УДК 621.38

А. І. Петренко[1], М. В. Синьков[2], О. В. Федоренко[1]
[1]Національний технічний університет України «КПІ»
проспект Перемоги, 37, 03056 Київ, Україна
[2]Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Основи теорії побудови цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами

Розглянуто узагальнення методу побудови передавальної функції цифрового фільтра, коефіцієнти якої належать певній гіперкомплексній числовій системі. Запропоновано спосіб побудови таких цифрових фільтрів із використанням арифметичних блоків, що оперують з дійсними числами. Наведено результати моделювання фільтра, побудованого запропонованим способом, і виконано їхній порівняльний аналіз з результатами моделювання фільтрів з дійсними коефіцієнтами.

Ключові слова: *цифрові фільтри, передавальна функція, коефіцієнти передавальної функції, гіперкомплексні числові системи, моделювання.*

Застосування гіперкомплексних числових систем в області цифрової обробки сигналів, а саме для побудови цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами, є актуальною та важливою темою. Особливо, враховуючи поширеність цифрових фільтрів сьогодні. Крім того, наукові публікації свідчать про інтерес до цієї теми таких країн як Німеччина, Японія та інших. Тому саме це питання надалі буде досліджуватися в даній роботі.

У зарубіжних роботах різних авторів, хоча й розглядається використання різних гіперкомплексних числових систем (ГЧС) для побудови цифрових фільтрів, усе ж загальний набір ГЧС, що використовується авторами, невеликий [1–4]. Це не дає змоги говорити про зручність та ефективність тих чи інших гіперкомплексних числових систем для побудови цифрових фільтрів (ЦФ) і будувати оптимальні структури цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами для вирішення поставлених задач. Крім того, в таких роботах не розглядається загальний підхід до побудови цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами, натомість, розглядається спосіб побудови цифрового фільтра з використанням конкретної ГЧС.

Незважаючи на те, що способи побудови цифрових фільтрів із коефіцієнтами, що належать різним гіперкомплексним числовим системам і відрізняються між собою, можна окреслити узагальнений метод, за допомогою якого можна побудувати цифровий фільтр із використанням різних ГЧС для представлення коефіцієнтів.

Будь-який фільтр можна повністю описати за допомогою передавальної функції. Знаючи сигнал на вході системи і передавальну функцію, можна відновити вихідний сигнал.

Передавальна функція цифрового фільтра записується у вигляді:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}, \tag{1}$$

де $X(z)$ і $Y(z)$ — z-перетворення відповідно для вхідного та вихідного дискретного сигналів.

Зазвичай, поліноми $X(z)$ та $Y(z)$, при описі цифрового фільтра, матимуть дійсні коефіцієнти. Припустимо, що в нашому випадку ці коефіцієнти — гіперкомплексні числа, що належать деякій ГЧС розмірності m [6]. Тоді функції $H(z)$, $X(z)$ і $Y(z)$ будуть гіперкомплексними функціями. Відношення гіперкомплексних поліномів з правої частини виразу (1) можна представити у формі гіперкомплексної функції.

Таку функцію можна отримати, якщо знаменник правої частини виразу (1) перетворити в поліном з дійсними коефіцієнтами відносно оператора z.

Цього можна добитись, якщо помножити чисельник і знаменник виразу $\frac{Y(z)}{X(z)}$ на вираз, спряжений до знаменника $X(z)$, тобто на $\overline{X(z)}$. Як було сказано раніше, добутком $X(z)\cdot\overline{X(z)}$ буде норма гіперкомплексного числа $X(z)$, що належить до області дійсних чисел. Норма гіперкомплексного числа є виразом степені m відносно компонентів гіперкомплексного числа, де m — розмірність гіперкомплексного числа. Нехай степінь полінома $X(z)$ відносно оператора z буде l, тоді норма $N(X(z)) = X(z)\cdot\overline{X(z)}$ буде поліномом степені $m\cdot l$ відносно оператора z.

Отже передавальна функція (1), але з гіперкомплексними коефіцієнтами, перетвориться на таку:

$$H(z) = \frac{Y(z)\cdot\overline{X(z)}}{N(X(z))}. \tag{2}$$

Вираз (2) можна записати у формі гіперкомплексної функції:

$$H(z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i(z)}{N(X(z))}\cdot e_i, \tag{3}$$

при цьому, коефіцієнти при операторі z у виразах $\frac{f_i(z)}{N(X(z))}$, при $i = 1,\ldots,m$, належать області дійсних чисел. А самі вирази $\frac{f_i(z)}{N(X(z))}$, при $i = 1,\ldots,m$, будуть компонентами гіперкомплексного числа з базисом $e_1, e_2, ... e_m$. Крім того, поліном $f_i(z)$, так само як і $N(X(z))$, буде мати степінь $m \cdot l$ відносно оператора z.

