КОАЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ БИСИМУЛЯЦИОННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Антонцева Марина Федоровна

Институт Систем Информатики им. А.П.Ерщова СО РАН

630090 г. Новосибирск, проспект Лаврентьева 6

тел.: (3832) 34-36-52

факс: (3832) 32-34-94

e-mail: iis@iis.nsk.su

The aim of this paper is to extend of coalgebra semantic and categorical methods to noninterleaving models, in particular, transition systems with independence and labelled event structure.

Введение

Теория категорий в последнее время стала активно использоваться в теории параллелизма для описания и изучения параллельных систем и процессов. Использование методов теории категорий позволило исследовать взаимосвязи между различными моделями [3]. Одним из наиболее широко применяемых понятий этой теории является понятие открытого морфизма.

В теории параллельного программирования существует множество различных поведенческих эквивалентностей, но самыми известными являются бисимуляционные эквивалентности. Две системы называются бисимуляционно эквивалентными, если наблюдатель не может найти различий в их поведении. В рамках теории категорий было предложено абстрактное понятие бисимуляции для различных параллельных моделей, определенное через конструкцию открытых морфизмов. В дальнейшем этот подход стал использоваться и для определения других видов эквивалентностей.

В [4] дан коалгебраический подход для описания поведенческой бисимуляции интерливинговых моделей – систем переходов. Коалгебра является двойственной к алгебре. Двойственность алгебраической и коалгебраической семантик показана в [5].

Цель моей работы – расширить эти два подхода (категориальный и коалгебраический) на модели истинного параллелизма, представленные системами переходов с независимостью и помеченными структурами событий.

1. Модели

1.1. Системы переходов

Определение 1.1.

1. ***T-система*** – это структура $(S, i, A, \to_S)$, где

S – множество состояний с начальным состоянием i,

A – множество меток,

$\to_S \subseteq S \times A \times S$ – отношение перехода. Пишем $s \xrightarrow{a}_S s'$, если $(s, a, s') \in \to_S$.

2. ***TI-система*** – это структура $(S, i, A, \to_S, I_S)$, где $(S, i_S, A, \to_S, I_S)$ – T-система и I_S – иррефлексивное, симметричное отношение, такое что

1) $(s, a, s') \approx (s, a, s'') \;\Rightarrow\; s' = s''$,

2) $(s, a, s') I_S (s, b, s'') \;\Rightarrow\; \exists u. (s, a, s') I_S (s', b, u)$, $(s, b, s'') I_S (s'', a, u)$,

3) $(s, a, s') I_S (s', b, u) \;\Rightarrow\; \exists s''. (s, a, s') I_S (s, b, s'')$,

4) $(s, a, s') \approx (s'', a, u) I_S (w, b, w') \;\Rightarrow\; (s, a, s') I_S (w, b, w')$,

где $\approx$ – это наименьшее отношение эквивалентности, включающее отношение между переходами $\prec$, которое определяется так:

$(s, a, s') \prec (s'', a, u) \;\Leftrightarrow\; \exists b.\ (s, a, s') I_S (s', b, s''),\ (s, a, s') I_S (s', b, u),\ (s, b, s'') I_S (s'', a, u).$

Отношение I_S называется ***отношением независимости***. Если $(s, a, s') I_S (w, b, w')$, то говорят, что переходы $s \xrightarrow{a}_S s'$ и $w \xrightarrow{b}_S w'$ ***независимы.***

3. ***OTI-система*** – это *TI*-система $(S, i, A, \to_S, I_S)$, которая является достижимой, ацикличной и такая, что если $s' \xrightarrow{a}_S u$, $s'' \xrightarrow{b}_S u$ и эти переходы не совпадают, то

$\exists s \in S.\ (s, b, s') I_S (s', a, s''),\ (s, b, s') I_S (s', a, u),\ (s, a, s'') I_S (s'', b, u).$

Т.е. в *OTI*-системе любой квадрат независимости – невырожденный, другими словами, состоит из четырех различных состояний.

