УДК 512.544

О. Ю. Дашкова

Модули над целочисленными групповыми кольцами локально разрешимых групп с ограничениями на некоторые системы подгрупп

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Вивчається $\mathbf{Z}G$*-модуль* A *такий, що група* G *локально розв'язна, задовольняє умову* $\min -nnz$*, її коцентралізатор у модулі* A *не є нетеровим* $\mathbf{Z}$*-модулем. Доведено, що група* G *розв'язна, описано її будову у випадку, коли* G *не є черніковською групою.*

Пусть F — поле, A — векторное пространство над полем F, $GL(F,A)$ — группа всех F-автоморфизмов векторного пространства A. Группа $GL(F,A)$ и все ее подгруппы называются линейными группами. В случае, когда векторное пространство A имеет бесконечную размерность над полем F, группа $GL(F,A)$ исследовалась совсем мало. Такие исследования требуют наложения дополнительных ограничений на рассматриваемые группы.

В [1] изучались подгруппы G группы $GL(F,A)$, которые обладают тем свойством, что семейство всех подгрупп группы G, имеющих бесконечную центральную размерность, удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Было описано строение групп этого класса.

Если G — подгруппа группы $GL(F,A)$, A может быть рассмотрен как FG-модуль. Обобщением этой ситуации является случай RG-модуля, где R — коммутативное кольцо, достаточно близкое к полю (область целостности, дедекиндова область, область главных идеалов и т. д.). Одним из обобщений конечномерного векторного пространства являются R-модули с условием максимальности (нетеровы модули). В настоящей работе исследуется $\mathbf{Z}G$-модуль A такой, что фактормодуль $A/C_A(G)$ не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. В этом случае будем говорить, что коцентрализатор группы G в модуле A не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Обозначим символом $L_{nnz}(G)$ семейство всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются нетеровыми $\mathbf{Z}$-модулями. Если $L_{nnz}(G)$ удовлетворяет условию минимальности, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, коцентрализаторы которых в модуле A не являются нетеровыми $\mathbf{Z}$-модулями, или, просто, группа G удовлетворяет условию $\min -nnz$.

Приведем некоторые факты о $\mathbf{Z}G$-модулях. Отметим, что если $K \leqslant H \leqslant G$ и коцентрализатор подгруппы H в модуле A является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем, то коцентрализатор подгруппы K в модуле A также является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Если U, $V \leqslant G$ такие, что их коцентрализаторы в модуле A являются нетеровыми $\mathbf{Z}$-модулями, то фактормодуль $A/(C_A(U) \bigcap C_A(V))$ также является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Следовательно, коцентрализатор подгруппы $\langle U, V \rangle$ в модуле A является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем.

Предположим, что группа G удовлетворяет условию $\min -nnz$. Если $H_1 > H_2 > H_3 > > \cdots$ — бесконечный строго убывающий ряд подгрупп группы G, то существует натуральное число n такое, что коцентрализатор подгруппы H_n в модуле A является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Кроме того, если N — нормальная подгруппа группы G и коцентрализатор подгруппы N в модуле A не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем, то факторгруппа G/N удовлетворяет условию минимальности для подгрупп.

Лемма 1. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль. Предположим, что G удовлетворяет условию $\min-$ $-nnz$, X, H — подгруппы группы G, Λ — множество индексов, для которых выполняются следующие условия:*

(i) $X = Dr_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$, где $1 \neq X_\lambda$ — H-инвариантная подгруппа X для каждого $\lambda \in \Lambda$;

(ii) $H \bigcap X \leqslant Dr_{\lambda\in\Gamma}X_\lambda$ для некоторого подмножества Γ из Λ.

Если множество $\Omega = \Lambda \setminus \Gamma$ бесконечно, то коцентрализатор подгруппы H в модуле A является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем.

Лемма 2. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль и группа G удовлетворяет условию $\min -nnz$. Пусть H и K — подгруппы группы G такие, что K — нормальная подгруппа H. Предположим, что существует множество индексов Λ и подгруппы H_λ группы G такие, что $H/K = Dr_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda/K$, и множество Λ бесконечно. Тогда коцентрализатор подгруппы H в модуле A является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем.*

Лемма 3. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль и группа G удовлетворяет условию $\min -nnz$. Если элемент $g \in G$ имеет бесконечный порядок, то коцентрализатор подгруппы $\langle g\rangle$ в модуле A является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем.*

Лемма 4. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль и группа G удовлетворяет условию $\min -nnz$. Если коцентрализатор группы G в модуле A не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем, то факторгруппа G/G' является черниковской группой.*

Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль и группа G удовлетворяет условию $\min -nnz$. Символом $ND(G)$ обозначим множество элементов $x \in G$ таких, что коцентрализатор группы $\langle x\rangle$ в модуле A является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Так как $C_A(x^g) = C_A(x)g$ для всех x, $g \in G$, отсюда вытекает, что $ND(G)$ является нормальной подгруппой группы G. Назовем эту подгруппу нетеровым радикалом группы G.

