УДК 512.544

О. Ю. Дашкова

Об одном классе бесконечномерных линейных групп конечной линейной ширины

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

The definition of the linear width of a linear group is introduced. This definition is an analogy of the BFC-number of a group. The infinite locally finite infinite dimensional linear groups of finite linear width are investigated. It is proved that these groups contain an Abelian subgroup of finite index that has finite central (fundamental) dimension.

Группа всех автоморфизмов $GL(F, A)$ векторного пространства A над полем F является старейшим объектом исследования алгебры и называется полной линейной группой. Подгруппы группы $GL(F, A)$ называются линейными группами. Пусть $H \leqslant GL(F, A)$. Если размерность $\dim_F A$ векторного пространства A над полем F конечна, группа H называется конечномерной линейной группой. Группу $GL(F, A)$ в этом случае можно отождествить с группой невырожденных квадратных матриц размерности $n \times n$, где $n = \dim_F A$. Конечномерные линейные группы нашли широкое применение в различных областях математики.

В настоящей работе исследуются подгруппы группы $GL(F, A)$ в случае, когда $\dim_F A$ бесконечна. Эти группы изучались мало. Следует отметить, что исследования таких групп требуют дополнительных ограничений на рассматриваемые группы. Хорошо известным примером применения условий конечности для изучения бесконечномерных линейных групп является теория финитарных линейных групп [1, 2]. Финитарные линейные группы являются линейным аналогом групп с конечными классами сопряженных элементов. Достаточно полный обзор результатов о группах с конечными классами сопряженных элементов дан в книге Ю. М. Горчакова [3]. Б. Нейманом изучались группы, у которых все классы сопряженных элементов конечны и их порядок ограничен фиксированным числом n [4]. В [4] было доказано, что такие группы имеют конечный коммутант. В [5–12] установлены оценки порядка коммутанта группы, у которой все классы сопряженных элементов конечны и их порядок ограничен фиксированным числом n. Эта оценка является функцией числа n. В [9] было введено понятие ширины b конечной p-группы G. Число b называется шириной конечной p-группы G, если p^b является максимумом порядков классов сопряженности группы G.

Нами рассматривается некоторый аналог данной задачи для бесконечномерных линейных групп. Если H — подгруппа группы $GL(F, A)$, H реально действует на факторпространстве $A/C_A(H)$ естественным образом. Если $\dim_F(A/C_A(H))$ конечна, будем говорить, что H имеет конечную центральную размерность. В противном случае будем говорить, что H имеет бесконечную центральную размерность. В [13] также было дано понятие фундаментальной размерности подгруппы $H \leqslant GL(F, A)$. Рассмотрим подпространство $[H, A]$ пространства A, которое порождается следующими элементами:

$$[H, A] = \langle v(g - 1), g \in H, v \in A \rangle.$$

Фундаментальной размерностью группы H называется размерность подпространства $[H, A]$.

Введем следующее определение.

Определение. Будем говорить, что линейная группа G имеет конечную линейную ширину n, если n является наименьшим числом с тем свойством, что для любого элемента $v \in A$ порядок G-орбиты элемента v не превосходит n. В случае, когда числа n с заданным свойством не существует, линейная ширина группы G считается бесконечной.

В работе изучаются бесконечные локально конечные бесконечномерные линейные группы конечной линейной ширины. В частности, исследуется вопрос о существовании в бесконечной локально конечной бесконечномерной линейной группе G конечной линейной ширины подгруппы H конечного индекса, для которой размерность подпространства $[H, A]$ конечна.

Теорема. *Пусть $G \leqslant GL(F, A)$ — бесконечная локально конечная бесконечномерная линейная группа конечной линейной ширины, F является полем простой характеристики p, $p \notin \pi(G)$, либо полем характеристики 0. Тогда группа G содержит нормальную абелеву подгруппу H конечного индекса, имеющую конечную фундаментальную размерность.*