Определение 1.2. Пусть $\boldsymbol{S}=(S, i_S, A_S, \to_S, I_S)$ и $\boldsymbol{T}=(T, i_T, A_T, \to_T, I_T)$ – две *OTI*-системы. ***Морфизм*** f:$\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{T}$ между ними – это пара $f=(\sigma,\lambda)$, где $\sigma: S \to T$, $\lambda: A_S \to A_T$, такие что выполнено:

1) $\sigma(i_S)=i_T$;

2) если $s \xrightarrow{a}_S s'$ и $\lambda(a)$ определено, то $\sigma(s) \xrightarrow{\lambda(a)}_T \sigma(s')$;

если $s \xrightarrow{a}_S s'$ и $\lambda(a)$ не определено, то $\sigma(s)=\sigma(s')$,

3) если $s \xrightarrow{a}_S s' I_S u \xrightarrow{b}_S u'$ и $\lambda(a), \lambda(b)$ определено,

то $\sigma(s) \xrightarrow{\lambda(a)}_T \sigma(s') I_T \sigma(u) \xrightarrow{\lambda(b)}_T \sigma(u')$.

*OTI-с*истемы вместе с морфизмами формируют категорию, которую обозначают $\mathbb{OTI}$. Пишем $\mathbb{OTI}_A$ для обозначения категории *OTI*-систем с множеством меток *A*.

1.2. Помеченные структуры событий

Определение 1.3. ***Помеченная структура событий*** – это структура $(E, \leq, \#, l)$, где

E – множество событий,

$l: E \to A$ – помечающая функция (A – алфавит),

$\leq \subseteq E \times E$ – отношение причинной зависимости,

$\# \subseteq E \times E$ – отношение конфликта (иррефлексивное, симметричное отношение), которое удовлетворяет:

1) $\forall e \in E.\{d \in E \mid d \leq e\}$ – конечно (т.н. принцип «конечности причин»);

2) $\forall e_1, e_2, e_3 \in E.\, e_1 \# e_2 \leq e_3 \quad \Rightarrow \quad e_1 \# e_3$ – (т.н. принцип «наследования конфликта»).

Два события $e_1, e_2 \in E$ – ***параллельны***, пишут $e_1 co e_2$, если $(\neg(e_1 \leq e_2), \neg(e_2 \leq e_1), \{e_1, e_2\} \notin \#)$.

Определение 1.4. Пусть $\boldsymbol{E}$ = $(E, \leq, \#, l)$ – помеченная структура событий. *C* – ***конфигурация***, если выполнено:

1) $\forall e, d \in E.\, e \in C \wedge d \prec e \quad \Rightarrow \quad d \in C$, $\prec = \leq \setminus id$;

2) $\forall e, e' \in E.\, \neg(e \# e')$.

Множество конфигураций структуры событий обозначается *C(E)*.

Определение 1.5. Пусть $\boldsymbol{E}$ = $(E, \leq, \#, l)$, $\boldsymbol{E}$` = $(E', \leq', \#', l')$ – две помеченные структуры событий над алфавитами A и A' соответственно. ***Морфизм*** между ними – это $f=(\eta,\lambda): E \to E'$, где – $\eta: E \to E'$, $\lambda: A \to A'$ частичные функции такие, что выполнено:

1) $l' \circ \eta = \lambda \circ l$;

2) если c – конфигурация E, то ηc – конфигурация E', и если $\forall e_1, e_2 \in c$ и их образы определены и $\eta(e_1)=\eta(e_2)$, то $e_1 = e_2$.

$\mathbb{E}$ – категория помеченных структур событий с морфизмами.

2. Открытые морфизмы

Определим категорию мультимножеств $\mathbb{P}om_A$ относительно множества меток *A* как полную подкатегорию $\mathbb{E}_A$ (категория помеченных структур событий с морфизмами над множеством меток *A*), чьи объекты – это конечные мультимножества, т.е. частично упорядоченные помеченные события.

Тогда вычисление в структуре событий *E* можно представить как морфизм в $\mathbb{E}_A$: $p: P \to E$, $P \in \mathbb{P}om_A$.