Лемма 5. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, группа G локально разрешима, удовлетворяет условию $\min -nnz$ и ее коцентрализатор в модуле A не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Тогда либо группа G является периодической, либо $G = ND(G)$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть группа не является периодической и $G \neq ND(G)$. Обозначим через S семейство подгрупп $H \leqslant G$ таких, что H не является периодической, и $H \neq ND(H)$. S не является пустым. Если $H \neq ND(H)$, то существует элемент $h \in H$, для которого фактормодуль $A/C_A(h)$ не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Следовательно, $S \subseteq L_{nnz}(G)$, и поэтому S удовлетворяет условию минимальности. Пусть D — минимальный элемент множества S. Пусть $L = ND(D)$, и отметим, что $L \neq 1$, так как D не является периодической подгруппой. Если $L \leqslant S \leqslant D$ и $S \neq D$, то $S = ND(S)$, и поэтому $S \leqslant L$. Следовательно, D/L имеет порядок q для некоторого простого числа q. Пусть $x \in D \setminus L$. Если элемент a имеет бесконечный порядок, то из выбора D следует, что $\langle x, a\rangle = D$. Отсюда следует, что L конечно порождена, и поскольку $L = ND(L)$, то фактормодуль $A/C_A(L)$ является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Поскольку подгруппа L нормальна в группе D, то $C = C_A(L)$ является $\mathbf{Z}D$-подмодулем модуля A. Если $R = C_D(A/C)$, то R — нормальная подгруппа группы D, и факторгруппа D/R изоморфна подгруппе группы $GL(r, \mathbf{Z})$ [2, гл. 7]. Согласно [3], факторгруппа D/R разрешима, откуда ввиду теоремы А. И. Мальцева [2, гл. 7] следует, что D/R полициклическая. Согласно следствию к теореме 9.12 [4], факторгруппа D/R финитно аппроксимируема. Пусть U — нормальная подгруппа конечного индекса группы D. Подгруппа U не является периодической, и поэтому подгруппа $\langle U, x\rangle$ также непериодическая, и $\langle U, x\rangle \neq ND(\langle U, x\rangle)$. Из выбора D вытекает, что $D = \langle U, x\rangle$, и тогда факторгруппа D/U абелева. Если E — конечный резидуал группы D, то факторгруппа D/E абелева. Отсюда с учетом включения $E \leqslant R$ вытекает, что факторгруппа D/R также абелева. Подгруппа $R\bigcap L$ является подгруппой стабилизатора ряда длины 2, и поэтому она является абелевой. Следовательно, факторгруппа $D/(R\bigcap L)$ абелева, и D является конечно порожденной метабелевой группой. По теореме Ф. Холла [4, теорема 9.51] группа D финитно аппроксимируема. Как и ранее, устанавливаем, что D абелева. Поскольку $D = U\langle x\rangle$ для любой подгруппы U конечного индекса, то группа D — бесконечная циклическая. Согласно лемме 3, $D = ND(D)$. Противоречие с выбором подгруппы D. Лемма доказана.

Если группа G локально разрешима и фактормодуль $A/C_A(G)$ является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем, то факторгруппа $G/C_G(A/C_A(G))$ изоморфна локально разрешимой подгруппе группы $GL(r, \mathbf{Z})$. Поскольку $\mathbf{Z}$ является целостным кольцом, его можно вложить в поле F. Отсюда вытекает, что факторгруппа $G/C_G(A/C_A(G))$ изоморфна некоторой локально разрешимой подгруппе линейной группы $GL(r, F)$. Следовательно, согласно следствию 3.8 [5], факторгруппа $G/C_G(A/C_A(G))$ разрешима, и, поскольку централизатор $C_G(A/C_A(G))$ абелев, отсюда следует разрешимость группы G. Поэтому при изучении локально разрешимых групп с условием $\min - nnz$ необходимо сосредоточить внимание на исследовании локально разрешимых групп G, для которых фактормодуль $A/C_A(G)$ не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем.