Доказательство. Обозначим через m линейную ширину группы G. Предположим, что группа G не является почти абелевой. Положим $C = C_G(A)$. Выберем элементы $a_1 \in A$, $a_1 \notin C_A(G)$ и $h_1 \in G$, $a_1(h_1 - 1) \neq 0$. Положим $A_1 = a_1FG$, $C_1 = C_G(A_1)$. Подпространство A_1 является конечномерным и G-допустимым. Рассмотрим факторпространство A/A_1. Поскольку линейная ширина группы G конечна, то индекс $|G : C_1|$ конечен. Покажем, что группа C_1 действует на факторпространстве A/A_1 нетождественно. Предположим, что это не так. Тогда группа C_1 действует в факторах ряда $\langle 0\rangle \leqslant A_1 \leqslant A$ тождественно, и тогда по теореме Ф. Холла [14, гл. 6] подгруппа C_1 абелева. Следовательно, группа G является почти абелевой. Получается противоречие. Поэтому можно выбрать элементы $a_2 \in A$, $a_2 \notin A_1$, и $h_2 \in C_1$ такие, что $a_2(h_2 - 1) \notin A_1$. Положим $A_2 = a_2FG$, $C_2 = C_G(A_2)$. Рассмотрим факторпространство $A/(A_1 + A_2)$. Поскольку индексы $|G : C_1|$ и $|G : C_2|$ конечны, то индекс $|G : (C_1 \bigcap C_2)|$ также конечен. Как и ранее, устанавливаем, что группа $C_1 \bigcap C_2$ действует на факторпространстве $A/(A_1 + A_2)$ нетождественно. Поэтому можно выбрать элементы $a_3 \in A$, $a_3 \notin (A_1 + A_2)$, и $h_3 \in (C_1 \bigcap C_2)$ такие, что $a_3(h_3 - 1) \notin (A_1 + A_2)$. Положим $A_3 = a_3FG$, $C_3 = C_G(A_3)$. Продолжим это построение. На шаге с номером n, $n > m$, выбираем элементы $a_n \in A$, $a_n \notin (A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1})$, и $h_n \in \bigcap\limits_{i=1}^{n-1} C_i$ такие, что $a_n(h_n - 1) \notin A_{n-1}$. Положим $A_n = a_nFG$, $A_0 = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$.

Обозначим через K подгруппу, порожденную элементами $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Положим $B_1 = a_1FK$, $d_1 = a_1$. Подпространство B_1 является K-допустимым, поэтому по теореме Машке [14, гл. 7] для подпространства B_1 в A_0 существует K-допустимое дополнение D_1, и тогда $A_0 = B_1 \oplus D_1$. Элемент a_2 однозначно представим в виде суммы $a_2 = b_2 + d_2$, где $b_2 \in B_1$, $d_2 \in D_1$, причем в силу выбора элемента a_2 верно, что $d_2(h_2 - 1) \neq 0$. Пусть $B_2 = d_2FK$. По теореме Машке имеем разложение $A_0 = B_1 \oplus B_2 \oplus D_2$, где подпространство D_2 является K-допустимым. Элемент a_3 однозначно представим в виде суммы $a_3 = b_3 + d_3$, где $b_3 \in B_1 \oplus B_2$, $d_3 \in D_2$, причем в силу выбора элемента a_3 верно, что $d_3(h_3 - 1) \neq 0$. Пусть $B_3 = d_3FK$. По теореме Машке $A_0 = B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 \oplus D_3$, где подпространство D_3 K-допустимо. Продолжим этот процесс. На шаге с номером n, $n > m$, элемент a_n однозначно представим в виде суммы $a_n = b_n + d_n$, где $b_n \in B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_{n-1}$, $d_n \in D_{n-1}$, причем в силу выбора элемента a_n верно, что $d_n(h_n - 1) \neq 0$. Пусть $B_n = d_nFK$. По теореме Машке имеем разложение $A_0 = B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 \oplus \dots \oplus B_n \oplus D_n$, где подпространство D_n K-допустимо. Рассмотрим элемент $d = d_1 + d_2 + \dots + d_n$. В силу выбора элементов h_1, $h_2, \dots, h_n$, элементы $dh_1, dh_2, \dots, dh_n$ попарно различны. Поскольку $n > m$, получили противоречие с тем, что линейная ширина группы G равна m. Следовательно, группа G почти абелева.

Для почти абелевой группы G проведем аналогичные рассуждения. Положим $C = C_G(A)$. Выберем элемент $a_1 \in A$, $a_1 \notin C_A(G)$. Положим $A_1 = a_1FG$, $C_1 = C_G(A_1)$. Выберем элемент $h_1 \in G$, $a_1(h_1 - 1) \neq 0$. Подпространство A_1 является конечномерным и G-допустимым. Рассмотрим факторпространство A/A_1. Если можно выбрать элементы $a_2 \in A$, $a_2 \notin A_1$, и $h_2 \in C_1$ такие, что $a_2(h_2 - 1) \notin A_1$, то положим $A_2 = a_2FG$, $C_2 = C_G(A_2)$. Рассмотрим факторпространство $A/(A_1 + A_2)$. Если это возможно, то выбираем элементы $a_3 \in A$, $a_3 \notin (A_1 + A_2)$, и $h_3 \in C_1 \bigcap C_2$ такие, что $a_3(h_3 - 1) \notin (A_1 + A_2)$. Продолжим это построение. На некотором шаге с номером l, $l \leqslant m$, выбор элементов с указанными свойствами становится невозможным, поскольку в противном случае мы, как и в первой части доказательства, приходим к противоречию с тем, что линейная ширина группы G равна m. Следовательно, подгруппа $H = \bigcap\limits_{i=1}^{l} C_i$ действует в факторах ряда $\langle 0 \rangle \leqslant (A_1 + A_2 + \dots + A_l) \leqslant A$ тождественно, и тогда по теореме Ф. Холла [14, гл. 6] подгруппа $H = \bigcap\limits_{i=1}^{l} C_i$ абелева, причем по построению индекс $|G : H|$ конечен. Следовательно, $[H, A] \leqslant (A_1 + A_2 + \dots + A_l)$. Поскольку подпространство $(A_1 + A_2 + \dots + A_l)$ конечномерно, то фундаментальная размерность подгруппы H конечна. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $G \leqslant GL(F, A)$ — бесконечная локально конечная бесконечномерная линейная группа, F является полем простой характеристики p, $p \notin \pi(G)$, либо полем характеристики 0. Тогда группа G содержит нормальную абелеву подгруппу H конечного индекса, имеющую конечную центральную размерность.*

Доказательство. Подгруппа H группы G, построенная при доказательстве теоремы 1, является абелевой и имеет конечную фундаментальную размерность. Согласно теореме С [15], центральная размерность подгруппы H конечна. Следствие доказано.

