4. *Opial Z.* Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations // Ibid. – 1967. – **3**. – P. 571–579.
5. *Левин А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ // Докл. АН СССР. – 1967. – **176**, № 4. – С. 774–777.
6. *Левин А. Ю.* Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I // Вестн. Ярослав. ун-та. – 1973. – Вып. 5. – С. 105–132.
7. *Нгуен Тхе Хоан.* О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, № 6. – С. 970–975.
8. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.

Институт математики НАН Украины, Киев
Поступило в редакцию 07.04.2008

УДК 515.12

Т. М. Радул

Опуклості, породжені монадами

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. В. Шарком)

Let $\mathbb{F}$ be a monad in the category $\mathcal{C}omp$. We build a convexity in general sense for each $\mathbb{F}$-algebra (see [1]), investigate properties of such convexities, and apply them to prove that the multiplication map of the monad of order-preserving functionals is soft.

Поняття опуклості, що розглядається в цьому повідомленні, є значно загальнішим, ніж класичне поняття опуклості, обмежене контекстом лінійного простору. Загальні опуклості виникають при дослідженні розмаїтих структур: частково впорядкованих множин, напівграток, граток, суперрозширень тощо. Наш підхід базується на понятті топологічної опуклості з [1], де викладена загальна теорія опуклості, починаючи з аксіом і закінчуючи застосуваннями в різних галузях математики.

Головна мета роботи полягає в описанні категорного зв'язку між тополого-алгебраїчними структурами і теорією опуклості. Багато топологічних конструкцій є функторіальними: вони означені не тільки для просторів, а й для відображень. Алгебраїчний аспект теорії функторів у категоріях топологічних просторів та неперервних відображень базується в основному на понятті монади (чи трійки) у сенсі С. Ейленберга та Д. Мура [2]. Багато класичних конструкцій приводять до монад: гіперпростори, простори ймовірнісних мір, суперрозширення та ін. Багато досліджень присв'ячені монадам у категоріях топологічних просторів та неперервних відображень (див., напр., [3] або [4]). Для деяких з них вводились опуклості. Звичайна лінійна опуклість відповідає монаді ймовірнісних мір [5]. Певна нелінійна опуклість була означена для суперрозширення [6]. У цій роботі ми вводимо структуру опуклості для кожної $\mathbb{F}$-алгебри довільної монади $\mathbb{F}$ у категорії компактних гаусдорфових просторів та неперервних відображень (п. 1), введені опуклості зберігаються морфізмами F-алгебр; досліджуємо властивості опуклостей для деяких спеціальних класів монад (пп. 2, 3); застосовуємо наші результати для дослідження топології монади функціоналів, що зберігають порядок (п. 4).

1. Опуклості на алгебрах монад. Через $\mathcal{C}omp$ ми позначаємо категорію компактних гаусдорфових просторів (компактів) та неперервних відображень. Нехай $X \in \mathcal{C}omp$. Через CX позначаємо банахів простір неперервних функцій $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ із звичайною sup-нормою: $\|\phi\| = \sup\{|\phi(x)| \mid x \in X\}$. Надалі всі простори і відображення вважаємо елементами $\mathcal{C}omp$, за винятком $\mathbb{R}$ і функцій з CX, де X — компакт.

Нехай X — компакт. Сім'я $\mathcal{C}$ замкнених підмножин X називається опуклістю на X, якщо $\mathcal{C}$ є замкненою відносно перетинів і містить X та порожню множину. Елементи $\mathcal{C}$ називаються $\mathcal{C}$-опуклими. Зауважимо, що ми розглядаємо в нашому означенні тільки замкнені опуклі множини. Усю сім'ю опуклих множин у сенсі [1] можна отримати, застосовуючи операцію об'єднання напрямлених угору підсімей. Кажемо, що опуклість $\mathcal{C}$ породжує топологію X, якщо $\mathcal{C}$ є замкненою передбазою X. Опуклість $\mathcal{C}$ на X називають T_2, якщо для кожних x_1, $x_2 \in X$ існують T_1, $T_2 \in \mathcal{C}$ такі, що $T_1 \cup T_2 = X$, $x_1 \notin T_2$ і $x_2 \notin T_1$. Нехай $(X, \mathcal{C})$, $(Y, \mathcal{D})$ — два компакти із заданими опуклостями. Неперервне відображення називається $f\colon X \to Y$ CP-відображенням, якщо $f^{-1}(D) \in \mathcal{C}$ для кожного $D \in \mathcal{D}$.