Так как структуры событий (и также мультимножества) вкладываются в *TI*-системы [2,3], то вычисление в $T \in \mathbb{TI}_A$ представляется морфизмом $p: P \to T$ в $\mathbb{TI}_A$, где *P* – образ объекта $\mathbb{P}om_A$ под действием вложения.

Пусть $\mathbb{M}$ – категория моделей, $\mathbb{P}$ ➥ $\mathbb{M}$, $\mathbb{P}$ – подкатегория $\mathbb{M}$. Определим вычисление в $X \in \mathbb{M}$ как морфизм $p: P \to X$ в $\mathbb{M}$, где $P \in \mathbb{P}$. Тогда любой морфизм в $\mathbb{M}$ $f: X \to Y$ переводит такое вычисление *p* в *X* в вычисление $f \circ p: P \to Y$ в *Y*.

Определение 2.1. Пусть $P, Q \in \mathbb{P}$, $X, Y \in \mathbb{M}$. Пусть $f: X \to Y$ – морфизм в $\mathbb{M}$, $m: P \to Q$ – морфизм в $\mathbb{P}$, $p: P \to X$ – вычисление в *X*, $q: Q \to Y$ – вычисление в *Y*.

Тогда $f: X \to Y$ называют $\mathbb{P}$***-открытым морфизмом***, когда *f* удовлетворяет условию:

если $q \circ m = f \circ p$, то существует морфизм $p': Q \to X$, такой что $p' \circ m = p$ и $f \circ p' = q$.

Определение 2.2. Пусть $\mathbb{M}$ – категория моделей, $\mathbb{P}$ ➥ $\mathbb{M}$, $\mathbb{P}$ – подкатегория $\mathbb{M}$. Пусть $X_1, X_2 \in \mathbb{M}$. Говорят, что X_1, X_2 – $\mathbb{P}$***-бисимулятивны*** с бисимуляцией *X*, если существует «хорда» $\mathbb{P}$-открытых морфизмов $f_1: X \to X_1, f_2: X \to X_2$.

Предложение 2.3 [2]. *$\mathbb{P}om_A$-открытые морфизмы в $\mathbb{TI}_A$ – это морфизмы $(\sigma, 1_A): T_1 \to T_2$, где 1_A – тождественное отображение на множестве A, такие что:*

1) если $\sigma(s) \xrightarrow{a}_{T_2} t'$, то $\exists s' \in S.\, s \xrightarrow{a}_{T_1} s'$ и $\sigma(s')=t'$;

2) *если* $s \xrightarrow{a}_{T_1} s', s \xrightarrow{b}_{T_1} s''$ *и* $\sigma(s) \xrightarrow{a}_{T_2} \sigma(s') I_{T_2} \sigma(s') \xrightarrow{b}_{T_2} \sigma(s'')$, *то* $s \xrightarrow{a}_{T_1} s' I_{T_1} s' \xrightarrow{b}_{T_1} s''$.

3. *F*– коалгебры

Определение 3.1. Пусть $F : Set \to Set$ – функтор. Тогда ***F*-коалгебра** – это пара (S, α_S), состоящая из множества *S* и функтора $\alpha_S : S \to F(S)$.

Определение 3.2. Пусть (S, α_S) и (T, α_T) – две *F*-коалгебры. ***Гомоморфизм F-коалгебр*** (или ***F-гомоморфизм***) – это функция $f : S \to T$, удовлетворяющая равенству $F(f) \circ \alpha_S = \alpha_T \circ f$.

Композиция двух *F*-гомоморфизмов тоже *F*-гомоморфизм, и тождественное отображение *F*-коалгебр – *F*-гомоморфизм. Следовательно, набор всех *F*-коалгебр с *F*-гомоморфизмами образуют категорию, которая обозначается $\mathbb{S}et_F$.

Определение 3.3. Пусть (S, α_S) и (T, α_T) – две *F*-коалгебры. ***F-бисимуляция*** между ними – это отношение $R \subseteq S \times T$, такое что существует функтор $\alpha_R : R \to F(R)$ (т.е. (R, α_R) *F*-коалгебра), удовлетворяющий условию: проекции $\pi_1 : R \to S$ и $\pi_2 : R \to T$ являются *F*-гомоморфизмами.