Тобто, передавальну функцію фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами у формі (3) можна записати в такому вигляді:

$$H(z) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{H}_{H_i}(z) \cdot e_i ,$$

де кожен з виразів $\mathcal{H}_{H_i}(z)$, при $i = 1,...,m$, є компонентою гіперкомплексного числа розмірності m і може розглядатися як передавальна функція фільтра з дійсними коефіцієнтами порядку $m \cdot l$.

Таким чином, передавальна функція $H(z)$ цифрового фільтра порядку l з гіперкомплексними коефіцієнтами розмірності m буде гіперкомплексною функцією, кожну компоненту якої можна розглядати як передавальну функцію фільтра з дійсними коефіцієнтами порядку $m \cdot l$.

Для побудови конкретного зразка фільтра, що описується передавальною функцією з гіперкомплексними коефіцієнтами і задовольняв би вказаним до нього вимогам, зручно використовувати звичні методи побудови передавальної функції фільтра з дійсними коефіцієнтами.

Після того, як маємо передавальну функцію-прототип з дійсними коефіцієнтами $H_R = \dfrac{Y_R(z)}{X_R(z)}$, можемо вибрати підходящу ГЧС і побудувати за її допомогою описаним до цього способом передавальну функцію з гіперкомплексними коефіцієнтами. Таку передавальну функцію потрібно привести до вигляду (3). Далі, необхідно вибрати одну із m компонент $\dfrac{f_i(z)}{N(X(z))}$ гіперкомплексної функції (3), яка й буде реалізовувати передавальну функцію-прототип з дійсними коефіцієнтами. Нехай це буде компонента $\dfrac{f_1(z)}{N(X(z))}$.

Лишилося знайти такі гіперкомплексні коефіцієнти передавальної функції вигляду (1), при яких чисельник $f_1(z)$ вибраної компоненти дорівнював би чисельнику $Y_R(z)$ передавальної функції — прототипу з дійсними коефіцієнтами H_R, а знаменник $N(X(z))$ дорівнював би знаменнику $X_R(z)$ функції H_R.

Для цього необхідно скласти дві системи рівнянь. Одна система виходить при прирівнюванні коефіцієнтів при однакових степенях оператора z у виразах $f_1(z)$ та $Y_R(z)$. Іншу систему отримуємо, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях оператора z поліномів $N(X(z))$ та $X_R(z)$.

Якщо така система має розв’язок, то в результаті її розв’язання отримуємо гіперкомплексні коефіцієнти передавальної функції $H_H = \dfrac{Y_H(z)}{X_H(z)}$ вигляду (1), компонента $\frac{f_1(z)}{N(X(z))}$ якої у вигляді (3) буде співпадати з передавальною функцією-прототипом із дійсними коефіцієнтами $H_R = \frac{Y_R(z)}{X_R(z)}$.

Причому, якщо передавальна функція H_R описує цифровий фільтр із дійсними коефіцієнтами порядку l, а розмірність вибраної ГЧС m, то порядок фільтра, який описується передавальною функцією з гіперкомплексними коефіцієнтами H_H має бути не більшим за $\frac{l}{m}$. І, чим ближчий порядок такого фільтра до числа $\frac{l}{m}$, тим ефективнішим є фільтр з точки зору використання ним ресурсів.

Для побудови цифрових фільтрів, у принципі, можна використовувати будь-яку гіперкомплексну числову систему. Але при цьому потрібно мати на увазі, що таблиці множення базисних елементів деяких ГЧС мають нульові елементи, і в деяких із них кількість нульових елементів досить велика. Через це, норма чисел, що належать таким ГЧС і функція $f_i(z)$ з виразу (3) будуть мати дуже простий вигляд. І може вийти так, що коефіцієнти при деяких степенях оператора z будуть нульовими. Тобто форма передавальної функції фільтра буде усічена, а отже така передавальна функція буде мати обмежені можливості для використання. Тобто, в такому випадку системи рівнянь, що описані раніше, не завжди матимуть розв'язок, і значить для деяких передавальних функцій фільтрів із дійсними коефіцієнтами буде неможливим побудувати передавальну функцію фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами такої ГЧС.