Нагадаємо деякі категорні поняття. Ми означаємо їх тільки для категорії $\mathcal{C}omp$. Функтор $F\colon \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$ називається мономорфним, якщо він зберігає мономорфізми. Для мономорфного функтора F і вкладення $i\colon A \to X$ ми утотожнюємо простір $F(A)$ і підпростір $F(i)(F(A)) \subset F(X)$. Мономорфний функтор F зберігає перетини, якщо $F(\bigcap\{X_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}) = \bigcap\{F(X_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ для кожної сім'ї $\{X_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ замкнених підмножин X. Надалі розглядаємо мономорфні функтори, що зберігають перетини і одноточкові простори.

Також ми потребуватимемо означень, що стосуються монад і їх алгебр (детальніше див. [8]). Монада $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ у категорії $\mathcal{C}omp$ складається з функтора $T\colon \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$ і натуральних перетворень $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}omp} \to T$, $\mu\colon T^2 \to T$, що задовольняють рівності $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta T = \mathbf{1}_T$ і $\mu \circ \mu T = \mu \circ T\mu$. ($\mathrm{Id}_{\mathcal{C}omp}$ позначає тотожний функтор у категорії $\mathcal{C}omp$ і T^2 є суперпозицією $T \circ T$ функтора T.)

Нехай $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ — монада в категорії $\mathcal{C}omp$. Пара (X, ξ), де $\xi\colon TX \to X$ — неперервне відображення, називається $\mathbb{T}$-алгеброю, якщо $\xi \circ \eta X = id_X$ і $\xi \circ \mu X = \xi \circ T\xi$. Нехай (X, ξ), (Y, ξ') — дві $\mathbb{T}$-алгебри. Відображення $f\colon X \to Y$ називається морфізмом $\mathbb{T}$-алгебр, якщо $\xi' \circ Tf = f \circ \xi$.

Природне перетворення $\psi\colon T \to T'$ називається морфізмом монад $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$, $\mathbb{T}' = (T', \eta', \mu')$, якщо $\psi \circ \eta = \eta'$ і $\psi \circ \mu = \mu' \circ \eta T' \circ T\psi$. Якщо всі компоненти ψ є мономорфізмами, то монада $\mathbb{T}$ називається підмонадою $\mathbb{T}'$ і ψ називається вкладенням монад.

Нехай (X, ξ) є $\mathbb{F}$-алгеброю монади $\mathbb{F} = (F, \eta, \mu)$ і A є замкненою підмножиною X. Позначимо через f_A факторвідображення $f_A\colon X \to X/A$ і покладемо $a = f_A(A)$. Означимо $\mathbb{F}$-опуклу оболонку $C_{\mathbb{F}}(A)$ множини A таким чином: $C_{\mathbb{F}}(A) = \xi((Ff_A)^{-1}(\eta(X/A)(a)))$. Додатково покладемо $C_{\mathbb{F}}(\varnothing) = \varnothing$. Означимо сім'ю $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(X, \xi) = \{A \subset X \mid A$ є замкненою і $C_{\mathbb{F}}(A) = A\}$. Елементи сім'ї $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(X, \xi)$ називаємо $\mathbb{F}$-опуклими.

Твердження 1. *Сім'я $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(X, \xi)$ є опуклістю на X.*

Зауважимо, що одноточкові множини завжди є опуклими.

Теорема 1. *Нехай $h\colon (X, \xi) \to (X', \xi')$ є морфізмом $\mathbb{F}$-алгебр. Тоді h є CP-відображенням.*

2. Опуклості L-монад. Невідомо, чи означені нами опуклості породжують топологію, чи вони є T_2. Розглянемо клас монад, що породжують опуклості з цими властивостями.

Означення 1. Монада $\mathbb{F} = (F, \eta, \mu)$ називається L-монадою, якщо для кожних t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$ таких, що $t_1 \leqslant t_2$, існує відображення $\xi_{[t_1,t_2]}\colon F[t_1, t_2] \to [t_1, t_2]$ таке, що пара $([t_1, t_2], \xi_{[t_1,t_2]})$ є $\mathbb{F}$-алгеброю; для кожних t_1, t_2, t_3, $t_4 \in \mathbb{R}$ таких, що $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4$, природне вкладення

$j\colon [t_2, t_3] \to [t_1, t_4]$ є морфізмом F-алгебр і для кожного $X \in \mathcal{C}omp$ існує сім'я морфізмів F-алгебр $\{f_\alpha\colon (FX, \mu X) \to ([t_1(\alpha), t_2(\alpha)], \xi_{[t_1(\alpha), t_2(\alpha)]}) \mid \alpha \in A\}$, що відокремлює точки.

