5. *Hrytsyk V., Hrytsyk V.* Determining validity and amount of received information under information transfer methods using corrective codes. – V Symp. modelowanie i symylacja komputerova w technice. – Lodz, 2005. – P. 99–108.

6. *Woznicki J.* Podstatowe techniki przetwarzania obrazu. – Warszawa: Wydawnictwo komunikacji i Lacznosci, 1996. – P. 261.

Державний науково-дослідний інститут інформаційної інфраструктури НАН України, Львів

Надійшло до редакції 13.03.2008

УДК 519.85

Т. Е. Романова, А. В. Кривуля

Средства математического моделирования задач покрытия

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Г. Стояном)

The article considers theorems which are useful for the mathematical and computer modeling of the covering problems of a compact canonical multiconnected polygonal set with a finite family of convex polygons. Based on peculiarities of a rectangular cover, theorems concerning a partition of the translation vector space and an upper bound of the number of local extrema of the Γ*-function are formulated.*

Основой математического моделирования задач геометрического проектирования (задачи покрытия [1] и упаковки [2]) является аналитическое описание отношений точечных множеств в евклидовых пространствах. С этой целью используется метод Ф-функций [3–5]. Однако при математическом моделировании отношений двумерных φ-объектов [3], по крайней мере один из которых получен в результате пересечения базовых двухсвязных φ-объектов, возникает необходимость построения Ф-функций в виде композиций Ф-функций базовых объектов [4]. Конструктивным средством аналитического описания отношений области покрытия и семейства покрывающих объектов является Γ-функция [6]. Вид Γ-функции зависит от пространственных форм и метрических характеристик покрывающих объектов. В этой связи актуальны исследования такой зависимости для конечного семейства покрывающих прямоугольников, имеющих не обязательно различные метрические характеристики.

Пусть имеется компактное многосвязное каноническое многоугольное множество $\Omega \subset R^2$ и множество $P = \bigcup\limits_{s=1}^{\tau} P_s \subset R^2$, где R^2 — двухмерное арифметическое евклидово пространство; $P_s = \bigcup\limits_{i=1}^{n_s} P_{si}$, $n_s \leqslant n$, P_{si} — выпуклый многоугольник; τ — число компонент связности множества P. Пусть $H = \bigcap\limits_{s=1}^{\tau} H_s$, $H_s = R^2 \setminus \operatorname{int} P_s$, $\operatorname{int} P_s$ — внутренность P_s. При этом $H_s = \bigcup\limits_{j=1}^{\lambda_s} C_{sj}$, где C_{sj} — выпуклое, многоугольное, канонически замкнутое, в общем случае неограниченное множество.

В дальнейшем, множество $T \subset R^2$, транслированное на вектор $w \in R^2$, обозначим $T(w)$.

Теорема 1. *Пусть* $H(w) = R^2 \setminus \operatorname{int} P(w)$ *и* $\Phi_{sj}(w + w_{sj}, v)$ *— Φ-функция множеств* $C_{sj}(w + w_{sj})$ *и* $\Omega(v)$, $w_{sj} = \mathrm{const}$, $v \in R^2$, $j = 1, 2, \ldots, \lambda$, $s = 1, 2, \ldots, \tau$, *тогда функция*

$$\Phi(w, v) = \max_{s=1,\ldots,\tau} \min_{j=1,\ldots,\lambda} \Phi_{sj}(w + w_{sj}, v) \tag{1}$$

является Φ-функцией множеств $H(w)$ *и* $\Omega(v)$.

Пусть имеется семейство $\Lambda = \{P_i(u_i), i \in I_n = \{1, 2, \ldots, n\}\}$ выпуклых многоугольников $P_i(u_i)$, $i \in I_n$.