Лемма 6. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, группа G — периодическая, локально разрешимая, удовлетворяет условию $\min - nnz$ и ее коцентрализатор в модуле A не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Тогда либо группа G удовлетворяет условию минимальности, либо $G = ND(G)$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть группа G не удовлетворяет условию минимальности и $G \neq ND(G)$. Обозначим через S семейство подгрупп $H \leqslant G$ таких, что H не удовлетворяет условию минимальности и $H \neq ND(H)$. Тогда $S \neq \varnothing$ и удовлетворяет условию минимальности. Пусть D — минимальный элемент S и пусть $L = ND(D)$. Существует бесконечный строго убывающий ряд подгрупп группы D

$$H_1 > H_2 > H_3 > \cdots .$$

Поскольку группа D удовлетворяет условию $\min - nnz$, существует натуральное число d такое, что коцентрализатор подгруппы H_d в модуле A является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Следовательно, $H_d \leqslant L$, и поэтому L не удовлетворяет условию минимальности. Отсюда вытекает, что если $x \in D \setminus L$, то $\langle x, L\rangle = D$ ввиду выбора подгруппы D. Следовательно, факторгруппа D/L имеет порядок q для некоторого простого числа q. Заменяя x, если это необходимо, подходящей степенью, можно положить, что x имеет порядок q^r для некоторого натурального числа r. Поскольку группа D не является черниковской, согласно теореме Д. И. Зайцева [6], D содержит $\langle x\rangle$-инвариантную абелеву подгруппу $B = Dr_{n\in N}\langle b_n\rangle$, и можно считать, что элементы b_n имеют простые порядки для каждого $n \in N$. Пусть $1 \neq c_1 \in B$ и $C_1 = \langle c_1\rangle^{\langle x\rangle}$. Тогда C_1 конечна и существует подгруппа E_1 такая, что $B = C_1 \times E_1$. Пусть $U_1 = core_{\langle x\rangle}E_1$. Тогда U_1 имеет конечный индекс в B. Если $1 \neq c_2 \in U_1$ и $C_2 = \langle c_2\rangle^{\langle x\rangle}$, то C_2 — конечная $\langle x\rangle$-инвариантная подгруппа, и $\langle C_1, C_2\rangle = C_1 \times C_2$. Продолжая это построение, можно построить семейство подгрупп $\{C_n \mid n \in \mathbf{N}\} = Dr_{n\in\mathbf{N}}C_n$. Из леммы 1 следует, что $x \in L$. Противоречие. Лемма доказана.

Из доказанных лемм вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, группа G локально разрешима, удовлетворяет условию $\min-nnz$ и ее коцентрализатор в модуле A не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Тогда либо группа G удовлетворяет условию минимальности, либо $G = ND(G)$.*

Лемма 7. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, группа G локально разрешима, удовлетворяет условию $\min-nnz$ и коцентрализатор группы G в модуле A не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Тогда либо группа G разрешима, либо G обладает возрастающим рядом нормальных подгрупп $1 = S_0 \leqslant S_1 \leqslant \cdots \leqslant S_\omega = \cup_{n\in\mathbf{N}} S_n \leqslant G$ таким, что коцентрализатор каждой подгруппы S_n в модуле A является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем, факторы S_{n+1}/S_n абелевы для $n \geqslant 0$, а факторгруппа G/S_ω — разрешимая черниковская группа.*

Лемма 8. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, группа G удовлетворяет условию $\min-nnz$, коцентрализатор группы G в модуле A не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем и $G = ND(G)$. Тогда факторгруппа G/G^{Im} конечна.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть факторгруппа G/G^{Im} бесконечна. Тогда группа G обладает бесконечным убывающим рядом нормальных подгрупп $G \geqslant N_1 \geqslant \geqslant N_2 \geqslant \cdots$ таким, что факторгруппы G/N_i конечны для каждого номера i. Следовательно, существует номер k, для которого факторгруппа G/N_k конечна и коцентрализатор подгруппы N_k в модуле A является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Поскольку $G = ND(G)$, можно выбрать подгруппу H такую, что $H = ND(H)$, и $G = HN_k$. Следовательно, коцентрализатор группы G в модуле A является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, группа G локально разрешима, удовлетворяет условию $\min-nnz$ и ее коцентрализатор в модуле A не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Если G обладает возрастающим рядом нормальных подгрупп $1 = S_0 \leqslant S_1 \leqslant \cdots \leqslant S_n \leqslant \cdots \leqslant \leqslant \bigcup\limits_{n\geqslant 1} S_n = G$ таким, что коцентрализатор каждой подгруппы S_n в модуле A является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем, и каждый фактор S_{n+1}/S_n абелев, то группа G разрешима.*