Теорема 3.4 [4]. *Пусть* (S, α_S) *и* (T, α_T) *– две F-коалгебры. Функция* $f : S \to T$ *является F-гомоморфизмом тогда и только тогда, когда ее граф G(f) – это F-бисимуляция между данными F-коалгебрами.*

4. Связь коалгебр и моделей

4.1. *OTI*-системы и F^I –коалгебры

Рассмотрим помеченную *TI*-систему $(S, i_S, A, \to_S, I_S)$.

Определим $\alpha_S^I : S \to \mathrm{P}(A \times S \times (S \times A \times S))$ следующим образом: $\forall s \in S \quad s \mapsto \{ < a, s', I_{as} > \mid s \xrightarrow{a}_S s' \}$, где $I_{as} = \{ < u, b, u' > \mid s \xrightarrow{a}_S s' I_S u \xrightarrow{b}_S u' \}$.

Построим $F^I(X) = \alpha_S^I(X \cap S) \;\; \forall X \in Set$. Тогда $F^I : Set \to Set$ – функтор (это легко показать), и (S, α_S^I) – коалгебра. Таким образом, любая *TI*-система $(S, i_S, A, \to_S, I_S)$ соответствует F^I-коалгебре. И наоборот, любая F^I-коалгебра соответствует *TI*-системе $(S, i_S, A, \to_S, I_S)$:

- $s \xrightarrow{a}_S s' I_S u \xrightarrow{b}_S u' \quad \Leftrightarrow \quad < a, s', u, b, u' > \in \alpha_S^I(s)$;
- $s \xrightarrow{a}_S s'$ и нет переходов, с ним независимых $\Leftrightarrow \quad < a, s', \varnothing > \in \alpha_S^I(s)$.

Т. е. класс *TI*-систем совпадает с классом F^I-коалгебр. Далее будем рассматривать подкласс *TI*-систем – *OTI*-системы.

Утверждение 4.1. *Пусть* $(S, i_S, A, \to_S, I_S)$ *и* $(T, i_T, A, \to_T, I_S)$ *– две OTI-системы,* (S, α_S^I) *и* (T, α_S^I) *– соответствующие им* F^I*-коалгебры. Тогда* F^I*-гомоморфизм между ними – это морфизм* $(f, 1_A) : S \to T$ *в* $\mathbb{OT}$

$\mathbb{I}_A$, *который удовлетворяет:*

1. *если* $f(s) \xrightarrow{a}_T t'$, *то* $\exists s'.\, s \xrightarrow{a}_S s'$ *и* $f(s') = t'$;
2. *если* $s \xrightarrow{a}_S s', u \xrightarrow{b}_S u', f(s) \xrightarrow{a}_T f(s') I_T f(u) \xrightarrow{b}_T f(u')$,
   то $s \xrightarrow{a}_S s' I_S u \xrightarrow{b}_S u'$.

Доказательство.

Пусть $f : S \to T$ – F^I-гомоморфизм между *S* и *T*, т.е. удовлетворяет равенству $F^I(f) \circ \alpha^I{}_S = \alpha_T^I \circ f$. Надо доказать, что для *f* выполняется:

1) если $s \xrightarrow{a}_S s'$, то $f(s) \xrightarrow{a}_T f(s')$;

2) если $s \xrightarrow{a}_S s' I_S u \xrightarrow{b}_S u'$, то $f(s) \xrightarrow{a}_T f(s') I_T f(u) \xrightarrow{b}_T f(u')$;

3) если $f(s) \xrightarrow{a}_T t'$, то $\exists s' \in S.\, s \xrightarrow{a}_S s'$ и $f(s') = t'$;

4) если $s \xrightarrow{a}_S s'$, $u \xrightarrow{b}_S u'$ и $f(s) \xrightarrow{a}_T f(s') I_T f(u) \xrightarrow{b}_T f(u')$, то $s \xrightarrow{a}_S s' I_S u \xrightarrow{b}_S u'$.