Как известно [6], семейство Λ при $u_i = \mathrm{const}$, $i \in I_n$, является покрытием области $\Omega(v)$, если любая точка $z \in \Omega(v)$ принадлежит хотя бы одному из $P_i(u_i)$, $i \in I_n$, т. е. выполняется условие

$$\Omega(v) \subseteq P(w) \qquad \text{или} \qquad \Omega(v) \bigcap \operatorname{int} H(w) = \varnothing. \tag{2}$$

Теорема 2. *Если* $\Phi(w, v)$ *— Φ-функция множеств* $H(w)$ *и* $\Omega(v)$ *вида* (1), *то*

$$\Phi(w, v) \geqslant 0 \tag{3}$$

является критерием покрытия (2) *множества* $\Omega(v)$ *семейством* Λ.

Замечание. Соотношение (3) можно рассматривать также в качестве условия трансляционного включения (2) при $w = \mathrm{const}$ или условия взаимного непересечения множеств $H(w)$ и $\Omega(v)$ в задачах упаковки.

Теорема 3. *Пусть* $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{K} \Omega_k$, $\Omega_k = \mathrm{conv}\{\omega_{kj} = (\widetilde{x}_{kj}, \widetilde{y}_{kj}), j \in I_{m_k}\}$, *а* Λ *— семейство прямоугольников* $P_i(u_i) = \{(x, y) \in R^2, -a_i \leqslant x - x_i \leqslant a_i, -b_i \leqslant y - y_i \leqslant b_i\}$, $u_i = \mathrm{const}$, $i \in I_n$, *и выполняются условия теоремы* (1). *Тогда справедлива оценка сложности вычисления Φ-функции* (1) *для множеств* $H(w)$ *и* $\Omega(v)$

$$\nu = \max_{l=1,\ldots,4} \xi_l,$$

где

$$\xi_1 = 4Kn, \qquad \xi_2 = \sum_{k=1}^{K} (nm_k + 8n - m_k - 4), \qquad \xi_3 = \sum_{k=1}^{K} (2nm_k + 12n - 3m_k - 14),$$

$$\xi_4 = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \left(\frac{1}{4} n^2 m_k + nm_k + n^2 + 8n - 2m_k - 12 \right), & \text{если} \quad n = 2t, \quad t \in \mathbb{N}, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \left(\frac{1}{4} n^2 m_k + nm_k + n^2 + 8n - \frac{13}{4} m_k - 19 \right), & \text{если} \quad n = 2t + 1, \quad t \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Теорема 4. *Пусть имеется* $P_i(u_i) = \{(x, y) \in R^2, -a_i \leqslant x - x_i \leqslant a_i, -b_i \leqslant y - y_i \leqslant b_i\}$ *и* $P_j(u_j) = \{(x, y) \in R^2, -a_j \leqslant x - x_j \leqslant a_j, -b_j \leqslant y - y_j \leqslant b_j\}$, $u_{ij} = (u_i, u_j) \in R^4$, $i \neq j$. *Тогда разбиение пространства* R^4 *имеет вид*

1) $R^4 = \bigcup\limits_{q=1, q\neq 2}^{11} R_{ij}^q$ *или* $R^4 = \bigcup\limits_{q=1}^{10} R_{ij}^q$, *если* $a_i \neq a_j$ *и* $b_i \neq b_j$, *где*