Доказательство. Поскольку фактормодуль $A/C_A(S_k)$ является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем, то существует конечный ряд $\mathbf{Z}G$-подмодулей $A = A_0 \geqslant A_1 \geqslant \cdots \geqslant A_{n(k)} = C_A(S_k)$, каждый фактор которого является либо конечным $\mathbf{Z}G$-модулем, либо $\mathbf{Z}G$-модулем, аддитивная группа которого конечно порождена и не имеет кручения. Поскольку коцентрализатор подгруппы S_{k+1} в модуле A является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем, можно продолжить построенный ряд $\mathbf{Z}G$-подмодулей $A = A_0 \geqslant A_1 \geqslant \cdots \geqslant A_{n(k)} \geqslant \cdots \geqslant A_{n(k+1)} = C_A(S_{k+1})$, каждый фактор которого является либо конечным $\mathbf{Z}G$-модулем, либо $\mathbf{Z}G$-модулем, аддитивная группа которого конечно порождена и не имеет кручения. Продолжая это построение, мы получим ряд $\mathbf{Z}G$-подмодулей $A = A_0 \geqslant A_1 \geqslant A_2 \geqslant \cdots \geqslant A_\omega = C_A(G)$ с указанными свойствами.

Пусть $H = \bigcap\limits_{j\geqslant 0} C_G(A_j/A_{j+1})$. Для каждого j факторгруппа $G/C_G(A_j/A_{j+1})$ является полициклической [2, гл. 7], и, согласно следствию к теореме 9.12 [4], факторгруппа $G/C_G(A_j/A_{j+1})$ финитно аппроксимируема. Поскольку G/H вкладывается в декартово произведение факторгрупп $G/C_G(A_j/A_{j+1})$, то G/H финитно аппроксимируема. Кроме того, группа G является объединением подгрупп, коцентрализаторы которых в модуле A являются нетеровыми $\mathbf{Z}$-модулями. Следовательно, $G = ND(G)$. По лемме 8 факторгруппа G/H конечна. Так как $G = ND(G)$, то коцентрализатор подгруппы H в модуле A не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Покажем, что подгруппа H разрешима. Положим $L_j = C_H(A/A_j)$, $j = 1, 2, \ldots$. Пусть $H \neq L_j$ для некоторого j. Предположим сначала, что существует номер t, для которого факторгруппа H/L_t бесконечна. Тогда найдется номер $k \geqslant j$, $k \geqslant t$, для которого среди факторов ряда $A/A_k = A_0/A_k \geqslant A_1/A_k \geqslant A_2/A_k \geqslant \cdots \geqslant A_j/A_k \geqslant \cdots \geqslant A_k/A_k$

есть бесконечные. Тогда в силу результатов [7, гл. 8] H имеет нильпотентный непериодический образ. Отсюда следует, что в H можно выбрать нормальную подгруппу H_1, для которой факторгруппа H/H_1 — нильпотентная непериодическая группа, и поэтому найдется нормальная подгруппа H_2, для которой факторгруппа H/H_2 — абелева группа без кручения. Противоречие с леммой 4. Следовательно, $H = L_j$ для любого номера j, $j = 1, 2, \ldots$. Пусть теперь для любого номера j, $j = 1, 2, \ldots$, факторгруппа H/L_j конечна. Предположим, что существует номер j, для которого коцентрализатор подгруппы L_j в модуле A является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Пусть j — наименьший номер с указанным свойством, и поэтому коцентрализатор подгруппы L_{j-1} в модуле A не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Поскольку факторгруппа L_{j-1}/L_j конечна и $G = ND(G)$, то коцентрализатор подгруппы L_{j-1} в модуле A является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Противоречие. Следовательно, коцентрализатор каждой подгруппы L_j в модуле A не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Поскольку H удовлетворяет условию $\min -nnz$, существует номер m, для которого $L_j = L_m$ для всех $j \geqslant m$. Отсюда с учетом выбора L_j вытекает, что подгруппа L_m разрешима. Так как факторгруппа H/L_m конечна, то H также разрешима. Лемма доказана.