Пусть $s \xrightarrow{a}_S s'$, и нет переходов, с ним независимых. Это равносильно тому, что $< a, s', \varnothing > \in \alpha_S^I(s)$. Тогда $F^I < a, s', \varnothing > = < a, f(s'), \varnothing >$ по построению F^I. Так как $F^I(f) \circ \alpha_S^I(s) = \alpha_T^I \circ f(s) \quad \forall s \in S$, то $< a, f(s'), \varnothing > \in \alpha_T^I(f(s))$, что равносильно $f(s) \xrightarrow{a}_T f(s')$.

Пусть $s \xrightarrow{a}_S s' I_S u \xrightarrow{b}_S u'$. Тогда $<a, s', u, b, u'> \in \alpha_S^I(s)$ и $<a, f(s'), f(u), b, f(u')> \in F^I(f) \circ \alpha_S^I(s)$. Так как f – F^I*-гомоморфизм,* то $<a, f(s'), f(u), b, f(u')> \in \alpha_T^I(f(s))$ и, следовательно, $f(s) \xrightarrow{a}_T f(s') I_T f(u) \xrightarrow{b}_T f(u')$.

Пусть $f(s) \xrightarrow{a}_T t'$, т.е. $<a, t', \varnothing> \in \alpha_T^I(f(s))$. Так как $F^I(f) \circ \alpha_S^I(s) = \alpha_T^I \circ f(s) \quad \forall s \in S$, то $<a, t', \varnothing> \in F^I(f) \circ \alpha_S^I(s)$. Отсюда следует, что существует $s \in S$, такое что $s \xrightarrow{a}_S s'$ и $<a, t', \varnothing> = F^I(f) <a, s', \varnothing> = <a, f(s'), \varnothing>$. Поэтому $t = f(s')$.

Пусть $s \xrightarrow{a}_S s'$, $u \xrightarrow{b}_S u'$ и $f(s) \xrightarrow{a}_T f(s') I_T f(u) \xrightarrow{b}_T f(u')$. Т. е. $<a, f(s'), f(u), b, f(u')> \in \alpha_T^I(f(s))$. Так как $F^I(f) \circ \alpha_S^I(s) = \alpha_T^I \circ f(s) \quad \forall s \in S$, то $<a, f(s'), f(u), b, f(u')> \in F^I(f) \circ \alpha_S^I(s)$, т.е. $s \xrightarrow{a}_S s' I_S u \xrightarrow{b}_S u'$.

Таким образом, мы показали, что если $f : S \to T$ – F^I-гомоморфизм между S и T, то он является морфизмом, который удовлетворяет пунктам 1 – 2 утверждения.

Обратное очевидно.

Утверждение 4.1 доказано.

Теорема 4.2. *Пусть* $(S, i_S, A, \to_S, I_S)$ *и* $(T, i_T, A, \to_T, I_S)$ *– две OTI-системы,* (S, α_S^I) *и* (T, α_S^I) *– соответствующие им* F^I *-коалгебры. Тогда* F^I *-бисимуляция между ними – это отношение* $R \subseteq S \times T$ *такое, что* $\forall <s, t> \in R$ *выполнено:*

1) $\forall s' \in S$ *если* $s \xrightarrow{a}_S s'$, *то* $\exists t' \in T.\, t \xrightarrow{a}_T t'$ *и* $<s', t'> \in R$;

2) $\forall t' \in T$ *если* $t \xrightarrow{a}_T t'$, *то* $\exists s' \in S.\, s \xrightarrow{a}_S s'$ *и* $<s', t'> \in R$;

3) $\forall s', u, u' \in S$ *если* $s \xrightarrow{a}_S s' I_S u \xrightarrow{b}_S u'$, *то* $\exists t', w, w' \in T.\, t \xrightarrow{a}_T t' I_T w \xrightarrow{b}_T w'$ *и* $<s', t'>, <u, w>, <u', w'> \in R$;

4. $\forall t', w, w' \in T$ *если* $t \xrightarrow{a}_T t' I_T w \xrightarrow{b}_T w'$, *то* $\exists s, u, u' \in S.\, s \xrightarrow{a}_S s' I_S u \xrightarrow{b}_S u'$ *и* $<s', t'>, <u, w>, <u', w'> \in R$;

Доказательство.