Іншим, незручним до застосування випадком може бути випадок, коли норма гіперкомплексного числа або функція $f_i(z)$ з виразу (3) будуть мати малу кількість компонентів гіперкомплексного числа. У такому разі системи рівнянь, які описані раніше, теж не завжди матимуть розв'язок. І отже, за допомогою таких ГЧС не завжди буде можливим побудувати передавальну функцію фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами по деякій відомій передавальній функції фільтра з дійсними коефіцієнтами [5].

Нехай передавальна функція цифрового фільтра має вигляд:

$$H = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot z^{-i}}.$$

Роботу цифрових фільтрів з такою передавальною функцію можна описати таким різницевим рекурентним рівнянням:

$$y[t] = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x[t-i] - \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot y[t-i]. \tag{4}$$

Причому це рівняння буде справедливим і для передавальної функції фільтра з дійсними коефіцієнтами, і для передавальної функції фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами. Відмінність буде лише в тому, що для останнього випадку всі коефіцієнти рівняння будуть належати певній ГЧС розмірності m, і всі алгебраїчні операцію над ними будуть виконуватися за законами даної ГЧС.

При розгляді роботи цифрового фільтра згідно з рівнянням (4), в якому коефіцієнтами a_i та b_i є гіперкомплексні числа, можна відмітити, що на вхід фільтра подається дійсний сигнал. Йому відповідає та компонента гіперкомплексного числа, вираз при якій у функції (3) реалізує передавальну функцію з дійсними коефіцієнтами (1). Після першого ж множення такого сигналу на коефіцієнт a_0 дійсне число перетворюється в гіперкомплексне, і далі у фільтрі циркулюють гіперкомплексні величини.

На виході з фільтра отримуємо гіперкомплексну величину розмірності m. Але дійсним сигналом виходу буде значення тої компоненти гіперкомплексного числа, яка слугувала входом для дійсного сигналу.

Для подальшого проектування цифрового фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами його структуру потрібно описати мовою опису апаратних засобів, наприклад, Verilog [7]. Основними блоками такої структури є суматори, помножувачі та блоки затримки. Ці блоки повинні оперувати з гіперкомплексними числами. Розробка таких блоків потребує багато часу та ресурсів, але існують бібліотеки вже розроблених суматорів, помножувачів та інших блоків, що оперують з дійсними числами, описаних мовою Verilog. Останні відрізняються своїми можливостями, швидкістю виконання операцій та іншими властивостями. Проте, знайти апаратні блоки для роботи з гіперкомплексними числами, які описані мовами опису апаратних засобів, дуже складно. Оскільки операції множення і додавання гіперкомплексних чисел можуть бути представлені набором операцій з дійсними числами, то побудова гіперкомплексного суматора та помножувача з набору існуючих дійсних суматорів і помножувачів є досить простим і ефективним способом побудови цифрового пристрою, що оперує з гіперкомплексними числами.

Для опису гіперкомплексних помножувачів і суматорів можна вибрати суматор (fpadd) та помножувач (fpmul) дійсних чисел, які розроблені й описані мовою Verilog в Harvey Mudd College.

Таким чином, фільтр може бути представлений у вигляді блоків. Блочна структура гіперкомплексного фільтра для його опису мовою Verilog може бути такою, як показано на рис. 1. Блоки fpadd та fpmul і блок затримки являються базовими. Помножувач і суматор комплексних чисел реалізуються з використанням базових блоків fpadd та fpmul, які в свою чергу використовуються для реалізації помножувача та суматора гіперкомплексних чисел. У результаті блоки помножувача та суматора гіперкомплексних чисел і блок затримки використовуються для реалізації всього фільтра. Кожен блок представляє собою окремий файл мовою Verilog. У результаті ми маємо файл, написаний мовою Verilog, що відповідає головному блоку структури, в якому використовуються всі інші блоки структури, і представляє собою сам пристрій «фільтр».

