



УДК 539.3

© 2008

В. М. Быстров

## О влиянии тонкого изотропного покрытия на затухание краевого эффекта при одноосном продольном сжатии слоистого композитного материала

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

*The problem of determination of the Saint-Venant end effect in a laminated composite material with thin covering is considered under uniaxial longitudinal pressing of a material. The dependence of the decay length of the end effect on the relation between the surface load period and the structure parameter is investigated. A numerical solution of the boundary-value problem of elasticity theory of inhomogeneous bodies and the quantitative criterion for the decay of the end effect at normal stresses are used for the analysis of this effect.*

В работах [1–3] на основе концепции представительного элемента материала рассмотрен вопрос о затухании краевого эффекта в слоистых материалах нерегулярной структуры, представляющих собой однородную изотропную или трансверсально-изотропную протяженную матрицу с тонким изотропным покрытием (в общем случае — многослойным). Трансизотропная матрица рассматривалась в рамках континуального подхода как модель армированного однонаправленными волокнами материала. Задача определения параметров затухания краевого эффекта решена для случая поверхностной нагрузки, действующей в направлении армирования, когда достигается наибольшая длина затухания краевого эффекта. Исследована зависимость длины затухания краевого эффекта от соотношения между периодом кусочно-постоянной поверхностной нагрузки и толщиной покрытия. Показано, что наличие изотропного покрытия приводит к изменению геометрии зоны краевого эффекта и уменьшению ее протяженности.

В работах [4, 5] с использованием модели кусочно-однородной среды рассмотрен вопрос о затухании краевого эффекта в слоистом композитном материале при одноосном продольном сжатии слоистого композитного материала. Исследована зависимость длины затухания краевого эффекта от соотношения между периодом поверхностной нагрузки и параметром структуры материала, в качестве которого рассматривалась суммарная толщина слоев наполнителя и связующего и определен представительный элемент материала. Изменение периода поверхностной нагрузки связывалось с изменением количества ненагруженных слоев наполнителя.

В настоящей работе в рамках модели кусочно-однородной среды исследуется влияние тонкого изотропного покрытия на затухание краевого эффекта при одноосном продольном сжатии слоистого композитного материала. Представлены результаты вычислительного эксперимента по определению представительного элемента материала, которые учитывают структурную неоднородность материала, связанную с его микроструктурой и наличием тонкого изотропного покрытия. В работе развивается подход к определению краевых эффектов, базирующийся на использовании модели кусочно-однородной среды, уравнений линейной теории упругости и количественных критериев затухания краевых эффектов. Соответствующая краевая задача решается с применением метода сеток в рамках концепции базовых схем [6].

**Постановка задачи.** Рассматривается задача определения параметров затухания краевого эффекта в слоистом композитном материале с покрытием для случая продольного сжатия материала поверхностной кусочно-постоянной периодической нагрузкой. Исследуется зависимость длины затухания краевого эффекта от соотношения между периодом нагрузки и геометрическими параметрами, которые характеризуют структурную неоднородность материала. В качестве таких параметров рассматриваются суммарная толщина слоев наполнителя и связующего и толщина покрытия. На основании анализа указанной зависимости определяется представительный элемент материала.

Композитному материалу соответствует полупространство слоистой структуры, которое образовано последовательным чередованием плоских слоев наполнителя и связующего. Слой покрытия размещается перпендикулярно слоям материала. Область, которую занимает слоистый композитный материал с покрытием, отнесена к декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Плоскость  $x_2Ox_3$  совпадает со срединной поверхностью произвольного слоя наполнителя, плоскость  $x_1Ox_3$  — с поверхностью покрытия. Кусочно-постоянная периодическая нагрузка  $p$  прикладывается к слою покрытия и действует в плоскости размещения слоев наполнителя в направлении оси  $Ox_2$ :  $p(x_1, 0) = p^0$ ,  $|x_1| \leq 0,5h_n + kb$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Период  $b$  поверхностной нагрузки кратен параметру  $h = h_n + h_c$ , где  $h_n$ ,  $h_c$  — соответственно толщина слоя наполнителя и связующего. Вдоль оси  $Ox_3$  нагрузка не изменяется.