1. *Phillips R. E.* The structure of groups of finitary transformations // J. Algebra. – 1988. – **119**, No 2. – P. 400–448.
2. *Philips R. E.* Finitary linear groups: a survey. "Finite and locally finite groups" // NATO ASI ser. C Math. Phys. Sci. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. – Vol. 471. – P. 111–146.
3. *Горчаков Ю. М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов. – Москва: Наука, 1978. – 120 с.
4. *Neumann B. H.* Groups covered by permutable subsets // J. London Math. Soc. – 1954. – **29**. – P. 236–248.
5. *Wiegold J.* Groups with boundedly finite classes of conjugate elements // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1957. – **238**. – P. 389–401.
6. *Macdonald I. D.* Some explicit bounds in groups with finite derived groups // Proc. London Math. Soc. – 1961. – **3**, No 11. – P. 23–56.
7. *Wiegold J.* Multiplicators and groups with finite central factor-groups // Math. Z. – 1965. – **89**. – P. 345–347.
8. *Bride I. M.* Second nilpotent BFC groups // J. Austral. Math. Soc. – 1970. – **11**, No 1. – P. 19–27.
9. *Neumann P. M.* An improved bound for BFC p-groups // Ibid. – 1970. – **11**, No 1. – P. 9–18.
10. *Vaughan-Lee M. R.* Metabelian BFC p-groups // J. London Math. Soc. – 1972. – **5**, No 2. – P. 673–680.
11. *Neumann P. M., Vaughan-Lee M. R.* An essay on BFC groups // Proc. London Math. Soc. – 1977. – **35**, No 3. – P. 213–237.

12. *Cartwright M.* The order of the derived group of a BFC-group // J. London Math. Soc. – 1984. – **30**, No 2. – P. 227–243.
13. *Диксон М. Р., Курдаченко Л. А., Дашкова О. Ю.* Бесконечномерные линейные группы с ограничениями на подгруппы бесконечных рангов // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2006. – **36**, № 3. – С. 109–123.
14. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – Москва: Наука, 1972. – 240 с.
15. *Kurdachenko L. A., Kirichenko V. V., Polyakov N. V.* On certain finitary modules // Укр. математ. конгресс-2001. III Междунар. алгебраическая конф. в Украине. Алгебраические структуры и их использование: Тр. – Киев, 2002. – С. 283–296.

Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию 22.05.2007

УДК 517.988

Член-кореспондент НАН України **В. Л. Макаров, В. В. Хлобистов, І. І. Демків**

Інтерполяційні інтегральні операторні дроби в банаховому просторі

For the first time, the interpolation operator integral chain fractions on continual knots are studied for nonlinear operators which are defined on linear topological spaces.

Питання наближення функцій та операторів у відповідних просторах за допомогою інтегральних ланцюгових дробів розглядалися у ряді робіт [1–3]. Дослідженню інтерполяційності на континуальних вузлах (тобто на вузлах, що залежать від неперервних скалярних аргументів) присвячені роботи [2, 3]. У даній роботі вперше вивчаються інтерполяційні операторні інтегральні ланцюгові дроби на континуальних вузлах для нелінійних операторів, визначених на лінійних топологічних просторах.

Постановка задачі та її розв'язок. Знайдемо зображення інтегрального n-поверхового операторного дробу, який буде інтерполяційним на континуальній множині вузлів

$$x^n(\vec{\xi}^n) = x_0 + g_{\xi_1}(x_1 - x_0) + \cdots + g_{\xi_n}(x_n - x_{n-1}), \qquad 0 \leqslant \xi_n \leqslant \cdots \leqslant \xi_1 \leqslant 1, \tag{1}$$

для оператора $F(x)$, що діє з лінійного топологічного простору X у алгебру Y з одиницею I. Тут g_z — лінійний, диференційований за z оператор, що діє з X в X, і має властивості

$$g_0 = 0, \qquad g_1 = E, \qquad g_\tau g_\xi = g_{\min(\tau,\xi)}, \qquad \tau, \xi \in [0,1], \tag{2}$$

де $E\colon X \to X$ тотожний оператор. Приклад операторів g_z з властивостями (2) для випадку гільбертового простору $X = H$ та просторі кусково-неперервних функцій $Q[0,1]$ див. у [4, 5].

Має місце