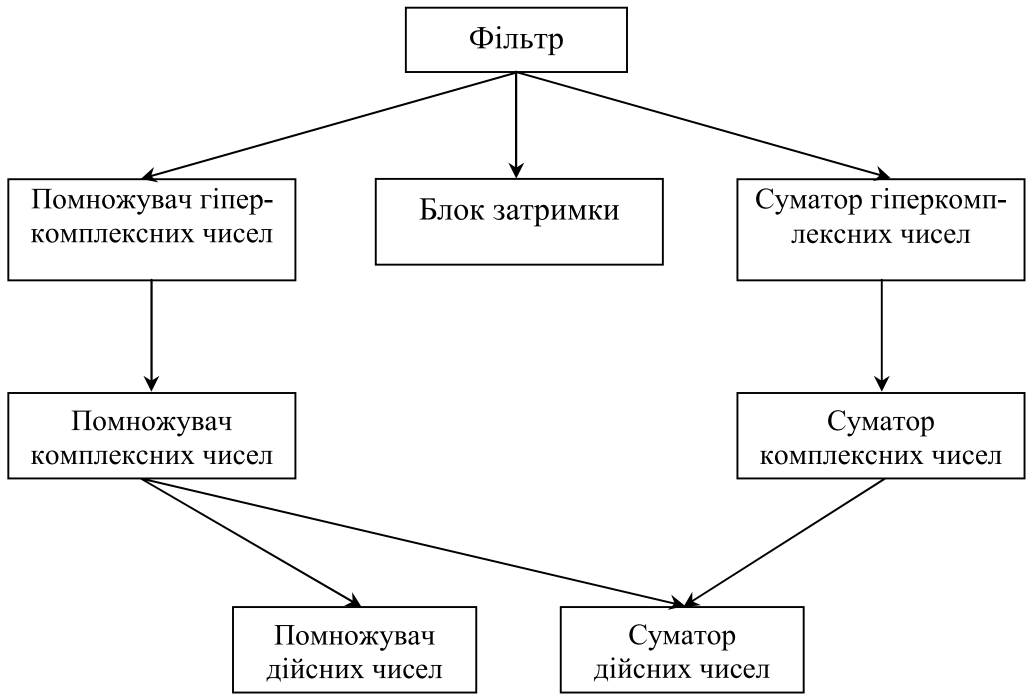

Рис. 1. Блочна структура цифрового фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами

На основі представленої на рис. 1 блочної структури цифрового фільтра, в САПР Quartus II було розроблено базову модель цифрового фільтра першого порядку з квадриплексними коефіцієнтами [8]. Множники та суматори базової моделі працюють з 16-розрядними числами у форматі з плаваючою комою у відповідності до стандарту IEEE 754. Але для проведення досліджень ефективності використання фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами були також розроблені моделі з розрядностями 8, 12, 24 і 32.

З метою визначення ефективності використання цифрового фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами, були також створені базові (16-розрядні) структури цифрових фільтрів із дійсними коефіцієнтами третього і четвертого порядків.

На базі розроблених моделей у САПР Quartus II було проведено моделювання цифрових фільтрів з квадриплексними коефіцієнтами та їхніх аналогів із дійсними коефіцієнтами.

У результаті моделювання отримано максимальні значення тактової частоти і внутрішніх затримок для різних варіацій моделей, кількість логічних елементів, регістрів пам’яті та спеціальних блоків цифрової обробки сигналів, займаних пристроєм у ПЛІС. З рис. 2 видно, що отримані максимальні тактові частоти роботи цифрових фільтрів 1-го порядку з квадриплексними коефіцієнтами майже вдвічі більші ніж у відповідних фільтрів 3-го і 4-го порядків із дійсними коефіцієнтами. Разом із тим із рис. 3 видно, що кількість блоків логічних пристроїв (ALUT, тобто обсяг апаратних засобів), які використовуються фільтрами при їхній реалізації у вигляді ПЛІС у цифрових фільтрах із квадриплексними коефіцієнтами 1-го порядку, в кілька разів більша за кількість блоків у аналогічних цифрових фільтрах 3-го і 4-го порядків з дійсними коефіцієнтами.

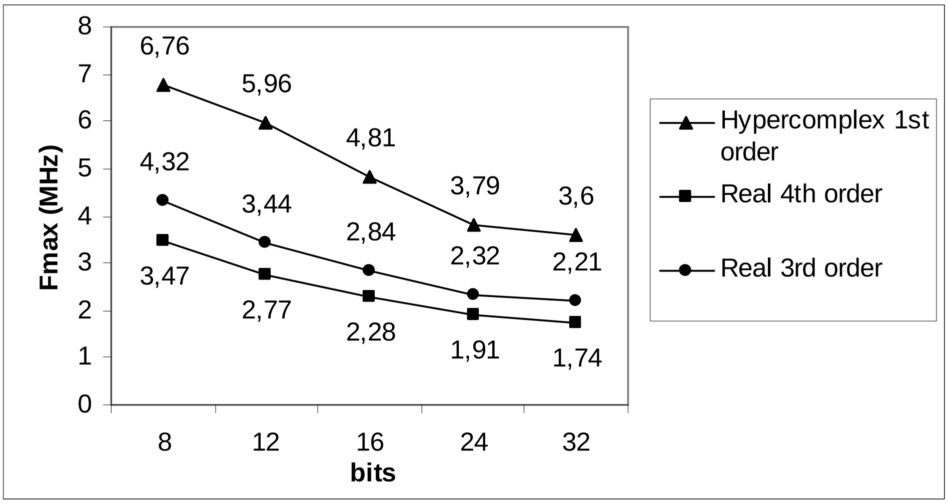

Рис. 2. Значення максимальних тактових частот, отриманих при моделюванні цифрових фільтрів із гіперкомплексними і дійсними коефіцієнтами в САПР Quartus II