Регулярность композитной структуры, периодический характер поверхностной нагрузки и наличие установившегося при затухании краевого эффекта поля напряжений позволяют рассматривать задачу для расчетной области  $\bar{\Omega}$  конечных размеров

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{n=1}^N \bar{\Omega}^{(n)} = \left\{ (x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq \frac{b}{2}; 0 \leq x_2 \leq H \right\},$$

где  $\bar{\Omega}^{(n)}$  — область, которую занимает расчетный элемент  $n$  структуры материала с покрытием;  $N$  — количество расчетных элементов структуры материала, составляющих расчетную область композита. Расчетный элемент структуры материала (далее — расчетный элемент) образуется половинами соседних слоев наполнителя и связующего и сопряженной с ними областью покрытия. Расчетный элемент характеризуется размером  $h/2$  в направлении оси  $Ox_1$  и толщиной покрытия  $h_n$ . Размер расчетной области в направлении оси  $Ox_1$  равен половине периода  $b$  поверхностной нагрузки. Размер  $H$  расчетной области в направлении оси  $Ox_2$  определяется в рамках вычислительного эксперимента и соответствует условию установившегося вдоль оси  $Ox_2$  напряженного состояния с заданной точностью и условию независимости параметров затухания краевого эффекта от этого размера. Для геометрических параметров материала и параметров нагрузки справедливо соотношение:

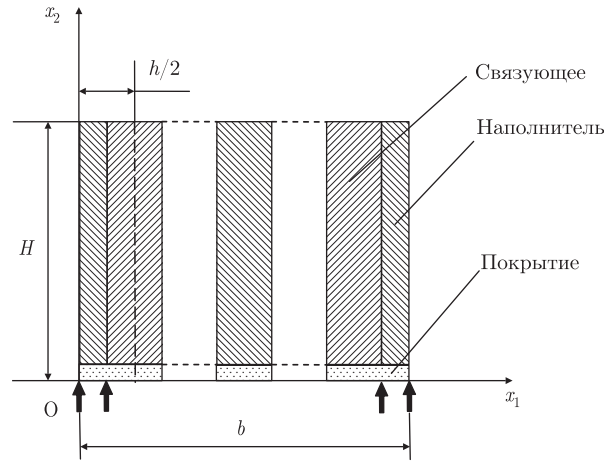


Рис. 1. Геометрия расчетной области и условия нагружения

$h_{\text{н}} \sim h_{\text{п}} < h \leq b < H$ . Геометрия расчетной области и условия нагружения композита представлены на рис. 1.

Расчетная схема для определения параметров затухания краевого эффекта в слоистом композитном материале с покрытием включает смешанную краевую задачу теории упругости для случая плоской деформации и условия определения зоны краевого эффекта и длины затухания краевого эффекта с заданной точностью  $\rho$ .

Граничные условия краевой задачи на участке  $\{0 \leq x_1 \leq b/2, x_2 = 0\}$  границы расчетной области  $\bar{\Omega}$  определяют поверхностную нагрузку, которой ставится в соответствие самоуравновешенная функция нагрузки. На участках  $\{x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq H\}$  и  $\{x_1 = b/2, 0 \leq x_2 \leq H\}$  границы расчетной области граничные условия соответствуют периодическому характеру напряженного состояния и являются смешанными однородными условиями. Граничные условия на участке  $\{0 \leq x_1 \leq b, x_2 = H\}$  границы не допускают перемещение и вращение расчетной области как целого и также являются смешанными однородными условиями. Условия сопряжения между слоями материала, а также между слоями материала и слоем покрытия соответствуют идеальному контакту.