$$R_{ij}^1 = \{u_{ij} \in R^4 \colon \Phi_{ij}(u_{ij}) > 0\},$$

$$R_{ij}^2 = \{u_{ij} \in R^4\colon f_t(u_{ij}) > 0,\ a_i > a_j,\ b_i < b_j,\ t = 1, \ldots, 4\},$$
$$R_{ij}^3 = \{u_{ij} \in R^4\colon f_t(u_{ij}) > 0,\ t = 3, 4,\ f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 2, 9\},$$
$$R_{ij}^4 = \{u_{ij} \in R^4\colon f_t(u_{ij}) > 0,\ t = 1, 2,\ f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 8, 11\},$$
$$R_{ij}^5 = \{u_{ij} \in R^4\colon f_t(u_{ij}) > 0,\ t = 3, 4,\ f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 5, 10\},$$
$$R_{ij}^6 = \{u_{ij} \in R^4\colon f_t(u_{ij}) > 0,\ t = 1, 2,\ f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 7, 12\},$$
$$R_{ij}^7 = \{u_{ij} \in R^4\colon f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 6, 8, 9, 11\},$$
$$R_{ij}^8 = \{u_{ij} \in R^4\colon f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 6, 7, 9, 12\},$$
$$R_{ij}^9 = \{u_{ij} \in R^4\colon f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 5, 7, 10, 12\},$$
$$R_{ij}^{10} = \{u_{ij} \in R^4\colon f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 5, 8, 10, 11\},$$
$$R_{ij}^{11} = \{u_{ij} \in R^4\colon f_t(u_{ij}) > 0,\ a_i < a_j,\ b_i < b_j,\ t = 1, \ldots, 4\},$$
$$R_{ij}^q = \operatorname{int} R_{ij}^q, \qquad q = 1, 2(11), \qquad R_{ij}^q = \operatorname{cl} R_{ij}^q, \qquad q = 7, 8, 9, 10,$$
$$R_{ij}^q \neq \operatorname{int} R_{ij}^q, \qquad R_{ij}^q \neq \operatorname{cl} R_{ij}^q, \qquad q = 3, 4, 5, 6, \qquad \textit{в пространстве } R^4;$$

2) $R^4 = \bigcup\limits_{q=1,3,5,7,8,9,10} R_{ij}^q$, *если* $a_i = a_j$ *и* $b_i \neq b_j$, *где*

$$R_{ij}^1 = \{u_{ij} \in R^4\colon \Phi_{ij}(u_{ij}) > 0\},$$
$$R_{ij}^3 = \{u_{ij} \in R^4\colon f_t(u_{ij}) > 0,\ t = 3, 4,\ f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 2, 9\},$$
$$R_{ij}^5 = \{u_{ij} \in R^4\colon f_t(u_{ij}) > 0,\ t = 3, 4,\ f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 5, 10\},$$
$$R_{ij}^7 = \{u_{ij} \in R^4\colon f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 6, 8, 9, 11\},$$
$$R_{ij}^8 = \{u_{ij} \in R^4\colon f_t(u_{ij}) > 0,\ t = 9,\ f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 6, 7, 12\},$$
$$R_{ij}^9 = \{u_{ij} \in R^4\colon f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 5, 7, 10, 12\},$$
$$R_{ij}^{10} = \{u_{ij} \in R^4\colon f_t(u_{ij}) > 0,\ t = 10,\ f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 5, 8, 11\},$$
$$R_{ij}^1 = \operatorname{int} R_{ij}^1, \qquad R_{ij}^q = \operatorname{cl} R_{ij}^q, \qquad q = 7, 9,$$
$$R_{ij}^q \neq \operatorname{int} R_{ij}^q, \qquad R_{ij}^q \neq \operatorname{cl} R_{ij}^q, \qquad q = 3, 5, 8, 10, \qquad \textit{в пространстве } R^4;$$

3) $R^4 = \bigcup\limits_{q=1,4,6,7,8,9,10} R_{ij}^q$, *если* $a_i \neq a_j$ *и* $b_i = b_j$, *где*

$$R_{ij}^1 = \{u_{ij} \in R^4\colon \Phi_{ij}(u_{ij}) > 0\},$$
$$R_{ij}^4 = \{u_{ij} \in R^4\colon f_t(u_{ij}) > 0,\ t = 1, 2,\ f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 8, 11\},$$
$$R_{ij}^6 = \{u_{ij} \in R^4\colon f_t(u_{ij}) > 0,\ t = 1, 2,\ f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 7, 12\},$$
$$R_{ij}^7 = \{u_{ij} \in R^4\colon f_t(u_{ij}) > 0,\ t = 11,\ f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 6, 8, 9\},$$

$R_{ij}^{8} = \{u_{ij} \in R^4 \colon f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 6, 7, 9, 12\}$,

$R_{ij}^{9} = \{u_{ij} \in R^4 \colon f_t(u_{ij}) > 0,\ t = 12,\ f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 5, 7, 10\}$,