Наше означення є невеликою модифікацією означення монади Лоусона з [7] і було дане в [9] під іншим іменем. Клас L-монад містить більшість відомих монад в $\mathcal{C}omp$, зокрема суперрозширення, гіпепростір, імовірнісні міри та ін.

Нехай $\phi \in CX$. Через $\max\phi$ ($\min\phi$) позначимо $\max\limits_{x\in X}\phi(x)$ ($\min\limits_{x\in X}\phi(x)$), а π_ϕ або $\pi(\phi)$ буде позначати природну проекцію $\pi_\phi\colon \prod\limits_{\psi\in CX}[\min\psi, \max\psi] \to [\min\phi, \max\phi]$. У [9] показано, що для кожної L-монади $\mathbb{F} = (F, \eta, \mu)$ ми можемо розглядати FX як підмножину добутку $\prod\limits_{\phi\in CX}[\min\phi, \max\phi]$, більше того, виконуються такі рівності: $\pi_\phi \circ \eta X = \phi$, $\pi_\phi \circ \mu X = \pi(\pi_\phi)$ для кожної $\phi \in C(X)$ і $\pi_\psi \circ Ff = \pi_{\psi\circ f}$ для кожної $\psi \in C(Y)$, $f\colon X \to Y$.

Використовуючи схему доведення леми 4 з [10], легко перевірити, що $\nu \in FA \subset FX$ тоді й лише тоді, коли $\pi_{\phi_1}(\nu) = \pi_{\phi_2}(\nu)$ для кожної ϕ_1, $\phi_2 \in CX$ такої, що $\phi_1|A = \phi_2|A$.

Нагадаємо, що функтор F зберігає прообрази, якщо для кожного відображення $f\colon X \to Y$ і замкненої підмножини $A \subset Y$ справджується рівність $(F(f))^{-1}(F(A)) = F(f^{-1}(A))$. Кажемо, що монада $\mathbb{F} = (F, \eta, \mu)$ зберігає прообрази, якщо її функторіальна частина F зберігає прообрази. Отже, L-монада $\mathbb{F} = (F, \eta, \mu)$ зберігає прообрази тоді й лише тоді, коли для кожного відображення $f\colon X \to Y$ і замкненої підмножини $A \subset Y$ справджується $\pi_{\phi_1}(\nu) = \pi_{\phi_2}(\nu)$ для кожних $\nu \in (Ff)^{-1}(A)$ і ϕ_1, $\phi_2 \in CX$ таких, що $\phi_1|f^{-1}(A) = \phi_2|f^{-1}(A)$.

Багато важливих монад не зберігають прообрази. Тому ми розглянемо слабшу умову.

Означення 2. L-монада $\mathbb{F} = (F, \eta, \mu)$ слабо зберігає прообрази, якщо для кожного відображення $f\colon X \to Y$ і замкненої підмножини $A \subset Y$ справджується $\pi_\phi(\nu) \in [\min\phi(f^{-1}(A)), \max\phi(f^{-1}(A))]$ для кожних $\nu \in (Ff)^{-1}(A)$ і $\phi \in CX$.

Легко бачити, що якщо L-монада зберігає прообрази, то вона слабо зберігає прообрази.

Теорема 2. *Нехай $\mathbb{F}$ — L-монада, що слабо зберігає прообрази. Тоді для кожного компакта X опуклість $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(FX, \mu X)$ є T_2 і породжує топологію.*

3. Бінарні монади. Розглянемо опуклості з властивістю бінарності. Нехай $\mathcal{S}$ — деяка сім'я підмножин компакта X. Кажемо, що $\mathcal{S}$ є зчепленою, якщо перетин кожних її двох елементів є непорожнім. $\mathcal{S}$ називається бінарною, якщо перетин кожної її зчепленої підсистеми є непорожнім. Ми називаємо монаду $\mathbb{F}$ бінарною, якщо сім'я $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(X, \xi)$ є бінарною для кожної $\mathbb{F}$-алгебри (X, ξ).

Нагадаємо деякі означення та факти з теорії неметризовних компактів. Детальнішу інформацію можна знайти в [11]. Компакт X називається відкрито-породженим, якщо X можна зобразити у вигляді границі ω-спектра з відкритими граничними відображеннями. Відображення $f\colon X \to Y$ називається (0-)м'яким, якщо для будь якого (0-вимірного) компакта Z, замкненої підмножини A в Z і відображень $\Phi\colon A \to X$, $\Psi\colon Z \to Y$ таких, що $\Psi|A = f \circ \Phi$, існує відображення $G\colon Z \to X$ таке, що $G|A = \Phi$ і $\Psi = f \circ G$.