Из полученных результатов вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, группа G локально разрешима, ее коцентрализатор в модуле A не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем и G удовлетворяет условию $\min -nnz$. Тогда группа G разрешима.*

Теорема 3. *Пусть A — $\mathbf{Z}G$-модуль, G — локально разрешимая нечерниковская группа, удовлетворяющая условию $\min -nnz$, причем коцентрализатор группы G в модуле A не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. Тогда группа G содержит нормальную нильпотентную подгруппу H такую, что факторгруппа G/H черниковская.*

Доказательство. Отметим, что по теореме 2 группа G разрешима. Пусть $G = D_0 \geqslant \geqslant D_1 \geqslant D_2 \geqslant \cdots \geqslant D_n = 1$ — производный ряд подгруппы S. Согласно лемме 4, существует номер m такой, что коцентрализатор подгруппы D_m в модуле A не является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем, а коцентрализатор подгруппы D_{m+1} в модуле A является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем. По лемме 4, факторгруппы D_i/D_{j+1}, $i = 0, 1, \ldots, m$, являются черниковскими. Пусть $U = D_{m+1}$, тогда факторгруппа G/U черниковская. Положим $C = C_A(U)$. C является $\mathbf{Z}G$-подмодулем модуля A. Поскольку коцентрализатор подгруппы U в модуле A является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем, то фактормодуль A/C является нетеровым $\mathbf{Z}$-модулем, и поэтому существует ряд подмодулей

$$0 = C_0 \leqslant C = C_1 \leqslant C_2 \leqslant \cdots \leqslant C_t = A,$$

у которого каждый фактор C_{i+1}/C_i, $i = 1, \ldots, t-1$, является $\mathbf{Z}G$-модулем, аддитивная группа которого конечно порождена. Как и при доказательстве леммы 5 устанавливаем, что факторгруппы $G/C_G(C_{i+1}/C_i)$, $i = 1, \ldots, t-1$, полициклические. Поскольку факторгруппа G/U черниковская и $U \leqslant C_G(C_1)$, то факторгруппа $G/C_G(C_1)$ также является черниковской.

Пусть $H = C_G(C_1) \bigcap C_G(C_2/C_1) \bigcap \cdots \bigcap C_G(C_t/C_{t-1})$. Положим $G_1 = G/H$. Группа G_1 вкладывается в прямое произведение $M = G/C_G(C_1) \times G/C_G(C_2/C_1) \times \cdots \times G/C_G(C_t/C_{t-1})$. Отметим, что группа M минимаксна, и поэтому минимаксна G_1. В M можно выбрать делимую абелеву черниковскую подгруппу D, для которой факторгруппа M/D полициклическая. G_1 содержит делимую абелеву черниковскую подгруппу D_1 такую, что факторгруппа G_1/D_1 почти без кручения [8]. Следовательно, G_1/D_1 изоморфна некоторой подгруппе факторгруппы M/D, и поэтому G_1/D_1 полициклическая. Как и при доказательстве леммы 5, устанавливаем, что факторгруппа G_1/D_1 финитно аппроксимируема. Поскольку группа G не является черниковской, то по лемме 6 $G = ND(G)$. Отсюда с учетом леммы 8 вытекает конечность факторгруппы G_1/D_1. Следовательно, группа $G_1 = G/H$ черниковская. Подгруппа H действует тривиально в каждом факторе ряда $0 = C_0 \leqslant C = C_1 \leqslant C_2 \leqslant \cdots \leqslant \leqslant C_t = A$. Следовательно, H нильпотентна. Теорема доказана.

1. *Dixon M. R., Evans M. J., Kurdachenko L. A.* Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension // J. Algebra. – 2004. – **277**, No 1. – P. 172–186.
2. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – Москва: Наука, 1972. – 240 с.
3. *Смирнов Д. М.* О группах автоморфизмов разрешимых групп // Мат. сб. – 1953. – **32**. – С. 365–384.
4. *Robinson D. J. R.* Finiteness conditions and generalized soluble groups // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. – New York: Springer, 1972. – Vol. 1, 2. – 464 p.
5. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear groups // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. – New York: Springer, 1973. – 229 p.
6. *Зайцев Д. И.* О разрешимых подгруппах локально разрешимых групп // Докл. АН СССР. – 1974. – **214**, № 6. – С. 1250–1253.
7. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. – Москва: Мир, 1973. – Т. 1. – 229 с.
8. *Зайцев Д. И.* К теории минимаксных групп // Укр. мат. журн. – 1971. – **23**, № 5. – С. 652–660.

Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию 15.04.2008

O. Yu. Dashkova

Modules over the integral group rings of locally soluble groups with restrictions on some systems of subgroups

We study $\mathbf{Z}G$*-module* A *such that the group* G *is locally soluble,* G *satisfies the condition* $min-nnz$*, and the cocentralizer of* G *in module* A *is not a Noetherian* $\mathbf{Z}$*-module. It is proved that* G *is a soluble group, and its structure is described in the case where* G *is not a Chernikov group.*