$R_{ij}^{10} = \{u_{ij} \in R^4 \colon f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 5, 8, 10, 11\}$,

$R_{ij}^{1} = \operatorname{int} R_{ij}^{1}, \qquad R_{ij}^{q} = \operatorname{cl} R_{ij}^{q}, \qquad q = 8, 10,$

$R_{ij}^{q} \neq \operatorname{int} R_{ij}^{q}, \qquad R_{ij}^{q} \neq \operatorname{cl} R_{ij}^{q}, \qquad q = 4, 6, 7, 9,$ *в пространстве* R^4;

4) $R^4 = \bigcup\limits_{q=1,7,8,9,10} R_{ij}^{q}$, *если* $a_i = a_j$ *и* $b_i = b_j$, *где*

$R_{ij}^{1} = \{u_{ij} \in R^4 \colon \Phi_{ij}(u_{ij}) > 0\}$,

$R_{ij}^{7} = \{u_{ij} \in R^4 \colon f_t(u_{ij}) > 0,\ t = 11,\ f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 6, 8, 9\}$,

$R_{ij}^{8} = \{u_{ij} \in R^4 \colon f_t(u_{ij}) > 0,\ t = 9,\ f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 6, 7, 12\}$,

$R_{ij}^{9} = \{u_{ij} \in R^4 \colon f_t(u_{ij}) > 0,\ t = 12,\ f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 5, 7, 10\}$,

$R_{ij}^{10} = \{u_{ij} \in R^4 \colon f_t(u_{ij}) > 0,\ t = 10,\ f_t(u_{ij}) \geqslant 0,\ t = 5, 8, 11\}$,

$R_{ij}^{1} = \operatorname{int} R_{ij}^{1}$,

$R_{ij}^{q} \neq \operatorname{int} R_{ij}^{q}, \qquad R_{ij}^{q} \neq \operatorname{cl} R_{ij}^{q}, \qquad q = 7, 8, 9, 10,$ *в пространстве* R^4,

где в 1–4:

$\Phi_{ij}(u_{ij})$ — Φ-*функция* $P_i(u_i)$ *и* $P_j(u_j)$ [4],

$f_1(u_{ij}) = -\Delta x_{ij} + \alpha_{ij}^2, f_2(u_{ij}) = \Delta x_{ij} + \alpha_{ij}^2, f_3(u_{ij}) = -\Delta y_{ij} + \beta_{ij}^2,$

$f_4(u_{ij}) = \Delta y_{ij} + \beta_{ij}^2, f_5(u_{ij}) = -\Delta x_{ij} + \alpha_{ij}^1, f_6(u_{ij}) = \Delta x_{ij} + \alpha_{ij}^1,$

$f_7(u_{ij}) = -\Delta y_{ij} + \beta_{ij}^1, f_8(u_{ij}) = \Delta y_{ij} + \beta_{ij}^1, f_9(u_{ij}) = -\Delta x_{ij} - \alpha_{ij}^2,$

$f_{10}(u_{ij}) = \Delta x_{ij} - \alpha_{ij}^2, f_{11}(u_{ij}) = -\Delta y_{ij} - \beta_{ij}^2, f_{12}(u_{ij}) = \Delta y_{ij} - \beta_{ij}^2,$

$\Delta x_{ij} = x_j - x_i, \qquad \Delta y_{ij} = y_j - y_i,$

$a_i + a_j = \alpha_{ij}^1, \qquad |a_i - a_j| = \alpha_{ij}^2, \qquad b_i + b_j = \beta_{ij}^1, \qquad |b_i - b_j| = \beta_{ij}^2.$