Теорема 3. *Нехай $\mathbb{F}$ — бінарна L-монада, що слабо зберігає прообрази, і X — компакт такий, що FX є відкрито-породженим (зв'язним) компактом. Тоді кожне відображення $f\colon FX \to Y$ з $\mathbb{F}$-опуклими шарами є 0-м'яким(м'яким), якщо f відкрите.*

4. Монада функціоналів, що зберігають порядок. Застосуємо одержані результати до дослідження топологічних властивостей монади функціоналів, що зберігають порядок $\mathbb{O}$.

Для кожного $c \in \mathbb{R}$ через c_X ми позначаємо постійну функцію, означену таким чином: $c_X(x) = c$ для кожного $x \in X$. Ми розглядаємо CX з природним частковим порядком, визначеним таким чином: для кожних ϕ, $\psi \in CX$ справджується $\phi \leqslant \psi$, якщо $\phi(x) \leqslant \psi(x)$ для кожного $x \in X$.

Функціонал $\nu\colon CX \to \mathbb{R}$ називається:

слабо адитивним, якщо для кожного $c \in \mathbb{R}$ і $\phi \in CX$ справджується $\nu(\phi + c_X) = \nu(\phi) + c$ і $\nu(1_X) = 1$;

зберігаючим порядок, якщо для кожних ϕ, $\psi \in CX$ таких, що $\phi \leqslant \psi$ справджується $\nu(\phi) \leqslant \nu(\psi)$.

У [10] показано, що кожен слабо адитивний функціонал, що зберігає порядок, є неперервним. Для компакта X через OX ми позначаємо множину всіх слабо адитивних функціоналів, що зберігають порядок. Розглядаємо OX як підпростір в $\prod\limits_{\phi \in CX} [\min \phi, \max \phi]$. Для кожного відображення $f\colon X \to Y$ означимо відображення $Of\colon OX \to OY$ таким чином: $\pi_\psi \circ Of = \pi_{\psi \circ f}$ для кожної $\psi \in C(Y)$. Також ми означаємо природні перетворення $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}omp} \to O$ і $\mu\colon O^2 \to O$ за допомогою таких умов: $\pi_\phi \circ \eta X = \phi$, $\pi_\phi \circ \mu X = \pi(\pi_\phi)$ для кожної $\phi \in C(X)$. Відомо, що $\mathbb{O} = (O, \eta, \mu)$ є L-монадою в $\mathcal{C}omp$ [10].

Теорема 4. *Монада $\mathbb{O}$ слабо зберігає прообрази.*

Зауважимо, що монада $\mathbb{O}$ не зберігає прообрази [10].

Теорема 5. *Відображення μX відкрите для кожного компакта X.*

Теорема 6. *Відображення μX м'яке тоді й лише тоді, коли X відкрито-породжений компакт.*

1. *van de Vel M.* Theory of convex structures. – Amsterdam: North-Holland, 1993. – 540 p.
2. *Eilenberg S., Moore J.* Adjoint functors and triples // Ill. J. Math. – 1965. – **9**. – P. 381–389.
3. *Заричный М. М., Радул Т. Н.* Монады в категории компактов // Успехи мат. наук. – 1995. – **50**. – С. 83–108.
4. *Teleiko A., Zarichnyi M.* Categorical topology of compact Hausdorff spaces. – Lviv: VNTL Publishers, 1999. – 263 p.
5. *Swirszcz T.* Monadic functors and convexity // Bull. Pol. Acad. Sci. – 1970. – **22**. – P. 39–42.
6. *de Groot J.* Supercompactness and superextension // Contributions to extension theory of topological structures. – Berlin: Deutsche Verlag der Wissenschaften, 1967. – P. 89–90.
7. *Radul T.* On functional representations of Lawson monads // Applied Categorical Structures. – 2001. – **9**. – P. 457–463.
8. *MacLane S.* Categories for working mathematicians. – Berlin: Springer, 1976. – 262 p.
9. *Radul T.* On strongly Lawson and I-Lawson monads // Bol. Mat. – 1999. – **6**. – P. 69–76.
10. *Radul T.* On the functor of order-preserving functionals // Comment. math. Univ. carol. – 1998. – **39**. – P. 609–615.
11. *Щепин Е. В.* Функторы и бесконечные степени компактов // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**. – С. 3–62.

Львівський національний університет
ім. Івана Франка

Надійшло до редакції 20.12.2007