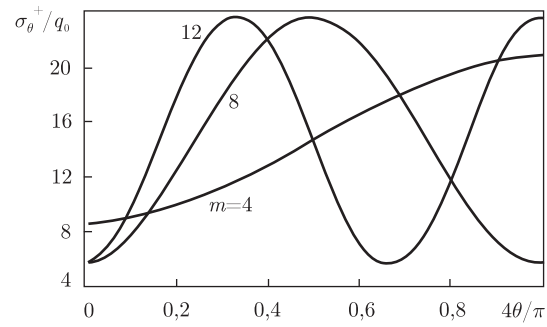


Рис. 2. Розподіл напружень  $\sigma_{\theta}^{+}$  вздовж напрямної при  $s = l/2$

$m = 4$  значення прогину при  $\theta = \pi/4$  перевищує прогин у точці  $\theta = 0$  більш ніж у 20 разів, зі збільшенням  $m$  до 8 можна побачити, що максимальний прогин більший за мінімальний приблизно в 3,5 рази, у випадку  $m = 12$  різниця між прогинами при  $\theta = \pi/12$  і у вершині гофра ще менша.

Напруження  $\sigma_{\theta}^{+}$  на зовнішній поверхні оболонки наведені на рис. 2. Як видно з графіків, максимальні напруження спостерігаються, так як і прогини, поблизу точки  $\theta = \pi/m$ , а мінімальні — при вершині. Зі збільшенням  $m$  від 4 до 8 максимальні напруження зростають приблизно на 15%. При зміні частоти гофрування від 8 до 12 як найбільші, так і найменші значення напружень мало відрізняються, хоча можна помітити незначне зростання максимальних та спадання мінімальних значень.

Також розв'язано задачу для оболонок з вказаними вище параметрами, у яких товщина змінюється за законом  $h = 1 + \beta \cos(m\theta)$ . В табл. 1 наведено розподіл прогинів оболонки в серединному перерізі залежно від параметра  $\beta$ . Як видно з таблиці, залежність прогинів від параметра товщини немонотонна для всіх значень  $\theta$ , що розглядалися. Крім того, максимальні прогини для різних значень  $\theta$  спостерігаються при різних параметрах  $\beta$ . Наприклад, при  $m = 4$  для значень  $\theta = \pi/16$  та  $\theta = \pi/8$  максимальні прогини досягаються при  $\beta = -0,5$ , а для інших значень  $\theta$ , вказаних у таблиці, — при  $\beta = 0,5$ . Отже, варіюючи параметрами товщини та частоти гофрування оболонки, можна досягти раціональних характеристик її напружено-деформованого стану.

Таблиця 1. Розподіл прогинів залежно від частоти гофрування і параметра зміни товщини

| $m$ | $m\theta/\pi$ | $wE/q_0$       |                 |             |                |               |
|-----|---------------|----------------|-----------------|-------------|----------------|---------------|
|     |               | $\beta = -0,5$ | $\beta = -0,25$ | $\beta = 0$ | $\beta = 0,25$ | $\beta = 0,5$ |
| 4   | 0             | 18,2           | 14,3            | 17,7        | 27,5           | 46,1          |
|     | 0,25          | 127,5          | 91,0            | 76,2        | 74,3           | 85,1          |
|     | 0,5           | 286,2          | 244,7           | 221,3       | 209,7          | 211,4         |
|     | 0,75          | 375,5          | 359,5           | 361,6       | 378,1          | 415,4         |
|     | 1             | 403,1          | 399,8           | 419,3       | 463,3          | 555,7         |
| 8   | 0             | 98,7           | 98,4            | 106,2       | 123,4          | 156,2         |
|     | 0,25          | 175,9          | 150,0           | 144,0       | 152,1          | 178,2         |
|     | 0,5           | 297,3          | 256,3           | 237,4       | 233,3          | 248,0         |
|     | 0,75          | 371,3          | 338,2           | 327,3       | 331,2          | 354,7         |
|     | 1             | 395,2          | 367,6           | 364,1       | 379,4          | 423,6         |

1. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: ИД «Академперіодика», 2006. – 472 с.
2. Grigorenko Ya. M., Zakhariichenko L. I. Studying the effect of the spatial frequency and amplitude of corrugation on the stress-strain state of cylindrical shells // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No 12. – P. 1429–1435.
3. Grigorenko Ya. M., Yaremchenko S. N. Refined design of corrugated noncircular cylindrical shells // Ibid. – 2005. – **41**, No 1. – P. 7–13.
4. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Голуб Г. П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1987. – 216 с.
5. Завьялов Ю. С., Квасов Ю. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. – Москва: Наука, 1980. – 352 с.
6. Яремченко С. М. Про розв'язання двовимірних крайових задач статички некругових циліндричних оболонок в уточненій постановці із застосуванням сплайн-функцій // Доп. НАН України. – 2007. – № 11. – С. 75–80.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 03.06.2008

**S. M. Yaremchenko**

### **Stress-strain state of corrugated shells in refined formulation**

*The solution of the problem on a stressed state of corrugated cross-section variable thickness cylindrical shells is given using the spline-approximation and discrete orthogonalization methods. The influence of the corrugation frequency on the fields of displacements and stresses is investigated.*