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы 4, тогда для семейства прямоугольников* $\Lambda(u)$, $u = (u_1, \ldots, u_n) \in R^{2n}$, *разбиение пространства* R^{2n} *имеет вид*

$$R^{2n} = \bigcup_{q=1}^{\eta} R_q^{2n}, \qquad R_q^{2n} = \bigcap_{i>j=1}^{n} R_{ij}^{q}, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} &\eta = 10^{\sigma_1} \cdot 7^{\sigma_2} \cdot 5^{\sigma_3}, \qquad \sigma = \sum_{l=1}^{3} \sigma_l, \\ &\sigma_l \in \left\{0, 1, 2, \ldots, \frac{1}{2} n(n-1)\right\}, \qquad l = 1, 2, 3, \qquad \sigma = \frac{1}{2} n(n-1), \end{aligned} \tag{5}$$

при этом

$$\eta = 10^\sigma, \quad \text{если} \quad R^4 = \bigcup_{q=1, q\neq 2}^{11} R_{ij}^q \quad \text{или} \quad R^4 = \bigcup_{q=1}^{10} R_{ij}^q, \quad \forall i, j \in I_n, \qquad i \neq j,$$

$$\eta = 7^\sigma, \quad \text{если} \quad R^4 = \bigcup_{q=1,3,5,7,8,9,10} R_{ij}^q \quad \text{или} \quad R^4 = \bigcup_{q=1,4,6,7,8,9,10} R_{ij}^q, \quad \forall i, j \in I_n, \quad i \neq j,$$

$$\eta = 5^\sigma, \quad \text{если} \quad R^4 = \bigcup_{q=1,7,8,9,10} R_{ij}^q, \quad \forall i, j \in I_n, \quad i \neq j.$$

Теорема 6. *Пусть выполняются условия теорем 3–5 и* Γ-*функция [6] для семейства прямоугольников* $\Lambda(u)$, $u = (u_1, \ldots, u_n) \in R^{2n}$, *и* Ω *имеет вид*

$$\Gamma(u) = \begin{cases} \Gamma_1(u), & \text{если} \quad u \in R_1^{2n}, \\ \ldots \\ \Gamma_q(u), & \text{если} \quad u \in R_q^{2n}, \\ \ldots \\ \Gamma_\eta(u), & \text{если} \quad u \in R_\eta^{2n}, \end{cases} \tag{6}$$

где $\Gamma_q(u) = F_q(u, v)|_{v=0}$, $F_q(u, v)|_{u=\text{const}} = \Phi(0, v)$ *—* Φ-*функция* $H(0)$ *и* $\Omega(v)$ *вида* (1). *Тогда справедлива оценка числа локальных максимумов* Γ-*функции* (6)

$$\eta^* \leqslant \mu\eta,$$

где η *определяется соотношением* (5),

$$\mu = \prod_{k=1}^{K} ((0{,}5m_k + 3)^{4(n-3)} (m_k + 4)^{0{,}25(n-2)^2} \max\{108(m_k + 1)^3, (0{,}25m_k + 2)^8\}).$$

Приведенные результаты могут быть использованы при построении математических моделей двумерных задач покрытия и упаковки в виде задач математического программирования, что позволяет применить для решения NP-сложных задач этого класса современные методы локальной и глобальной оптимизации.

1. *Daniels K., Inkulu R.* An incremental algorithm for translational polygon covering // University of Massachusetts at Lowell Computer Science Technical Report. – 2001. – No 1. – P. 1–31.
2. *Burke E., Heller R., Kendall G., Whitwell G.* A new bottom-left-fill heuristic algorithm for the two-dimensional irregular packing problem // Operations research. – 2006. – **54**, No 3. – P. 587–601.
3. *Stoyan Yu. G.* Φ-function and its basic properties // Доп. НАН України. – 2001. – No 8. – С. 112–117.
4. *Stoyan Y., Terno J., Scheithauer G. et al.* Φ-function for 2D primary objects // Studia Informatica. – 2002. – **2**, No 1. – P. 1–32.
5. *Stoyan Y., Scheithauer G., Gil M., Romanova T.* Φ-function for complex 2D objects // 4OR Quarterly J. of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. – 2004. – **2**, No 1. – P. 69–84.
6. *Stoyan Y.* Covering a polygonal region by a collection of various size rectangles // Пробл. машиностроения. – 2007. – **10**, No 2. – С. 67–82.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 19.03.2008