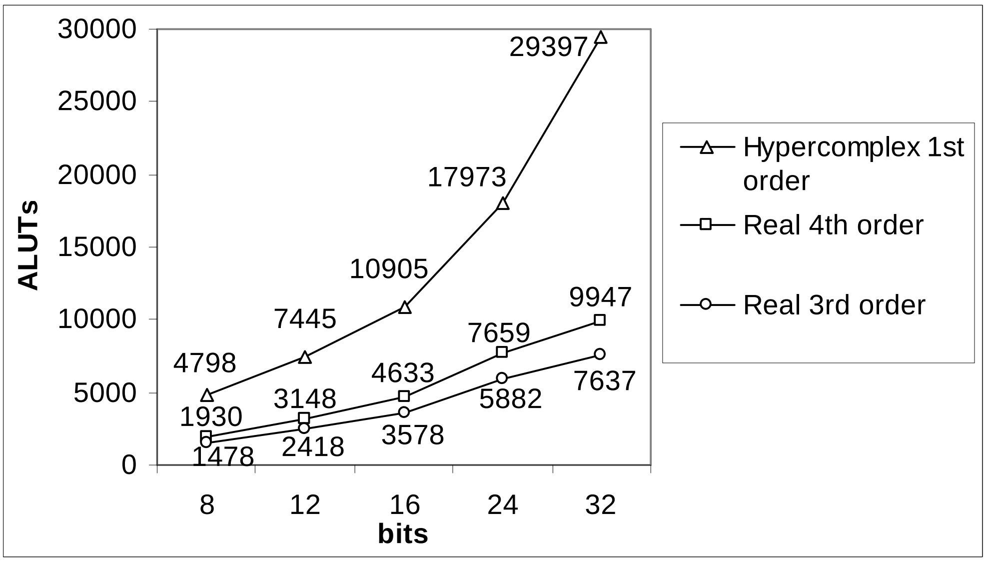

Рис. 3. Кількість блоків логічних пристроїв, що використовуються фільтрами із гіперкомплексними і дійсними коефіцієнтами

Потрібно зауважити, що дані дослідження носять широкий характер. У подальшому їх можна проводити на більшому числі прикладів із застосуванням ГЧС вищих розмірностей.

1. *Toyoshima H.* Design of Hypercomplex All-Pass Filters to Realize Complex Transfer Functions / H. Toyoshima, S. Higuchi // Proc. Second Int. Conf. Information, Communications and Signal Processing. — 1999. — N 2B3.4. — P. 1–5.

2. *Schutte H.D.* Hypercomplex Numbers in Digital Signal Processing / H.D. Schutte, J. Wessel // Proc. Int. Conf. On Circuits and Systems. — New Orleans (Louisiana). — 1990. — P. 1557–1560.

3. *Alfsmann D.* Design of Hypercomplex Allpass-Based Paraunitary Filter Banks applying Reduced Biquaternions / D. Alfsmann, H.G. Gockler // Proc. EUROCON. — Belgrade, Serbia & Montenegro, 2005. — P. 92–95.

4. *Ueda K.* Digital Filtrs with Hypercomplex Coefficients / K. Ueda, S. Takahashi // ISCAP. – 1993. — P. 479–482.

5. *Каліновський Я.О.* Методи комп’ютерного моделювання та обчислень з використанням гіперкомплексних числових систем: дис. … доктора техн. наук: 01.05.02 / Каліновський Яків Олександрович. — К., 2007. — 417 с.

6. *Кантор И. Л.* Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. — М.: Наука, 1973. — 144 с.

7. *Поляков А.К.* Языки VHDL и VERILOG в проектировании цифровой аппаратуры / А.К. Поляков. — М.: Солон-Пресс, 2003. — 320 с.

8. Система автоматизации проектирования Quartus II. — Санкт-Петербург: СПбГПУ — ЭФО, 2003. — 179 с.

Надійшла до редакції 15.07.2008