Пусть $R \subseteq S \times T$ – F^I-бисимуляция между $(S, i_S, A, \to_S, I_S)$ *и* $(T, i_T, A, \to_T, I_S)$. Тогда по определению 3.3 существует функтор $\alpha_R^I : R \to F(R)$ такой, что (R, α_R^I) – F^I-коалгебра. Тогда α_R^I индуцирует отношение перехода $\to_R \subseteq R \times A \times R$.

Пусть $<s, t> \in R$, $s \xrightarrow{a}_S s'$ и $\pi_1 <s, t> = s$. Из этого следует, что $\pi_1 <s, t> \xrightarrow{a}_S s'$, и так как π_1 – F^I-гомоморфизм, то по определению 3.3 существует $<s'', t'> \in R$ такое, что $<s, t> \xrightarrow{a}_R <s'', t'>$ и $\pi_1 <s'', t'> = s'$. Следовательно, $<s', t'> \in R$. Так как π_2 – F^I-гомоморфизм, то $t \xrightarrow{a}_T t'$.

Таким образом мы доказали, что для любого $s' \in S$, если $s \xrightarrow{a}_S s'$, то $\exists t' \in T.\, t \xrightarrow{a}_T t'$ и $<s', t'> \in R$;. Доказательство 2–4 – аналогично.

Т. е. мы доказали, что если отношение $R \subseteq S \times T$ – F^I-бисимуляция, то R удовлетворяет 1–4.

Обратно: пусть $R \subseteq S \times T$ удовлетворяет 1–4.

Определим $\alpha_R^I : R \to F(R)$ для $<s, t> \in R$ следующим образом:

$$\alpha_R^I <s, t> = \left\{ <a, <s', t'>, I_{a<s,t>}> \mid s \xrightarrow{a}_S s', t \xrightarrow{a}_T t' \text{ и } <s', t'> \in R \right\},$$

где $$I_{a,<s,t>} = \left\{ \begin{array}{c} << u, w>, b, <u', w'>> \mid s \xrightarrow{a}_S s' I_S u \xrightarrow{b}_S u', t \xrightarrow{a}_T t' I_T w \xrightarrow{b}_T w' \\ \text{и} \quad <s', t'>, <u, w>, <u', w'> \in R \end{array} \right\}.$$

Тогда легко показать, что (R, α_R^I) – F^I-коалгебра и проекции из R в S и в T – это F^I-гомоморфизмы. Следовательно, отношение $R \subseteq S \times T$ – F^I-бисимуляция между $(S, i_S, A, \to_S, I_S)$ и $(T, i_T, A, \to_T, I_S)$.

Теорема 4.2 доказана.

Теорема 4.3. *Для OTI-систем над алфавитом A* $\mathbb{Pom}_A$*–открытые морфизмы совпадают с* F^I*-гомоморфизмами соответствующих им* F^I *-коалгебр.*

Доказательство.

Следствие утверждения 4.1 и предложения 2.3.

Теорема 4.4. *Для OTI-систем над алфавитом A* $\mathbb{Pom}_A$*–бисимуляция совпадает с* F^I*-бисимуляцией соответствующих им* F^I*-коалгебр.*

Доказательство.

Пусть $(S, i_S, A, \to_S, I_S)$ и $(T, i_T, A, \to_T, I_S)$ – две *OTI*-системы, (S, α_S^I) и (T, α_S^I) – соответствующие им F^I-коалгебры. Пусть $R \subseteq S \times T$ – F^I-бисимуляция между ними. Так как по теореме 4.3 F^I-гомоморфизмы совпадают с $\mathbb{Pom}_A$–открытыми морфизмами, то по определению 2.2 R – $\mathbb{Pom}_A$–бисимуляция между $(S, i_S, A, \to_S, I_S)$ и $(T, i_T, A, \to_T, I_S)$.