Условия определения зоны краевого эффекта и длины затухания краевого эффекта с заданной точностью  $\rho$  имеют следующий вид:

условие определения границы  $\Gamma_\rho$  зоны краевого эффекта Сен-Венана

$$\tilde{\rho}(x) = \rho, \quad \tilde{\rho}(x) = \frac{100(\sigma_{22}(x) - \sigma_{\text{уст}})}{f(x)}, \quad x \in \Gamma_\rho, \quad (1)$$

где  $f(x_1, 0) = p(x_1, 0) - \sigma_{\text{уст}}(x_1, H)$  — самоуравновешенная функция нагрузки;  $\sigma_{\text{уст}}$  — нормальные напряжения  $\sigma_{22}$ , которые устанавливаются в расчетной области при затухании краевого эффекта;

условие определения максимальной протяженности  $\lambda_\rho$  зоны краевого эффекта

$$\lambda_\rho = \max_{x_1, x_2 \in \Gamma_\rho} (x_2). \quad (2)$$

Размеры  $b_{\text{п}}$ ,  $H_{\text{п}}$  представительного элемента материала определяются на основе вычислительного эксперимента, исходя из условия установившегося значения  $\lambda_\rho/b$  при увели-

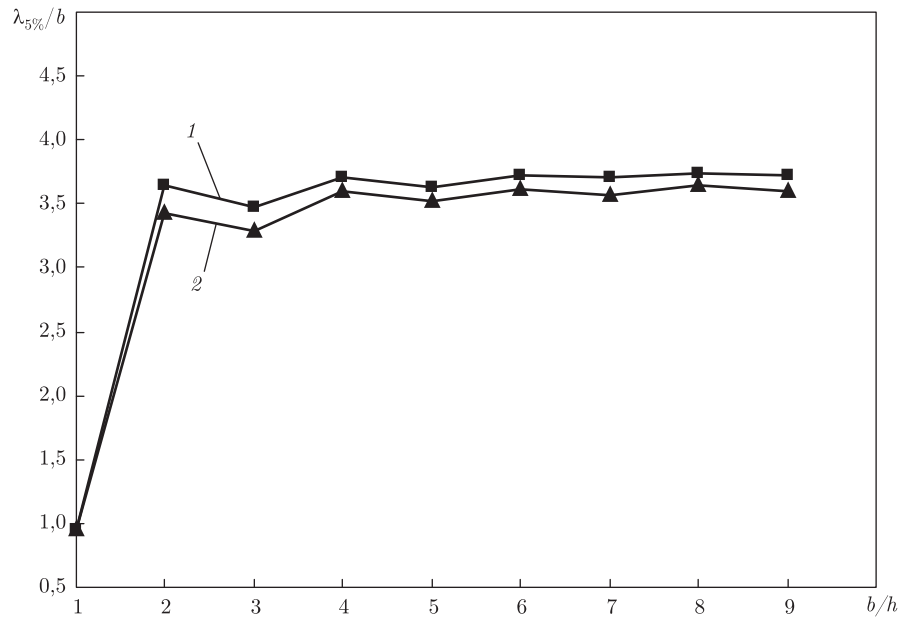


Рис. 2. Зависимость максимальной относительной протяженности  $\lambda_{5\%}/b$  зоны краевого эффекта от периода поверхностной нагрузки  $b$ : 1 — материал без покрытия; 2 — материал с покрытием

чении размеров  $b$  и  $H$  расчетной области в направлении  $Ox_1$  и  $Ox_2$ , соответственно. Это условие может быть представлено следующим образом:

$$\left. \frac{\lambda_{\rho}(b)}{b} \right|_{b \geq b_{\Pi}, H \geq H_{\Pi}} = \text{const}_{\rho}, \quad b = nh, \quad n = \overline{1, N_{\Pi}}, \quad (3)$$

где  $N_{\Pi}$  — количество расчетных элементов в расчетной области, соответствующей представительному элементу материала. Изменение периода нагрузки  $b = nh$  соответствует изменению количества  $n$  расчетных элементов в расчетной области  $\overline{\Omega}$ . Параметр  $h$  и толщина покрытия являются фиксированными.