Обратно: пусть R – $\mathbb{Pom}_A$–бисимуляция между $(S, i_S, A, \to_S, I_S)$ и $(T, i_T, A, \to_T, I_S)$. По определению 2.2 существуют $\mathbb{Pom}_A$–открытые морфизмы $f_1 : R \to S$, $f_2 : R \to T$, которые по теореме 4.3 являются F^I-гомоморфизмами. В качестве f_1 и f_2 возьмем проекции из R в S и в T. Строим $\alpha_R^I : R \to F^I(R)$, как в доказательстве теоремы 4.2. Тогда (R, α_R^I) – F^I-коалгебра и проекции из R в S и в T – это F^I-гомоморфизмы. Т. е. отношение $R \subseteq S \times T$ – F^I-бисимуляция между (S, α_S^I) и (T, α_S^I).

Теорема 4.4 доказана.

Теорема 4.5. *Пусть* $(S, i_S, A, \to_S, I_S)$ *и* $(T, i_T, A, \to_T, I_S)$ *– две OTI-системы. Функция* $f : S \to T$ *является* $\mathbb{Pom}_A$*–открытым морфизмом тогда и только тогда, когда ее граф* $G(f)$ *– это* F^I*-бисимуляция соответствующих им* F^I*-коалгебр.*

Доказательство.

Следствие теоремы 3.4, теоремы 4.3 и теоремы 4.4

4.2. Помеченные структуры событий и коалгебры

Рассмотрим помеченную структуру событий $(E, \leq, \#, l)$. Определим ее «развертку» $les.otsi(E)$ как *TI*-систему $les.otsi(E) = (S, i_S, A, \to_S, I_S)$ [3], где

S – множество конечных конфигураций структуры событий, $i_S = \varnothing$;

A=l(E);

$c \xrightarrow{a}_S c' \quad \Leftrightarrow \quad c = c' \setminus \{e\},\ l(e) = a, \quad e \in E;$

$c \xrightarrow{a}_S c' I_S \bar{c} \xrightarrow{b}_S \bar{c}' \quad \Leftrightarrow \quad (c' \setminus c) co (\bar{c}' \setminus \bar{c}).$

Утверждение 4. 6 [3]**.** $les.otsi(E)$ *– OTI-система.*

Следующая теорема является следствием теоремы 4.4.

Теорема 4.7. *Две помеченные структуры событий –* $\mathbb{Pom}_A$*–бисимулятивны тогда и только тогда, когда* F^I *–коалгебры, соответствующие их «разверткам» в OTI–системы, –* F^I*-бисимулятивны.*

Заключение

Статья посвящена исследованию распределенных систем, таких как системы переходов с независимостью и помеченные структуры событий. Для исследования применялись два подхода, которые стали активно использоваться в теории параллелизма сравнительно недавно для спецификации и верификации параллельных процессов. Это коалгебраический и категориальный подходы. В ходе работы стало ясно, что некоторые определенные свойства интерливинговых моделей можно распространить на модели с “истинным” параллелизмом, такие как *OTI*-системы. Однако для *TI*-систем эти свойства не выполняются.

В дальнейшем планируется, используя коалгебраические методы, изучить взаимосвязи между различными временными сетевыми моделями, а также исследовать новые поведенческие эквивалентности, учитывая также временные аспекты поведения систем.

Список литературы.

1. И.Б.Вирбицкайте. Семантические модели в теории параллелизма. *Новосибирск: ИСИ СОРАН,* 2000. – 190с.;
2. Andre Joyal, Mogens Nilsen and Glynn Winskel. Bisimulation From Open Maps. *Information And Computation* 127, pp. 164-185, 1996;
3. Mogens Nilsen, Vladimiro Sassone and Glinn Winskel. Relationships Between Models of Concurrency. *Theoretical Computer Science, 803*, pp. 425-476, 1994;
4. J.J.Rutten. Universal coalgebra: a theory of systems. *Theoretical Computer Science,* 249, pp. 3-80, 2000;
5. J.J.Rutten, D.Turi. Initial Algebra and Final Coalgebra Semantics for Concurrency. *EATS №62,* pp. 530-559.