**Анализ результатов расчета.** Расчеты проводились для следующих значений упругих и геометрических характеристик компонент материала:  $E_{\Pi}/E_c = 100$ ,  $E_{\Pi} = E_n$ ,  $\nu_{\Pi} = \nu_c = \nu_n = 0,3$ , где  $E_n$ ,  $\nu_n$ ,  $E_c$ ,  $\nu_c$  и  $E_{\Pi}$ ,  $\nu_{\Pi}$  — соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона наполнителя, связующего и покрытия;  $c_n = h_n/(h_n + h_c) = 0,5$  — концентрация наполнителя,  $h_{\Pi} = 0,125h$ .

На рис. 2 показано изменение максимальной протяженности зоны краевого эффекта, определенной с точностью 5%, при изменении периода  $b$  поверхностной нагрузки в пределах  $b = h \div 9h$ , где  $h$  — параметр структуры материала. Протяженность зоны краевого эффекта отнесена к периоду нагрузки. Кривая 1 соответствует материалу с покрытием, кривая 2 — без покрытия.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы относительно совместного влияния поверхностной нагрузки и структурной неоднородности материала, которая связана с его микроструктурой и наличием тонкого покрытия, на протяженность зоны краевого эффекта при продольном сжатии материала.

Наличие тонкого покрытия приводит к уменьшению максимальной протяженности зоны краевого эффекта для значений периода поверхностной нагрузки, превышающих параметр

структуры материала. При их равенстве (равномерное сжатие слоев наполнителя) наличие покрытия практически не влияет на максимальную протяженность зоны краевого эффекта. Уменьшение протяженности зоны краевого эффекта, связанное с наличием покрытия, для рассмотренных значений механических и геометрических характеристик материала и покрытия не превышает 6%.

Изменение протяженности зоны краевого эффекта в материале с покрытием при изменении периода поверхностной нагрузки имеет такой же характер, как и при отсутствии покрытия. Наибольшее изменение протяженности зоны краевого эффекта, по сравнению с равномерным сжатием слоев наполнителя, соответствует периоду нагрузки, который равен двум параметрам структуры. Дальнейшее увеличение периода нагрузки приводит к незначительному увеличению максимальной протяженности зоны краевого эффекта.

С увеличением периода поверхностной нагрузки по сравнению с параметром структуры материала и толщиной покрытия, максимальная относительная протяженность зоны краевого эффекта выходит на установившееся значение. Соответствующая расчетная область определяет представительный элемент материала. Для рассматриваемой задачи представительный элемент материала характеризуется следующими размерами:  $b_{\Pi} = 6h$ ,  $H_{\Pi} = 4,5b_{\Pi}$ .

1. *Bystrov V. M.* Analysis of the decay of edge effects in laminated materials on the basis of representative element // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, No 6. – P. 826–835.
2. *Быстров В. М., Куханенко Ю. В.* Анализ затухания краевых эффектов Сен-Венана в трансверсально-изотропной матрице с изотропным покрытием // *Механика композит. материалов.* – 2002. – **38**, № 2. – С. 147–160.
3. *Быстров В. М.* Влияние неоднородности материала на зону краевого эффекта Сен-Венана при плоской деформации полуограниченной трансверсально-изотропной матрицы с покрытием // *Доп. НАН України.* – 2004. – № 1. – С. 38–42.
4. *Быстров В. М.* Затухание краевого эффекта Сен-Венана в слоистом композитном материале при изменении количества ненагруженных слоев наполнителя // *Там само.* – 2005. – № 11. – С. 35–38.
5. *Куханенко Ю. В., Быстров В. М.* О краевом эффекте в слоистом композитном материале при продольном сжатии слоев наполнителя // *Прикл. механика.* – 2006. – **42**, № 8. – С. 89–96.
6. *Григоренко Я. М., Шевченко Ю. В., Василенко А. Т. и др.* Численные методы // *Механика композитов: В 12-ти т. / Под общей ред. А. Н. Гузя.* Т. 11. – Киев: “А. С. К.”, 2002. – 448 с.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев*

*Поступило в редакцию 22.06.2007*